Um misto de teoria e observação
(A mix of theory and observation)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – Procuramos esclarecer que o movimento do periélio dos planetas não é algo que possa ser observado diretamente. Embora seja um importante elemento orbital, o periélio é um conceito teórico, que varia no tempo sob a influência de perturbações e não acompanha o movimento do planeta. Há de se ter um encontro periódico entre o planeta e seu periélio, uma igualdade entre a longitude da posição do planeta e a longitude do seu periélio, mas estes momentos também não são evidentes, nem possíveis de serem observados em todas as ocorrências e sem dúvida alguma. Se observarmos o trânsito de Mercúrio pelo disco do Sol não conseguiremos discernir com a precisão necessária se ele se aproxima ou se afasta do Sol, se sua distância diminui ou aumenta, se ele atingiu a distância mínima ou máxima do Sol, apenas saberemos que ele percorre uma linha aproximadamente reta sobre o Sol, segundo determinado ângulo e em determinado intervalo de tempo. Além deste fato, que pode ser óbvio para uns e uma revelação para outros, também apresentaremos um resumo das teorias de Le Verrier e Stockwell, comentários de Newcomb e a maneira como foram obtidos os valores observados de Clemence, referência importante citada por Weinberg. São também mostradas mais algumas hipóteses para a precessão do periélio de Mercúrio, como uma diminuição na massa do Sol, ao invés de um acréscimo na massa dos planetas, parecido com o que já se fez com a hipótese do vento solar. Um valor teórico exato obtido classicamente também será mostrado durante o desenvolvimento deste artigo: correções nos movimentos médios dos planetas.
ABSTRACT –

Palavras-chaves:
Keywords:

1 - Introdução

A anomalia mais conhecida do movimento de Mercúrio é a da precessão do seu periélio, que é explicada pela Relatividade Geral[1], mas de maneira que não é satisfatória[2]. Concluímos que a Relatividade Geral não explica verdadeiramente esta precessão[3], e por isso a causa desta anomalia continua um problema em aberto, e vem tomando a atenção deste autor.

Vimos anteriormente[4] que Le Verrier, quem descobriu esta precessão, formula uma expressão de 2º grau no tempo *t* (em anos julianos) para o valor da longitude do periélio de Mercúrio[5],

$$\varpi = 75°7'13'',93 + 55'',913\,8\ t + 0'',000\,111\,1\ t^2, \qquad (1)$$

sendo a origem do tempo *t* em 1º de janeiro de 1850, ao meio-dia. Daqui se vê que a precessão secular não tem um valor constante, e sim variável, crescente com o tempo, nesta aproximação de 2º grau.

A expressão (1) serve de modelo matemático para a variabilidade da longitude ϖ em função do tempo *t*, uma previsão para o seu verdadeiro valor, mas aí estão contidos os 38'',3 por século (ou 0'',383 por ano) cuja causa não estava diretamente explicada pela teoria, mas estavam em acordo com valores observados.

Uma explicação possível para esta anomalia da precessão secular do periélio seria atribuir massas diferentes das adotadas previamente por Le Verrier, satisfazendo, por exemplo,

$$288''\ \nu' + 87''\ \nu'' = 38'',3, \qquad (2)$$

conforme anotado na página 100 de [5], onde ν' e ν'' são os ajustes nas massas de Vênus e da Terra, respectivamente, tal que

$$m_{corrigida} = m_{preliminar}\ (1 + \nu). \qquad (3)$$

Vamos agora generalizar a equação (2), levando em consideração mais planetas.

Tomemos por base a equação que consta na página 21 de [5], para o movimento anual da longitude do periélio de Mercúrio,

$$\begin{aligned}\varpi = {} & 75°7'1'',03 + 55'',530\,8\ t + 0'',000\,111\,1\ t^2 + 2'',806\,4\ \nu^{I}\,t + \\ & 0'',836\,1\ \nu^{II}\,t + 0'',025\,5\ \nu^{III}\,t + 1'',525\,9\ \nu^{IV}\,t + \\ & 0'',072\,4\ \nu^{V}\,t + 0'',001\,4\ \nu^{VI}\,t + 0'',000\,6\ \nu^{VII}\,t,\end{aligned} \qquad (4)$$

onde já está somado em ϖ o movimento de precessão da Terra (pgs. 20 e 21 de [5]),

$$\psi = 50'',259\,42\ t + 0'',000\,112\,89\ t^2. \qquad (5)$$

Calculando a diferença $\varpi(t=100) - \varpi(t = 0)$, i.e., obtendo o deslocamento angular do periélio em 100 anos, de 1850 a 1950, obtemos

$$\Delta\varpi = 5554'',191\ 1 + 280'',64\ \nu^{I} + 83'',61\ \nu^{II} + 2'',55\ \nu^{III} + 152'',59\ \nu^{IV} + 7'',24\ \nu^{V} + 0'',14\ \nu^{VI} + 0'',06\ \nu^{VII}. \qquad (6)$$

Igualando $\Delta\varpi$ ao valor observado[6],

$$\varpi_{obs} = 5600'',73, \qquad (7)$$

obtemos

$$280'',64\ \nu^{I} + 83'',61\ \nu^{II} + 2'',55\ \nu^{III} + 152'',59\ \nu^{IV} + 7'',24\ \nu^{V} + 0'',14\ \nu^{VI} + 0'',06\ \nu^{VII} = 46'',538\ 9. \qquad (8)$$

Baseando-nos na tabela 1 a seguir, que fornece os valores dos diversos ν, arredondados para 4 algarismos significativos, e onde se levou em consideração não apenas as massas dos planetas, mas também a dos seus respectivos satélites, e supôs-se $\nu^{VI} = \nu^{VII} = 0$, obtemos para o primeiro membro da equação (8) o valor -0'',6156, ou seja, muito menor em módulo do que o valor 46'',5389 esperado, além de ter o sinal negativo, oposto ao requerido no segundo membro.

Infelizmente a equação anterior não depende do coeficiente ν de Mercúrio, embora seja ele o de maior valor (em módulo), segundo as massas atualmente adotadas.

Planeta	**$M_{planeta}$ (kg)**	**$M_{satélites}$(kg)**	**$m^{-1} = M_S / (M_p+M_s)$**	**Le Verrier**	**$\nu^{\cdots}$**
Mercúrio	$3,3022\text{x}10^{23}$	0	6 023 560,05	3 000 000	-0,5020
Vênus (I)	$4,8685\text{x}10^{24}$	0	408 565,27	401 847	-0,01644
Terra (II)	$5,9736\text{x}10^{24}$	$7,349\text{x}10^{22}$	338 935,07	354 936	0,04721
Marte (III)	$6,4174\text{x}10^{23}$	$1,26\text{x}10^{16}$	3 099 541,81	2 680 337	-0,1352
Júpiter (IV)	$1,8986\text{x}10^{27}$	$3,9701\text{x}10^{23}$	1 047,48	1 050	0,002406
Saturno (V)	$5,6846\text{x}10^{26}$	$1,4051\text{x}10^{23}$	3 498,24	3 512	0,003933
Urano (VI)	$8,6810\text{x}10^{25}$	$9,1413\text{x}10^{21}$	22 910,85	?	?
Netuno (VII)	$1,0243\text{x}10^{26}$	$2,1489\text{x}10^{22}$	19 415,04	?	?

Tabela 1 – Massa dos planetas (M_p) e satélites (M_s) do sistema solar em kg e recíproco da soma em relação à massa do Sol ($M_S = 1,9891\text{x}10^{30}$ kg). Os algarismos romanos são os índices superiores comumente usados nas equações do movimento planetário.

Por curiosidade, se mantivermos todos os ν com o sinal positivo, sem alterar o módulo de cada um, obteremos para a soma do primeiro membro de (8) o valor +9'',3013, que dista 37'',2376 do valor requerido no segundo membro. Coincidentemente, essa diferença é próxima dos 38'',3 calculados por Le Verrier.

Fazendo $\nu^{I} = \nu^{II} = \nu^{III} = \nu^{IV} = \nu^{V} = \nu^{VI} = \nu^{VII} = \nu$ em (8) obtemos

$$526'',83\ \nu = 46'',5389, \tag{9}$$

ou $\nu \approx 0{,}08834$, i.e., um pequeno aumento de cerca de 8,8% nas massas adotadas por Le Verrier poderia explicar classicamente a anomalia da precessão do periélio de Mercúrio. Espera-se com isso, entretanto, que não se prejudique os valores das outras anomalias de Mercúrio, nem as dos outros planetas. Se esse aumento, de fato, não prejudicar de maneira importante nenhum outro resultado observacional, nenhum outro elemento orbital, pelo contrário, se também puder explicá-los convenientemente, teremos encontrado enfim a causa da diferença desta precessão secular.

Alternativamente, ao invés de exigirmos um aumento simultâneo das massas de todos os planetas do sistema solar, podemos, de maneira parecida com a hipótese do vento solar[7], supor uma diminuição ΔM_S da massa do Sol (M_S), de tal modo que

$$\frac{M_p}{M_S}(1+v) = \frac{M_p}{M_S - \Delta M_S} \tag{10}$$

ou

$$\Delta M_S = M_S \frac{v}{1+v}, \tag{11}$$

resultado que independe da massa de cada planeta, mas apenas do coeficiente v de ajuste de massas adotado na equação (9).

Para M_S = 1,9891x10^{30} kg e ν = 0,08834 vem

$$\Delta M_S = 1{,}6145 \times 10^{29}\ kg \tag{12}$$

e

$$M'_S = 1{,}8277 \times 10^{30}\ kg, \tag{13}$$

onde M'_S é a "nova" massa do Sol, ou seja, $M'_S = M_S - \Delta M_S$, recalculada para se ajustar à precessão secular do periélio de Mercúrio.

Para o valor de v calculado anteriormente, temos

$$\frac{v}{1+v} \approx 0{,}08117, \tag{14}$$

ou seja, uma diminuição da ordem 8,12% na massa do Sol adotada atualmente explica classicamente essa anomalia, sem a necessidade de se ajustar as massas dos planetas do sistema solar. Claro que mesmo sendo necessários ajustes nas massas que foram adotadas previamente por Le Verrier, por exemplo, compatibilizando-as com as massas atuais, algum outro valor de $\frac{v}{1+v}$ para redução da massa do Sol também poderia ser encontrado para explicar os 43'' de precessão. Esta também me parece uma hipótese bastante razoável, ainda melhor que a do vento solar.

2 – John N. Stockwell

John Nelson Stockwell (1832-1920) publicou em 1872 um excelente trabalho sobre as variações seculares dos elementos orbitais dos 8 planetas do sistema solar[8].

Dos 6 elementos orbitais estudados na Mecânica Celeste,

1) movimento médio (i.e., deslocamento angular médio no período considerado) (n)
2) distância média ao Sol (a)
3) excentricidade da órbita (e)
4) inclinação da órbita (i)
5) longitude do periélio (ϖ)
6) longitude do nodo (θ)

os dois primeiros são considerados constantes, e os quatro últimos foram objetos de estudo de Stockwell em [8], a fim de determinar seus valores numéricos para cada planeta.

Uma observação a ser feita é que o movimento médio (n) não pode ser rigorosamente constante, pois já vimos do estudo de Le Verrier (equações (1) e (4)) que o periélio sofre um movimento acelerado (ainda que muito fracamente), o que não é compatível com a suposição de um movimento médio constante. A cada volta completa este valor médio sofre uma ligeira variação.

Stockwell calculou que a excentricidade de Mercúrio pode variar entre os extremos 0,1214943 e 0,2317185 (portanto não vale apenas o valor mais simplificado de 0,2056), e a longitude do periélio tem o movimento médio anual de 5'',463803, portanto maior que o obtido por Le Verrier (≈ 5'',27) [5].

Em relação à eclíptica fixa de 1850 a inclinação da órbita de Mercúrio varia de 3º 47' 8'' a 10º 36' 20'', enquanto que em relação ao plano invariável do sistema planetário sua inclinação varia de 4º 44’ 27’’ a 9º 10’ 41’’ (o tamanho dos dois intervalos não é o mesmo, diferindo em 2º 23’ 02’’).

O movimento médio do nodo de Mercúrio sobre a eclíptica de 1850, e sobre o plano invariável, é igual a 5’’,126172 em ambos os casos. Vejamos que este é um valor próximo do movimento médio da longitude do periélio.

A obliquidade do equador da Terra em relação à eclíptica aparente e em relação à eclíptica fixa tem o valor médio de 23º 17’ 17’’. Os limites da obliqüidade da eclíptica aparente em relação ao equador são 24º 35’ 58’’ e 21º 58’ 36’’, portanto a maior e a menor declinação do Sol e do solstício nunca podem diferir entre si de mais de 2º 37’ 22’’.

O valor médio da precessão dos equinócios sobre a eclíptica fixa, e também sobre a eclíptica aparente, é igual a 50’’,438239, mas o valor desta precessão em um ano juliano varia entre 48’’,212398 e 52’’,664080, uma amplitude de 4’’,451682.

Somando os 5’’,46 calculados por Stockwell a uma precessão dos equinócios de 50’’,54, próxima do valor médio, chegamos ao movimento de 56’’,00 de arco por ano, valor equivalente ao movimento secular observado do periélio de Mercúrio[6]. Vemos que o valor médio da precessão dos equinócios calculado por Stockwell também é maior que o valor da precessão utilizado por Le Verrier, dado em (5).

Se somarmos 50’’,44, o valor médio da precessão da Terra arredondado para 2 dígitos decimais, a 5’’,46, a precessão devida à influência dos outros planetas, valor também arredondado para 2 dígitos decimais, obtemos 55’’,90, o que equivale a 10’’ de arco para a anomalia da precessão secular do periélio de Mercúrio, ao invés de 38’’ ou 43’’.

É curioso também comentar que Stockwell descobriu algumas propriedades envolvendo os planetas exteriores, que parecem, segundo ele, constituir um sistema próprio, praticamente independente dos planetas interiores:

I. O movimento médio do periélio de Júpiter é exatamente igual ao movimento médio do periélio de Urano, e as longitudes médias desses periélios diferem por exatamente 180º;

II. O movimento médio do nodo de Júpiter sobre o plano invariável é exatamente igual ao de Saturno, e as longitudes médias desses nodos diferem por exatamente 180º;

III. O movimento médio do periélio de Saturno é muito próximo de 6 vezes o de Júpiter e Urano, e esta última quantidade é muito próxima de seis vezes o de Netuno.

As massas que Stockwell utilizou para chegar a todos os resultados anteriores estão descritos na tabela 2 a seguir, obtidos da página 5 de [8].

Planeta	$M_{planeta}$ (kg)	$M_{satélites}$(kg)	$m^{-1} = M_S / (M_p+M_s)$	Stockwell	$\nu^{...}$
Mercúrio	$3,3022x10^{23}$	0	6 023 560,05	4 865 751	-0,1922
Vênus (I)	$4,8685x10^{24}$	0	408 565,27	390 000	-0,04544
Terra (II)	$5,9736x10^{24}$	$7,349x10^{22}$	328 935,07	368 689	0,1209
Marte (III)	$6,4174x10^{23}$	$1,26x10^{16}$	3 099 541,81	2 680 637	-0,1352
Júpiter (IV)	$1,8986x10^{27}$	$3,9701x10^{23}$	1 047,48	1 047, 879	0,0003809
Saturno (V)	$5,6846x10^{26}$	$1,4051x10^{23}$	3 498,24	3 501,6	0,0009605
Urano (VI)	$8,6810x10^{25}$	$9,1413x10^{21}$	22 910,85	24 905	0,08704
Netuno (VII)	$1,0243x10^{26}$	$2,1489x10^{22}$	19 415,04	18 780	-0,03271

Tabela 2 – Massa dos planetas (M_p) e satélites (M_s) do sistema solar em kg e recíproco da soma em relação à massa do Sol ($M_S = 1,9891x10^{30}$ kg). Os algarismos romanos são os índices superiores comumente usados nas equações do movimento planetário.

Vemos na tabela 2 que Júpiter e Saturno estão com excelentes aproximações para suas massas, enquanto a massa de Mercúrio continua como a pior aproximação, embora tenha melhorado quando comparada com o valor expresso na tabela 1.

Outros elementos invariáveis dos planetas, e também necessários para os cálculos dos elementos variáveis, estão na tabela 3 abaixo:

Planeta	Movimento médio em um ano juliano (n)	Distância média ao Sol (a) (U.A.)
Mercúrio	5 381 016'',200 0	0,387 098 7
Vênus (I)	2 106 641'',438 0	0,723 332 3
Terra (II)	1 295 977'',440 0	1,000 000 0
Marte (III)	689 050'',902 3	1,523 687 8
Júpiter (IV)	109 256'',719 0	5,202 798 0
Saturno (V)	43 996'',127 0	9,538 852 0
Urano (VI)	15 424'',509 4	19,183 581 0
Netuno (VII)	7 873'',993 0	30,033 860 0

Tabela 3 – Movimento médio em um ano juliano e distância média ao Sol dos planetas do sistema solar, segundo Stockwell.

Ao contrário das massas planetárias, onde já estão previstos ajustes ν para cada planeta, para o movimento médio e a distância média ao Sol não há nenhuma possível correção a ser feita, exceto o tedioso recálculo de todos os coeficientes que são utilizados. Isto parece confirmar a crença inabalável na precisão e invariabilidade destes elementos, embora já saibamos que o movimento médio não pode ser rigorosamente constante, pois a precessão do periélio é um movimento acelerado em 2ª ordem de aproximação no tempo. Como se verá logo a seguir, a longitude do periélio obedece mais exatamente a uma complicada fórmula trigonométrica, o arco tangente de uma razão entre somas de senos e somas de cossenos, onde não há a possibilidade de ocorrerem divergências nos valores de ϖ, ao contrário das fórmulas aproximadas de Le Verrier anteriormente descritas, (1), (4) e (5).

Valores mais atuais dos elementos constantes na tabela 3 são dados nas tabelas 4 e 5 (obtidos da Wikipedia). O movimento médio foi obtido através da fórmula

$$n = \frac{365{,}25 \times 360 \times 60 \times 60}{P}, \qquad (15)$$

onde P é o período orbital em dias.

Planeta	Vel. orbital média (km/s)	Período orbital (d)	Movimento médio em um ano juliano (’’)
Mercúrio	47,87	87,969 1	5 381 025, 837 5
Vênus (I)	35,02	224,701	2 106 639,489 8
Terra (II)	29,78	365,256 363 004	1 295 977, 422 8
Marte (III)	24,077	686,971	689 059, 654 6
Júpiter (IV)	13,07	4 331,572	109 282,265 2
Saturno (V)	9,69	10 759,22	43 996,126 1
Urano (VI)	6,81	30 799,095	15 402,418 8
Netuno (VII)	5,43	60 190,030	7 864,491 8

Tabela 4 – Velocidade e período orbitais e movimento médio dos planetas do sistema solar, dados atuais.

Planeta	Periélio (U.A.)	Afélio (U.A.)	Distância média ao Sol (a) (U.A.)
Mercúrio	0,307 499	0,466 697	0,387 098
Vênus (I)	0,718	0,728	0,723
Terra (II)	0,983 291 34	1,016 713 88	1,000 002 61
Marte (III)	1,381 497	1,665 861	1,523 679
Júpiter (IV)	4,950 429	5,458 104	5,204 267
Saturno (V)	9,048 076 35	10,115 958 04	9,582 017 20
Urano (VI)	18,375 518 63	20,083 305 26	19,229 411 95
Netuno (VII)	29,766 070 95	30,441 252 06	30,103 661 51

Tabela 5 – Periélio, afélio e distância média ao Sol (semi-eixo maior) dos planetas do sistema solar, dados atuais.

Os valores usados por Stockwell para os elementos constantes e nossos respectivos valores atuais são aproximadamente iguais, mas nenhum deles é exatamente igual, nem mesmo a distância média da Terra ao Sol. Os movimentos médios da Terra e de Saturno usados por Stockwell, entretanto, estão com excelentes aproximações, o mesmo acontecendo com as distâncias médias ao Sol de Mercúrio, Vênus, Terra e Marte. No restante, as aproximações podem ser consideradas boas ou razoáveis.

Os valores da precessão do periélio de Mercúrio que se obtém devido à influência dos outros planetas, sem e com ajuste de massas, sem e com satélites, estão registrados na tabela 6 abaixo, arredondados para 2 dígitos decimais após a vírgula. Soma-se a cada um destes valores a precessão dos equinócios na Terra em relação à eclíptica aparente, cujo cálculo de Stockwell (para 1850) fornece $\psi_1 = 5024'',749831 \approx 5024'',75$. O cálculo atual do avanço do periélio em relação à teoria clássica usa como referência o valor de 5600'',73 [6].

Ajuste de massas	Massa dos satélites	Precessão ('')	Avanço do Periélio ('')
= 0	sem satélites	548,69	27,29
≠ 0	sem satélites	543,77	32,21
≠ 0	com satélites	544,93	31,05

Tabela 6 – Valores da precessão secular do periélio de Mercúrio segundo Stockwell.

Os valores tabelados acima correspondem ao período de 100 anos de 1850 a 1950 (1º de janeiro), e nota-se que o avanço do periélio para os três casos é menor do que o valor aceito atualmente[6]: (43.11 ± 0,45)'', ou seja, os cálculos de Stockwell aproximam-se mais dos valores observados que os atuais[6], e mesmo que os de Le Verrier[5] e Newcomb[10].

Para o período de 1950 a 2050 temos um valor ainda menor que o aceito para o avanço secular do periélio de Mercúrio: $28'',689341 \approx 28'',69$, com ajustes de massas e somando-se à massa de cada planeta a massa de seus satélites. Neste período a precessão dos equinócios é aproximadamente igual a 5027'',10.

A longitude $\varpi^{(i)}$ do periélio de um planeta (i) do sistema solar, levando-se em consideração apenas a influência mútua entre os planetas, e segundo a Mecânica Celeste de Laplace[16], foi obtida através do arco-tangente da razão entre uma soma de senos ($h^{(i)}$) e uma soma de cossenos ($l^{(i)}$), tal que

$$\varpi^{(i)} = arctg\,\frac{h^{(i)}}{l^{(i)}}\,, \qquad (16)$$

onde

$$h^{(i)} = e^{(i)} sen\,\varpi^{(i)} \tag{17}$$

$$l^{(i)} = e^{(i)} cos\,\varpi^{(i)} \tag{18}$$

$$e^{2\,(i)} = h^{2\,(i)} + l^{2\,(i)} \tag{19}$$

com o índice (0) referindo-se a Mercúrio, (1) a Vênus, (2) à Terra, etc., tal qual como se faz para os índices superiores em algarismos romanos usados para os ν, m, n, etc.

As soluções para os vários h e l devem satisfazer ao sistema de 16 equações diferenciais ordinárias lineares e de primeiro grau

$$\begin{cases} \frac{dh^{(i)}}{dt} = \left\{\sum_{k=0,k\neq i}^{7}(i,k)\right\} l^{(i)} - \sum_{k=0,k\neq i}^{7}[i,k]\, l^{(k)} \\ \frac{dl^{(i)}}{dt} = -\left\{\sum_{k=0,k\neq i}^{7}(i,k)\right\} h^{(i)} + \sum_{k=0,k\neq i}^{7}[i,k]\, h^{(k)} \end{cases} \tag{20}$$

para i igual a 0 até 7, correspondendo aos 8 planetas do sistema solar (nada impede que somemos até 8, incluindo Plutão, pois este também orbita ao redor do Sol e era considerado planeta, mas sua contribuição seria ínfima, assim como as contribuições de outros corpos mais afastados).

Utilizamos acima a seguinte notação:

$$(i,k) = -\frac{3m^{(k)} n^{(i)} a^{2(i)} a^{(k)} (a^{(i)}, a^{(k)})'}{4(a^{2(k)} - a^{2(i)})^2} = \\ = -\frac{3m^{(k)} n^{(i)} \alpha^2 b_{-1/2}^{(1)}}{4(1-\alpha^2)^2}, \tag{21}$$

onde

$$\alpha = \frac{a^{(i)}}{a^{(k)}}, \tag{22}$$

(a, a'), $(a, a')'$, $(a, a')''$, etc. são os coeficientes do desenvolvimento em série de cossenos de

$$(a^2 - 2aa'cos\theta + a'^2)^{1/2} = (a,a') + (a,a')'cos\theta + \\ (a,a')''cos2\theta + \cdots + (a,a')^{(n)}cosn\theta + \cdots \tag{23}$$

e

$$(a,a')' = a'b_{-1/2}^{(1)}, \tag{24}$$

$$b_{-1/2}^{(1)} = -\frac{1}{3}\cdot(1-\alpha^2)^2\cdot 2\alpha\cdot\ \Big\{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\alpha^2 + + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\alpha^4+\cdots\Big\}. \tag{25}$$

Também utilizamos

$$[i,k] = -\frac{3m^{(k)}n^{(i)}\alpha\left\{(1+\alpha^2)b_{-1/2}^{(1)}+\frac{1}{2}\alpha b_{-1/2}^{(0)}\right\}}{2(1-\alpha^2)^2}, \tag{26}$$

com

$$b_{-1/2}^{(0)} = (1-\alpha^2)^2\cdot 2\cdot\{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\alpha^2+\left(\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\alpha^4+ +\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\alpha^6+\cdots\}. \tag{27}$$

Os valores de $b_{-1/2}^{(0)}$ são positivos e os de $b_{-1/2}^{(1)}$ são negativos, o que é fácil de ver, enquanto (i, k) e [i, k] têm o mesmo sinal, igual ao sinal de $n^{(i)}$.

Como exemplo, Stockwell obtém os seguintes valores para os coeficientes das perturbações sofridas por Mercúrio:

$$\begin{aligned}
(0,1) &= (1 + \mu')\cdot 2'', 9986729\\
(0,2) &= (1 + \mu'')\cdot 0'', 8617070\\
(0,3) &= (1 + \mu''')\cdot 0'', 0279815\\
(0,4) &= (1 + \mu^{IV})\cdot 1'', 6028375\\
(0,5) &= (1 + \mu^{V})\cdot 0'', 0772642\\
(0,6) &= (1 + \mu^{VI})\cdot 0'', 0013324\\
(0,7) &= (1 + \mu^{VII})\cdot 0'', 0004603
\end{aligned} \tag{28}$$

e

$$\begin{aligned}
[0,1] &= (1 + \mu')\cdot 1'', 926868\\
[0,2] &= (1 + \mu'')\cdot 0'', 4087579\\
[0,3] &= (1 + \mu''')\cdot 0'', 008812816\\
[0,4] &= (1 + \mu^{IV})\cdot 0'', 1489646\\
[0,5] &= (1 + \mu^{V})\cdot 0'', 00391854\\
[0,6] &= (1 + \mu^{VI})\cdot 0'', 0000336068\\
[0,7] &= (1 + \mu^{VII})\cdot 0'', 1129820.
\end{aligned} \tag{29}$$

A soma $\sum_{k=1}^{7}(0,k)$ é especialmente importante, pois representa a parte constante da velocidade angular do periélio de Mercúrio, relativa ao tempo t em anos julianos, sem levar em consideração a parte variável desta velocidade: as excentricidades dos planetas e os cossenos das diferenças $(\varpi^{(k)} - \varpi^{(0)})$. De modo geral temos (pg. 611, Méc. Cél., eq. [1126]):

$$\frac{d\varpi^{(i)}}{dt} = \sum_{k=0,k\neq i}^{7}(i,k) - \sum_{k=0,k\neq i}^{7}[i,k]\frac{e^{(k)}}{e^{(i)}}cos(\varpi^{(k)} - \varpi^{(i)}). \quad (30)$$

No caso específico de Mercúrio, somando os valores dados em (28) e sem ajustes de massa obtemos

$$\sum_{k=1}^{7}(0,k) = 5'',5702558. \quad (31)$$

Com os ajustes de massas da tabela 2 obtemos

$$\sum_{k=1}^{7}(0,k) = 5'',5351790. \quad (32)$$

De (21) e (26) vemos que tanto (i, k) quanto [i, k] têm o fator comum $n^{(i)}$, ou seja, o movimento médio do planeta (i) que sofre as perturbações dos outros planetas (k).

Sendo assim, colocando $n^{(i)}$ em evidência podemos expressar (30) como

$$\frac{d\varpi^{(i)}}{dt} = n^{(i)}\beta(t), \quad (33)$$

onde $\beta(t)$ tem uma parte constante e uma parte variável no tempo devido ao termo $\frac{e^{(k)}}{e^{(i)}}cos(\varpi^{(k)} - \varpi^{(i)})$. Quanto menores as excentricidades $e^{(k)}$ e maior a excentricidade $e^{(i)}$, menor será a oscilação da velocidade angular do periélio $\frac{d\varpi^{(i)}}{dt}$, portanto mais próximo de um movimento curvilíneo uniforme se comportará o planeta (i) (lembrando que Mercúrio é o planeta de maior excentricidade do sistema solar (0,20563069), só superado por Plutão (0,24880766), e Vênus é o de menor excentricidade (0,00677323)).

Se para Mercúrio a parte constante do movimento secular do periélio observada é igual a $\frac{d\varpi^{(i)}}{dt} = 5600'',73 - 5026'',50 = 574'',23$ e a teoria "clássica" (de Stockwell, por exemplo) fornece 544'',93 (tabela 6), por hipótese igual ao resultado obtido em (33), basta multiplicar o movimento médio preliminar de Mercúrio $n^{(0)}$ pela razão entre 574'',23 e 544'',93, valor aproximadamente igual a 1,054, que se comportaria como um novo coeficiente de ajustes, tal como se faz para as massas dos planetas. O deslocamento do periélio observado e teórico seriam então necessariamente iguais, por ajustes nas condições de contorno. O mesmo processo pode se repetir para todos os outros planetas, acertando-se sucessivamente cada um dos 8 movimentos médios $n^{(i)}$, de Mercúrio a Netuno.

Seria enfim uma explicação bastante clara e natural para o avanço dos periélios dos planetas: uma velocidade orbital ligeiramente maior do que a calculada pelos métodos anteriores. Se o movimento médio é um dado observacional, para ajustá-lo corretamente basta aumentarmos a precisão desta medida, levando-se em consideração os “desvios” seculares.

3 – Mécanique Céleste

4 – Théorie du Mouvement de Mercure

Chega a ser dolorosa a leitura de Le Verrier, um trabalho que nos faz sentir como um arqueólogo, lidando com documentos num idioma já abandonado, objetos antigos e fragmentados, sujeitos a erros de interpretação, mas confiante de que está no caminho certo e de que o que ele faz é importante.

5 – Newcomb

6 – Clemence

7 – Explanatory Supplement

8 – Conclusão

Referências bibliográficas

1. Einstein, A.,

2. Godoi, V.M.S.,

3. Godoi, V.M.S.,

4. Godoi, V.M.S.,

5. Le Verrier, U. J.,

6. Weinberg, S.,

7. Godoi, V.M.S.,

8. Stockwell, J.N.,

9. Laplace, P.S.,

10. Newcomb, S.,