



## DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE C.GOLDBACH

BERKOUK Mohamed

Email: [bellevue-2011@hotmail.com](mailto:bellevue-2011@hotmail.com)

---

En 1742, Christian Goldbach adressa une lettre à Leonhard Euler dans laquelle il proposait la conjecture faible suivante :

***Tout nombre impair supérieur à 5 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers.***

Euler, lui répondit avec la version plus forte de la conjecture :

***Tout nombre pair plus grand que deux peut être écrit comme une somme de deux nombres premiers.*** [1]

Le « Tout nombre » de la réponse d'Euler qui a écarté 2 aussi, laisse entendre que Euler ou Goldbach, ou les deux à la fois ne considéraient pas que 1 est premier...

C'est ces deux dernières versions actuelles que nous allons essayer de démontrer

---

### I - INTRODUCTION

La démonstration repose essentiellement sur trois théorèmes que je vais développer par la suite, le premier dite « théorème 1 » qui définit nécessairement tout nombre premier sous forme de  $6m \pm 1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , et suffisamment quand  $m$  ne soit pas sous forme  $(6xy+x+y)$  ou  $(6xy-x-y)$  pour tout nombre  $6m+1$ , et différent de la forme  $(6xy-x+y)$  pour tout nombre  $6m-1$ . Nous appliquerons le « théorème 2 » qui définit la primalité de  $6m \pm 1$  sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$  de la forme. (v. la multimodulaire).

Le troisième théorème dite « théorème 3 » traite de la propriété de la parité en ce qui concerne le produit puis la somme de deux nombres entiers. Enfin le « théorème 4 » évoquant le postulat de Bertrand démontré par le TFNP.

Après avoir passé en revue tout les cas possibles de la somme de deux, puis de trois nombres premiers et de vérifier leurs conformité avec les deux conjectures. La démonstration de la réciproque nous a conduites par une analyse logique, tout droit à celles des deux conjectures de C.GOLDBACH.

#### **1° THEOREME -1 :**

Avec  $m \in \mathbb{N}^*$  ;

$6m+1$  soit premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $(6xy+x+y)$  ou  $(6xy-x-y)$ .

$6m-1$  pour être premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $(6xy-x+y)$

( $x$  et  $y$  permutables).

#### **DEMONSTRATIONS :**

Soit  $n > 6$  ;  $\epsilon \in \mathbb{N}$  ; l'ensemble des entiers naturels.

Divisons  $n$  par 6  $\implies n=6m+r$ ,  $m$  et  $r \in \mathbb{N}$ .  $r$  prend les valeurs des restes de la division soit 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

$n$  ne peut être premier si  $r=0, 2, 3$  ou 4 car il sera respectivement divisible par ces derniers

Pour être premier, le reste de sa division devra nécessairement être égale à 1 ou 5,

C'est-à-dire que  $n$  soit de la forme  $6m+1$  ou  $6m+5$ .

Si on considère la suite  $6m+5$  et si on définit son premier terme par 5, il sera la même chose que  $6m-1$ ,  $m$  commençant par la valeur entière 1.

Néanmoins cette condition que le nombre premier soit de la forme  $6m \pm 1$  n'est pas suffisante étant donné qu'il existe des entiers non premiers respectant la forme  $6m \pm 1$ .

Mr **Krafft**, le 12 avril 1798 devant l'académie des sciences impériales en Europe ; présenta son « essai sur les nombres premiers » [1]. Il s'en sort qu'il fallait une deuxième condition suffisante pour que tout nombre de la forme  $6m \pm 1$  soit premier :

a) Prenant le premier cas  $6m+1$ , la proposition se résume que **pour être premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $6xy+x+y$  ou  $6xy-x-y$** , (autrement dit, il faut que le nombre  $(6m+1)$  ne soit pas un nombre composé ( produit de  $(6x+1)(6y+1)$  ou  $(6x-1)(6y-1)$  .)

*Démonstration :*

. Si  $N=6m+1$  est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$$6m+1 = (u+t)(v+z)$$

$$= uv + uz + tv + tz ; \text{ on suppose que l'un de ces quatre produits soit } = 1$$

Soit  $tz=1$  ;  $\Rightarrow t=1$  et  $z=1$  ou  $t=-1$  et  $z=-1$ .

$$\Rightarrow 6m+1 = uv + u + v + 1 \text{ ou } 6m+1 = uv - u - v + 1$$

$$\Rightarrow 6m = uv + u + v \text{ ou } 6m = uv - u - v$$

Vu que  $m$  est un entier  $> 0 \Rightarrow u$  et  $v$  doivent tous les deux être  $> 0$  ou tous les deux  $< 0$ .

Soit  $6m = uv + u + v$  divisible par 2 & 3.  $uv + u + v$  d'abord divisible par 2  $\Rightarrow u$  &  $v$  doivent être pairs, donc  $u=2p$  &  $v=2q$

$$\Rightarrow 6m = 2p2q + 2p + 2q \text{ c'est-à-dire } 3m = 2pq + p + q$$

$$\Rightarrow 2pq + p + q \text{ doit être divisible aussi par 3 donc } 2pq + p + q = 3x$$

$$2pq + p + q = pq + p(q+1) + q = 3x, \Rightarrow p=3x \text{ et } q=3x \text{ et } (q+1)=3x \text{ c'est-à-dire } q = 3x-1$$

Soit  $6m = uv - u - v$  divisible par 2 & 3.  $uv - u - v$  aussi divisible par 2  $\Rightarrow u$  &  $v$  doivent être pairs, donc  $u=2p$  &  $v=2q$

$$2pq - p - q = pq + q(p-1) - p = 3y, \Rightarrow p=3y \text{ et } q=3y \text{ et } (p-1)=3y \text{ c'est-à-dire } p = 3y+1$$

**Donc trois suppositions ; soit  $p=3x$  &  $q=3y$  ou  $p=3x-1$  &  $q=3y-1$  ou  $p=3x+1$  &  $q=3y+1$**

( $x$  étant permutable avec  $y$ )

1°-supposition  $p=3x$  &  $q=3y$  :

$$3m = 2pq + p + q \Rightarrow 3m = 2.3x.3y + 3x + 3y$$

Donc  $m = 6xy + x + y$ .

$$3m = 2pq - p - q \Rightarrow 3m = 2.3x.3y - 3x - 3y$$

Donc  $m = 6xy - x - y$

2°-supposition  $p=3x-1$  &  $q=3y-1$

$$3m = 2pq + p + q \Rightarrow 3m = 2.(3x-1).(3y-1) + (3x-1) + (3y-1)$$

$$3m = 6x-2(3y-1) + 3x-1 + 3y-1$$

$$3m = 18xy - 6x - 6y + 2 + 3x + 3y - 2 = 18xy + 3x + 3y + 2 - 2$$

$\Rightarrow m = 6xy + x + y$

$$3m = 2pq - p - q \Rightarrow 3m = 2.(3x-1).(3y-1) - (3x-1) - (3y-1)$$

$$3m = 6x-2(3y-1) - 3x-1 - 3y-1$$

$$3m = 18xy - 6x - 6y + 2 - 3x - 1 - 3y - 1 = 18xy - 3x - 3y + 2 - 2$$

$\Rightarrow m = 6xy - x - y$

3°-supposition  $p=3x+1$  &  $q=3y+1$

$$3m = 2pq + p + q \Rightarrow 3m = 2.(3x+1).(3y+1) - (3x+1) - (3y+1)$$

$$3m = 6x+2(3y+1) - (3x+1) - (3y+1)$$

$$3m = 18xy + 6x + 6y + 2 - 3x - 1 - 3y - 1 = 18xy + 3x + 3y + 2 - 2$$

$\Rightarrow m = 6xy + x + y$

$$3m = 2pq - p - q \Rightarrow 3m = 2.(3x+1).(3y+1) - (3x+1) - (3y+1)$$

$$3m = 6x+2(3y+1) - 3x-1 - 3y-1$$

$$3m = 18xy + 6x + 6y + 2 - 3x - 1 - 3y - 1 = 18xy + 3x + 3y + 2 - 2$$

$\Rightarrow m = 6xy - x - y$

**Finalement  $N=6m+1$  pour être premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $6xy+x+y$  ou  $6xy-x-y$  -fin de démonstration-**

b) Prenant le deuxième cas  $6m-1$ , la proposition dit que **pour être premier, il faut point que  $m$  soit compris sous la forme  $6xy+x-y$** , autrement dit, il faut que  $(6m-1)$  ne soit pas un nombre composé ( produit de  $(6x+1)(6y-1)$  ou  $(6x-1)(6y+1)$  ).

Démonstration :

. Si  $N=6m-1$  est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$$6m-1 = (u+t)(v+z)$$

$$6m-1 = uv + uz + tv + tz ; \text{ l'un de ces quatre produits peut être supposé } = -1$$

$$\text{Soit } tz = -1 ; \Rightarrow t=1 \text{ et } z=-1 \text{ ou } t=-1 \text{ et } z=1.$$

$$\Rightarrow 6m-1 = uv - u + v - 1 \text{ ou } 6m-1 = uv + u - v - 1$$

$$\Rightarrow 6m = uv - u + v \text{ ou } 6m = uv + u - v$$

Sachant que  $m$  est un entier  $> 0$ , donc  $u$  et  $v$  doivent tous les deux être  $> 0$  ou tous les deux  $< 0$ .

Soit  $6m = uv + u - v$  divisible par 2 & 3.  $uv + u - v$  pour être divisible par 2  $\Rightarrow u$  &  $v$  doivent être pairs, c'est-à-dire  $u=2p$  &  $v=2q$ .

$$6m = 2p2q + 2p - 2q \text{ donc } 3m = 2pq + p - q$$

$$\Rightarrow 2pq + p - q \text{ doit être divisible aussi par 3, c'est-à-dire } 2pq + p - q = 3x \text{ (ou } = 3y)$$

$$2pq + p - q = pq + q(p-1) + p = 3x \Rightarrow p=3x \text{ et } q=3y \text{ et } (p-1)=3x, \text{ donc } p=3x+1$$

Soit  $6m = uv - u + v$  divisible par 2 & 3.  $\Rightarrow uv - u + v$  divisible par 2 donc  $u$  &  $v$  doivent être pairs, c'est-à-dire  $u=2p$  &  $v=2q$ .

$$6m = 2p2q - 2p + 2q \Rightarrow 3m = 2pq - p + q$$

$$\Rightarrow 2pq - p + q \text{ devra être divisible aussi par 3, c'est-à-dire } 2pq - p + q = 3x \text{ (ou } = 3y)$$

$$2pq - p + q = pq + pq - p + q = pq + p(q+1) - q = 3y \Rightarrow p=3x \text{ et } q=3y \text{ et } (q+1)=3y \text{ c'est à dire } q=3y-1$$

**Donc deux suppositions ; soit  $p=3x$  &  $q=3y$  ou  $p=3x+1$  &  $q=3y-1$**

( $x$  étant permutable avec  $y$ )

1°-supposition  $p=3x$  &  $q=3y$  :

$$3m = 2pq - p + q \Rightarrow 3m = 2 \cdot 3x \cdot 3y - 3x + 3y$$

$$\text{Donc } m = 6xy - x + y \quad (1)$$

2°-supposition  $p=3x+1$  &  $q=3y-1$

$$3m = 2pq - p + q \Rightarrow 3m = 2 \cdot (3x+1) \cdot (3y-1) - (3x+1) + (3y-1)$$

$$3m = 6x-2(3y+1) - 3x + 1 + 3y - 1$$

$$3m = 18xy + 6x - 6y - 2 - 3x + 3y + 2 = 18xy + 3x - 3y - 2 + 2$$

$$\text{Donc } m = 6xy + x - y \quad (2)$$

A cause de la permutabilité de  $x$  &  $y$  les expressions (1) & (2) reviennent au même

**Finalement : pour que  $N=6m-1$  soit premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $6xy+x-y$ .**

## 2° THEOREME-2 :

Théorème sur les nombres premiers ( Berkouk )

définition :

soit  $n$ , un entier naturel, la Multimorielle de  $n$ , notée  $n(=)$ , est le produit de tous les restes issus de la division respective de  $n$  par chaque nombre entier  $m$  compris entre 1 et  $n$ .

Théorème :

$\forall n$ , un entier naturel  $> 2$ ,  $n$  est premier si et seulement si sa Multimorielle  $n(=) \neq 0$ .

Démonstration :

Soit  $m$  et  $n$  deux entiers :  $n(=) \Rightarrow 1 < m < n$

a)- si  $n$  est premier  $\Rightarrow n/m$  conduit à un reste nul, si  $m=n$  ou  $m=1$

Or  $1 < m < n$ , donc tous les restes des  $n/m \neq 0 \Rightarrow$  la multimodulaire  $n(=) \neq 0$ .

Ou bien

b)- si  $n$  est un nombre composé,  $\Rightarrow n = k \cdot p$  ( $k$  et  $p$  entiers)

comme  $k < n$  et  $p < n \Rightarrow \exists m = k$ , ou  $m = p$  qui divise  $n$  et conduit à un reste Nul

$\Rightarrow n(=) = 0$ .

CQFD.

### **3° THEOREME-3 :**

**a) Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.**

**Dans tous les autres cas, le produit est pair.**

**Et**

**b) La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.**

**La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.**

#### Démonstration a-:

##### Produit de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est  $2n$  et le second  $2p$ . (Un nombre impair est du type  $2x+1$ )

Nous avons : (le symbole  $*$  est ici le signe de multiplication)

$$2n * 2p = 2 * n * 2 * p = 2 * (n * 2 * p)$$

Ce résultat est de la forme  $2x$

, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

##### Produit de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est  $2n + 1$

et le second  $2p + 1$ . (Un nombre impair est du type  $2x + 1$ )

$$(2n + 1) * (2p + 1) = 4np + 2n + 2p + 1 = 2(2np + n + p) + 1$$

Ce résultat est de la forme  $2x + 1$ , donc le produit est impair.

##### Produit d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair  $2n$  et un nombre impair  $2p + 1$

$$2n * (2p + 1) = 4np + 2n = 2(2np + n)$$

Ce résultat est de la forme  $2x$

, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

**Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.**

**Dans tous les autres cas, le produit est pair. CQFD.**

#### Démonstration b-:

##### Somme de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est  $2n$  et le second  $2p$ . (Un nombre impair est du type  $2x+1$ )

Nous avons :

$$2n + 2p = 2(n + p)$$

Ce résultat est de la forme  $2x$

, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

##### Somme de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est  $2n + 1$

et le second  $2p + 1$ . (Un nombre impair est du type  $2x + 1$ )

Nous avons :

$$(2n + 1) + (2p + 1) = 2n + 1 + 2p + 1 = 2n + 2p + 2 = 2(n + p + 1)$$

Ce résultat est de la forme  $2x$

, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

Somme d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair  $2n$  et un nombre impair  $2p + 1$

Nous avons :

$$2n + (2p + 1) = 2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1$$

Ce résultat est de la forme  $2x + 1$ , donc la somme est impaire.

Le résultat est similaire si le premier nombre est impair et le second pair.

**La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.**

**La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair. CQFD**

#### 4° THEOREME-4 :

le postulat de Bertrand démontré par Tchebychev dit que :

Si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors il existe toujours au moins un nombre premier  $p$  tel que

$n < p < 2n$ , Peut-être traduit par le théorème fondamentale des nombres premiers à savoir si  $\pi(n)$ , le cardinal des

nombres premiers compris dans  $]1, n]$ ,  $n$  entier avec  $\pi(n) \sim \frac{n}{\log(n)}$

Alors dans  $[n, 2n[$ ,  $\pi(2n) - \pi(n) > 0$ .

$$\Rightarrow \frac{2n}{\log(2n)} - \frac{n}{\log(n)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2n \cdot \log(n) - n \cdot \log(2n)}{\log(2n) \log(n)} > 0 \quad \text{comme le dénominateur } \log(2n) \log(n) > 0$$

$$\Rightarrow 2n \log(n) - n \cdot \log(2n) > 0 \cdot \log(2n) \log(n)$$

$$\Rightarrow 2n \log(n) - n \cdot \log(2n) > 0$$

$$\Rightarrow 2n \log(n) > n \cdot \log(2n)$$

$$\Rightarrow 2n \log(n) > n \cdot \log(2) + n \cdot \log(n)$$

$$\Rightarrow n \cdot \log(n) > n \cdot \log(2)$$

$$\Rightarrow \log(n) > \log(2)$$

$$\Rightarrow e^{\log(n)} > e^{\log(2)}$$

$$\Rightarrow n > 2$$

Donc  $\pi(2n) - \pi(n) > 0$  est vraie  $\forall$ , entier  $> 2$ .

Pour  $n=2$ ,  $\pi(2 \cdot 2) - \pi(2)$  équivaut à 1 puisqu'il existe un premier entre 4 et 2, c'est 3.

$\Rightarrow \exists$  un cardinal  $\geq 1$  de premiers entre  $\pi(2n) - \pi(n)$ , c'est à dire  $\forall n \in [2, +\infty[$ ,  $\exists p$  premier /  $n < p < 2n$

(VOIR aussi la démonstration classique de Tchebychev en 1850 aboutissant au même résultat)

**CQFD.**

II - CONJECTURE FORTE DE C. GOLDBACH  
DEMONSTRATION

**A) Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair :**

Soit deux nombres premiers de la forme  $6m \pm 1$  Et  $6n \pm 1$ ,  $m$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(D'après la démonstration du théorème 1),

Nous aurons les sommes possibles suivantes, qui vérifient la propriété PAIRE d'après le « théorème 3 » :

1° soit  $S = (6m+1) + (6n + 1) = 6(m+n)+2 = 2 (3(m+n) + 1) \Rightarrow S$  est PAIRE,  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

2° ou  $S = (6m+1) + (6n - 1) = 2.3 (m+n)$ , d'après théorème 3  $\Rightarrow S$  est PAIRE  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

3° ou  $S = (6m-1) + (6n + 1) = 2.3 (m+n)$ , d'après théorème 3  $\Rightarrow S$  est PAIRE  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

4° ou  $S = (6m-1) + (6n - 1) = 2.3 (m+n) - 2 = 2 (3(m+n) - 1) \Rightarrow S$  est PAIRE  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

**La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme**

**$6m \pm 1$ , ou  $6n \pm 1$  vérifiée, la parité est établi aussi,  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$ , S est divisible par 2  $\Rightarrow$  donc  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$ , la somme de 2 premiers est PAIRE, y compris quand :**

**1)-  $m$  et  $n \neq 6xy + x + y$  ou  $m$  et  $n \neq 6xy - x - y$  ; condition suffisante pour que  $6m + 1$ , ou  $6n + 1$  soient premiers. (D'après théorème 1)**

$\Rightarrow \exists k$  et  $k' \in \mathbb{R}$ , tel que,  $k = (6m + 1)(=)$  et  $k' = (6n + 1)(=)$  (multimorielle)

. Si  $k > 0 \Rightarrow (m+k)$  et  $(n+k) \neq 6xy + x + y$  ou  $(m+k)$  et  $(n+k) \neq 6xy - x - y$

. Si  $k' > 0 \Rightarrow (m+k')$  et  $(n+k')$   $\neq 6xy + x + y$  ou  $(m+k')$  et  $(n+k') \neq 6xy - x - y \Leftrightarrow 6m + 1$ , ou  $6n + 1$  sont

Surement Premiers sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$  puisque  $k \neq 0$ .

**2) - y compris aussi quand :  $m$  et  $n \neq 6xy + x - y$  ; condition suffisante pour que  $6m - 1$ , ou  $6n - 1$  soient premiers. (D'après théorème 1)**

$\Rightarrow \exists k$  et  $k' \in \mathbb{R}$ , tel que,  $k = (6m - 1)(=)$  et  $k' = (6n - 1)(=)$  (multimorielle)

. si  $k > 0$  et  $k' > 0 \Rightarrow (m+k)$  et  $(n+k') \neq 6xy + x - y$

$\Leftrightarrow 6m - 1$ , ou  $6n - 1$  sont surement Premiers sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$ . (car  $k \neq 0$ )

**PREMIERE CONCLUSION : Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair**

Soit la proposition **P = Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair**

Et sa réciproque **Q = Tout nombre pair > 2 est la somme de deux nombres premiers**

( $\rightarrow$  : implication « si... Alors »)

Regardons  $P \rightarrow Q$  et sa réciproque  $Q \rightarrow P$  selon le tableau de vérités suivant :

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$ (réciproque)
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow Q \rightarrow P$  SSI P est vrai et Q est vrai aussi ?

**Supposons que Q est Fausse :**

⇒ ∃ un nombre PAIR > 2 qui n'est pas la somme de deux nombres premiers

**Démonstration :**

Soit  $\mathbb{N}$ , l'ensemble des entiers naturels ;  $\mathbb{D}$ , l'ensemble des entiers pairs.  $\mathbb{I}$ , l'ensemble des entiers impairs.

Soit  $\mathbb{N}^2$ , l'ensemble des couples d'entiers naturels  $(n, m)$ ,  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ,

Soit  $\mathbb{P}$  l'ensemble des premiers positifs,

Soit  $\mathbb{P}^2$  l'ensemble des couples de deux premiers positifs  $(p, p')$ ,  $\forall p, p' \in \mathbb{P}$ ,

Et  $\mathbb{P}^3$  l'ensemble des triplets de premiers positifs  $(p, p', p'')$ ,  $\forall p, p', p'' \in \mathbb{P}$ ,

Pour cela nous allons introduire trois lemmes à partir desquels nous définissons les cardinaux de ces ensembles Et à partir desquels aussi, nous concluons sur la réciproque Q de Goldbach.

**1° Lemme fondamentale**

**Tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  est équipotent à  $\mathbb{N}$**

Soit  $A \subseteq \mathbb{N}$  infini ; on sait que A admet un plus petit élément  $a_0$ .

Comme A n'est pas un singleton ;  $A_1 = A \setminus \{a_0\}$  est non vide, donc admet un plus petit élément  $a_1$ , qui vérifie  $a_0 < a_1$

Comme A n'est pas de cardinal 2 ;  $A_2 = A \setminus \{a_0, a_1\}$  admet un plus petit élément  $a_2$ , qui vérifie  $a_0 < a_1 < a_2$

Supposons que l'on ait construit n éléments  $a_0 < a_1 < a_2 \dots a_n$  dans A.

Comme A n'est pas fini, l'ensemble  $A_{n+1} = A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  est non vide et admet donc un plus petit élément  $a_{n+1}$ , qui vérifie  $a_n < a_{n+1}$ . Par récurrence, on construit ainsi une suite  $a_0 < a_1 < a_2 \dots a_n < a_{n+1}$  c'est-à-dire

une application  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  définit par  $f(n) = a_n$ , qui strictement croissante, donc injective.

Montrons que f est surjective, par l'absurde, supposons  $\exists y \in A / y \neq f(n), \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / a_m < y < a_{m+1}$ .

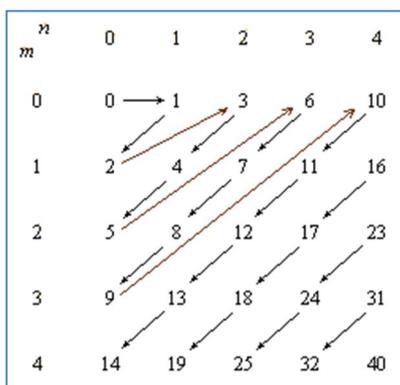
Comme  $a_m < y$ , on a  $y \in A_{m+1} = A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ .

Comme  $a_{m+1}$  est le plus petit élément de  $A_{m+1}$ , on doit alors,  $a_{m+1} \leq y$ , d'où la contradiction

⇒ f est une bijection de  $\mathbb{N}$  sur A ⇒ A est équipotent  $\mathbb{N}$ , donc  $\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N})$ .

**2° Lemme 1**

**$\mathbb{N}^2$  est dénombrable, donc  $\mathbb{N}^2$  est équipotent à  $\mathbb{N}$**



On peut faire la liste des couples d'entiers par diagonales  $D_n$  :

$D_n$  :  $D_0$  ;  $D_1$  ;  $D_2$  ;  $D_3$  ;  $D_3$  ; ....  
 $\mathbb{N}^2$  : (0,0) ; (1,0) (0,1) ; (2,0) (1,1) (0,2) ; (3,0) (2,1) (1,2) (0,3) ; (4,0) (3,1) (2,2) (1,3) (0,4) ; ..... (n,m)  
 $\mathbb{N}$  : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 .....  $\frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$

Ce qui revient à constater par induction que l'application

$$f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} : (n,m) \rightarrow \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m \quad (\text{fonction de couplage de Cantor} \rightarrow \text{terme explicite de la bijection } = y)$$

Est une bijection (strictement croissante) puisque  $\forall y \in \mathbb{N}, \exists! (n,m) \in \mathbb{N}^2 / f(n,m) = y$

$$\Rightarrow \mathbb{N}^2 \text{ est équipotent à } \mathbb{N} \Rightarrow \text{Card}(\mathbb{N}^2) = \text{Card}(\mathbb{N}) .$$

### 3° Lemme 2

**Si  $\mathbb{N}^2$  pour est équipotent à  $\mathbb{N}$ , alors l'ensemble  $\mathbb{N}^3$  est équipotent à  $\mathbb{N}$**

Cela se démontre par récurrence, si  $\mathbb{N}^3$  est équipotent à  $\mathbb{N}$ , alors  $\mathbb{N}^{2+1}$  est équipotent à  $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$  est donc à  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$   
Et finalement à  $\mathbb{N}$ .

### B) RECAPITULATION

$\mathbb{D}$ , l'ensemble des entiers pairs et  $\mathbb{P}$  l'ensemble des premiers positifs, sont des sous-ensembles infinis de  $\mathbb{N}$

D'après le Lemme 1, ils sont donc équipotents à  $\mathbb{N}$ , comme selon le Lemme 2,  $\mathbb{N}^2$  est équipotents à  $\mathbb{N}$

$\Rightarrow f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  qui est une bijection .

$$\mathbb{P}^2 \text{ est équipotents à } \mathbb{N} \text{ et } \mathbb{N} \text{ est équipotents à } \mathbb{D} \Rightarrow \text{Card}(\mathbb{D}) = \text{Card}(\mathbb{P}^2) .$$

Si  $\text{Card}(\mathbb{D}) > \text{Card}(\mathbb{P}^2)$ , alors il y aurait des nombres pairs qui ne peuvent générer des sommes de 2 premiers

Puisse que les images de l'ensemble  $\mathbb{P}^2$  ont déjà un antécédent dans  $\mathbb{D}$ , et que pour le restant des pairs de l'ensemble  $\mathbb{D}$ , la seule possibilité est de générer des somme de 2 nombres non premiers ; comme dans notre cas

$\text{Card}(\mathbb{D}) = \text{Card}(\mathbb{P}^2)$  .cette possibilité selon l'argument de Cardinalité, est nulle,  $\Rightarrow f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{D}$  est une Bijection :

Optant pour un choix non arbitraire pour  $f(p, p') = p + p'$  tant qu'on peut prouver l'injection et la surjection de  $f$  :

- **f est donc injective** :  $\forall (p, p')$  et  $(c, c') \in \mathbb{P}^2, (p+p') = n$  et  $(c+c') = n' \Rightarrow$  si  $(p+p') = (c+c')$  alors  $n = n'$ ,  
 $n$  et  $n'$ , pairs  $\in \mathbb{D}$ . (\*)

**Preuve :**

$n = n'$  de l'injection (\*)  $\Rightarrow n$  et  $n'$  de même parité, or d'après la réciproque de la conjecture forte de Goldbach

$\forall (p, p')$  et  $(c, c') \in \mathbb{P}^2; p+p' = n$  et  $c+c' = n', n$  et  $n'$  sont toujours pairs.

il s'agit au fait de la proposition **P = Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair**, qui se trouve la réciproque de la conjecture forte de Goldbach, qui implique donc l'injection de  $\mathbb{P}^2$  sur  $\mathbb{D}$ , et qui a la particularité d'ôter un élément de  $\mathbb{P}^2$  à savoir 2, et d'ôter un élément de  $\mathbb{D}$  à savoir 2, ce qui sauve l'argument de Cardinalité. Et qu'on peut donc démontrer rapidement :

$\forall (p, p') \in \mathbb{P}^2$ , sauf 2,  $p$  et  $p'$  sont IMPAIRES, et la somme de deux impaires est évidemment un nombre PAIR.  
(Avec  $2+2=4$  début des paires, en particulier).

- **f est donc surjective** :  $\forall n \text{ pair } \in \mathbb{D}, \exists (p, p') \in \mathbb{P}^2, (p+p') = n$ .

**Preuve :**

.Soit  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathbb{D}$  respectivement l'ensemble des couples de premiers, et l'ensemble des entiers naturels Pairs

.Soit  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{D}$

$$(p, p') \rightarrow f(p, p') = p + p'$$

.Soit  $P(n-1)$  un nombre premier de rang  $(n-1)$ , et son successeur  $P_n$

### 1°- Cas : $P_n > 2 P(n-1)$ , $P_n$ est plus grand au double de son prédécesseur

a) Si  $P_n > 2 P(n-1)$ , posons  $P_n = 2 P(n-1) + 1$  :

$n1 = P(n-1) + P(n-1) = 2 P(n-1)$  correspond au plus **grand** antécédent généré par le couple  $( P(n-1) , P(n-1) )$  de  $\mathbb{P}^2$

$n2 = (2 P(n-1) + 1) + 3 = 2 P(n-1) + 4$  correspond au plus **petit** antécédent généré par le couple  $((2 P(n-1) + 1) , 3 )$  de  $\mathbb{P}^2$

$\Rightarrow 2 P(n-1) + 4$  est le successeur de  $2 P(n-1)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{D} / 2 P(n-1) < n < 2 P(n-1) + 4$  ,  $n$  ne peut avoir d'image dans  $\mathbb{P}^2$  puisqu'il n'y a pas De premiers entre  $P(n-1)$  et  $P_n$  , donc ,  $2 P(n-1) + 2$  ne peut être la somme de deux premiers, elle serait donc un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach.

b) Si  $P_n > 2 P(n-1)$  , posons  $P_n = 2 P(n-1) + 3$  : (  $2 P(n-1) + 1$  n'étant pas premier )

$n1 = P(n-1) + P(n-1) = 2 P(n-1)$  correspond au plus **grand** antécédent généré par le couple  $( P(n-1) , P(n-1) )$  de  $\mathbb{P}^2$

$n2 = (2 P(n-1) + 3) + 3 = 2 P(n-1) + 6$  correspond au plus **petit** antécédent généré par le couple  $((2 P(n-1) + 3) , 3 )$  de  $\mathbb{P}^2$

$\Rightarrow 2 P(n-1) + 6$  est le successeur de  $2 P(n-1)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{D} / 2 P(n-1) < n < 2 P(n-1) + 6$  ,  $n$  ne peut avoir d'image dans  $\mathbb{P}^2$  puisqu'il n'y a pas De premiers entre  $P(n-1)$  et  $P_n$  , donc ,  $2 P(n-1) + 2$  et  $2 P(n-1) + 4$  ne peuvent être la somme de deux premiers, elle serait donc deux contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach

$\Rightarrow$  Si  $P_n > 2 P(n-1)$  et  $P_n = 2 P(n-1) + 3$  , ALORS  $\exists$  un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. Dans ce cas  $(2 P(n-1) + 2)$  et  $(2 P(n-1) + 4)$  ne peuvent pas avoir d'image dans  $\mathbb{P}^2$  .

c) Si  $P_n > 2 P(n-1)$  , posons  $P_n = 2 P(n-1) + k$  :  $k$  entier positif impair

$n1 = P(n-1) + P(n-1) = 2 P(n-1)$  correspond au plus **grand** antécédent généré par le couple  $( P(n-1) , P(n-1) )$  de  $\mathbb{P}^2$

$n2 = (2 P(n-1) + k) + 3 = 2 P(n-1) + (k+3)$  correspond au plus **petit** antécédent généré par le couple  $((2 P(n-1) + k) , 3 )$  de  $\mathbb{P}^2$

$\Rightarrow 2 P(n-1) + (k+3)$  est le successeur de  $2 P(n-1)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{D} / 2 P(n-1) < n < 2 P(n-1) + (k+3)$  ,  $n$  ne peut avoir d'image dans  $\mathbb{P}^2$  puisqu'il n'y a pas De premiers entre  $P(n-1)$  et  $P_n$  , donc ,  $(2 P(n-1) + 2)$  ,  $(2 P(n-1) + 4)$  ,  $(2 P(n-1) + 6)$  , ... ,  $(2 P(n-1) + (k+1))$  ne peuvent être la somme de deux premiers, elle serait donc  $\frac{k+1}{2}$  contre-exemples à la conjecture Forte de Goldbach.

$\Rightarrow$  Si  $P_n > 2 P(n-1)$  et  $P_n = 2 P(n-1) + k$  , ALORS  $\exists$  un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. Dans ce cas, tous les pairs compris entre  $2 P(n-1)$  et  $2 P(n-1) + (k+3)$  ne peuvent pas avoir d'image dans  $\mathbb{P}^2$  .

Conclusion 1 :

Si  $P_n > 2 P(n-1)$  , alors  $\exists$  un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. (3)

## 2°- Cas : $P_n < 2 P(n-1)$ , $P_n$ est plus petit au double de son prédécesseur

D'après le **théorème de Tchebychev** dument explicité ci-dessus dans le théorème -4 :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{P}$  (ensemble des nombres premiers) /  $n < q < 2n$

Posons  $n = P(n-1)$  , un nombre premier du rang (n-1) , et soit  $P_n$  son successeur .

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{P} / P(n-1) < q < 2 P(n-1)$

Si  $\exists! q \in \mathbb{P} / P(n-1) < q < 2 P(n-1)$  , alors  $q$  est le successeur de  $P(n-1)$

$\Rightarrow q = P_n$

$\Rightarrow P(n-1) < P_n < 2 P(n-1)$

Donc  $P_n < 2 P(n-1)$

Si  $\exists q_1, q_2, q_3, \dots, q_m \in \mathbb{P} / P(n-1) < q_1 < q_2 < q_3 < \dots < q_m < 2 P(n-1)$  , alors  $q_1$  est le successeur de  $P(n-1)$

$\Rightarrow q_1 = P_n$

$\Rightarrow P(n-1) < P_n < 2 P(n-1)$

Donc  $\forall$  le nombre  $P_n \in \mathbb{P}$  ,  $P_n$  est toujours inférieur à  $2 P(n-1)$

- D'après (3) l'Existence d'un contre-exemple est conditionné par :  $P_n > 2 P(n-1)$  dont on sait qu'elle ne sera jamais satisfait étant donné qu'on a déjà démontré que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall P_n \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$  ,  $P_n$  est toujours  $< 2 P(n-1)$

( Soit  $A = P_n > 2 P(n-1)$

non  $A = P_n < 2 P(n-1)$

$B = \exists$  un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach

non  $B = \nexists$  un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach

le schéma du raisonnement déductif nous apprend que :

$A$  est vrai et  $(A \Rightarrow B)$  est vrai Donc  $B$  est vrai

Ils en découlent seulement trois autres cas

$A$  est vrai et  $(A \Rightarrow B)$  est fausse Donc  $B$  est vrai

$A$  est fausse et  $(A \Rightarrow B)$  est vrai Donc  $B$  est fausse

$A$  est fausse et  $(A \Rightarrow B)$  est fausse Donc  $B$  est fausse

Or nous savons

-  $A$  est fausse vérifiée par le théorème de Tchebychev (non  $A$  aussi)

-  $(A \Rightarrow B)$  est vrai vérifiée par notre démonstration ci-dessus

Donc  $B$  ne pourrait être que fausse. )

Conclusion 2 :

Si  $P_n < 2 P(n-1)$  , alors  $\nexists$  un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. (4)

La conjecture forte de Goldbach est vraie.

Ce qui achève la démonstration.

### C) CONCLUSION :

Soit la proposition **P = Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair**

Et sa réciproque **Q = Tout nombre pair > 2 est la somme de deux nombres premiers**, qui correspond au fait à la conjecture forte de Goldbach.

$$1) \quad f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{D}$$

$(p, p') \rightarrow f(p, p') = (p + p')$  est une bijection démontrée injective et surjective, ce qui justifie le choix de  $f(p, p') = (p + p')$ , c'est l'introduction de l'énoncé de la conjecture forte de Goldbach dans cette bijection.

2) l'énoncé de la conjecture forte de Goldbach coïncide avec celui de la Surjection à savoir :

$\forall n \text{ pair} \in \mathbb{D}, \exists (p, p') \in \mathbb{P}^2, (p + p') = n$ . Nous savions que c'est une bijection et devait donc être nécessairement surjective mais ce n'est pas suffisant.

3) ce qui nous a amené à démontrer cette surjection qui est donc la conjecture forte de Goldbach. En détaillant sa preuve ci-dessus pour constater qu'il ∃ de contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. (qui suffit à elle seule) mais dont nous respectons la démarche du départ, en constatant par le biais de cette double démonstration que **non Q** est fausse

⇒ que **Q**, la conjecture Forte de Goldbach est VRAI par déduction selon le principe du tiers exclu.

∃ de contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach.

### III - CONJECTURE FAIBLE DE C. GOLDBACH DEMONSTRATION

#### A) Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impair:

Soit trois nombres premiers de la forme  $6m \pm 1$ ,  $6n \pm 1$ , et  $6p \pm 1$  avec  $m, n$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Nous aurons 8 sommes à trois, possibles :

1° soit  $S = (6m+1) + (6n+1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 3 \Rightarrow$  d'après théorème 3  
 $\Rightarrow S$  est **IMPAIRE**  $\forall m, n \text{ \& } p \in \mathbb{N}^*$

2° soit  $S = (6m+1) + (6n+1) + (6p-1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow$  d'après théorème 3  
 $\Rightarrow S$  est **IMPAIRE**  $\forall m, n \text{ \& } p \in \mathbb{N}^*$

3° soit  $S = (6m+1) + (6n-1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow$  d'après théorème 3  
 $\Rightarrow S$  est **IMPAIRE**  $\forall m, n \text{ \& } p \in \mathbb{N}^*$

4° soit  $S = (6m+1) + (6n-1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow$  d'après théorème 3  
 $\Rightarrow S$  est **IMPAIRE**  $\forall m, n \text{ \& } p \in \mathbb{N}^*$

5° soit  $S = (6m-1) + (6n-1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 3 \Rightarrow$  d'après théorème 3  
 $\Rightarrow S$  est **IMPAIRE**  $\forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$

6° soit  $S = (6m-1) + (6n+1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow$  d'après théorème 3  
 $\Rightarrow S$  est **IMPAIRE**  $\forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$

7° soit  $S = (6m-1) + (6n-1) + (6p+1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow$  d'après théorème 3  
 $\Rightarrow S$  est **IMPAIRE**  $\forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$

8° soit  $S = (6m-1) + (6n+1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow$  d'après théorème 3  
 $\Rightarrow S$  est **IMPAIRE**  $\forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$

**La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme**

**$6m \pm 1$ ,  $6n \pm 1$  ou  $6p \pm 1$  vérifiée, la propriété IMPAIRE est établie pour ces sommes aussi, quelque soit  $m, n \& p \in \mathbb{N}^*$ ,  $S$  est impaire, non divisible par 2**

**$\Rightarrow$  Donc  $\forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$ , la somme de 3 premiers est IMPAIRE, y compris quand :**

1)-  $m, n$  et  $p \neq 6xy + x + y$  ou  $m, n$  et  $p \neq 6xy - x - y$ ; condition suffisante pour que  $6m + 1$ , ou  $6n + 1$  ou  $6p + 1$  soient premiers. (D'après théorème 1)

$\Rightarrow \exists k, k' \text{ et } k'' \in \mathbb{R}$ , tel que,  $k = (6m + 1)(=)$ ,  $k' = (6n + 1)(=)$  et  $k'' = (6p + 1)(=)$ .

. Si  $k > 0, k' > 0$  et  $k'' > 0 \Rightarrow (m+k), (n+k')$  et  $(p+k'') \neq 6xy + x + y$  ou  $(m+k), (n+k')$  et  $(p+k'') \neq 6xy - x - y$

$\Leftrightarrow 6m + 1, 6n + 1$  et  $6p + 1$  sont sûrement Premiers sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$ .

Puisque  $k, k'$  et  $k''$  sont différents de 0 selon **théorème 2**.

2) - y compris aussi quand :  $m, n$  et  $p \neq 6xy + x - y$ ; condition suffisante pour que  $6m - 1, 6n - 1$  ou  $6p - 1$  soient premiers. (D'après théorème 1)

$\Rightarrow \exists k, k' \text{ et } k'' \in \mathbb{R}$ , tel que,  $k = (6m - 1)(=)$ ,  $k' = (6n - 1)(=)$  et  $k'' = (6p - 1)(=)$

. Si  $k > 0, k' > 0$  et  $k'' > 0 \Rightarrow (m+k), (n+k')$  et  $(p+k'') \neq 6xy + x - y$

$\Leftrightarrow 6m - 1, 6n - 1$  et  $6p - 1$  sont sûrement Premiers sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$ .

**PREMIERE CONCLUSION : Toute somme  $S$  de trois nombres premiers  $> 5$  est impaire**

Soit la proposition  $P =$  **Toute somme  $S$  de trois nombres premiers  $> 5$  est impaire**

Et sa réciproque  $Q =$  **Tout nombre impair  $> 5$  est la somme de trois nombres premiers**

**Supposons que  $Q$  est Fausse :**

b)  $\Rightarrow \exists$  un nombre IMPAIR  $> 5$  qui n'est pas la somme de trois nombres premiers

**Démonstration du :**

$I$ , l'ensemble des entiers impairs  $I$ , et  $P$  l'ensemble des premiers positifs, sont des sous-ensembles infinis de  $\mathbb{N}$

D'après le Lemme 1,  $I$  et  $P$  sont donc équipotents à  $\mathbb{N}$ , comme selon le Lemme 3,  $\mathbb{N}^3$  est équipotents à  $\mathbb{N}$

D'où l'on déduit que  $P^3$  est équipotents à  $I$ . donc  $\text{Card}(P^3) = \text{Card}(I)$ .

**B) RECAPITULATION FORTE :**

Si  $\text{Card}(I) > \text{Card}(P^3)$ , alors il y aurait des nombres impairs qui ne peuvent générer des sommes de 3 premiers

Puisque les images de l'ensemble  $P^3$  ont déjà un antécédent dans  $I$ , et que pour le reste des impairs de l'ensemble  $I$ , la seule possibilité est de générer des sommes de 3 nombres non premiers; comme dans notre cas

$\text{Card}(I) = \text{Card}(P^3)$ . cette possibilité selon l'argument de Cardinalité, est nulle, donc :  $\Rightarrow f : P^3 \rightarrow I$  est une bijection :

Optant pour un choix non arbitraire pour  $f(p, p', p'') = p + p' + p''$  tant qu'on peut prouver l'injection et la surjection de  $f$  :

-  $f$  est donc injective :  $\forall (p, p', p'') \text{ et } (c, c', c'') \in \mathbb{P}^3, (p+p'+p'') = n \text{ et } (c+c'+c'') = n' \Rightarrow \text{si } (p+p'+p'') = (c+c'+c'')$

Alors  $n = n'$  ( $n$  et  $n'$  impairs  $\in \mathbb{I}$ ) (\*)

**Preuve :**

$n = n'$  de l'injection(\*)  $\Rightarrow n$  et  $n'$  de même parité, or d'après la réciproque de la conjecture forte de Goldbach

$\forall (p, p', p'') \text{ et } (c, c', c'') \in \mathbb{P}^3; p+p'+p'' = n \text{ et } c+c'+c'' = n', n \text{ et } n', \text{ sont toujours impairs.}$

il s'agit au fait de la proposition **P = Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impaire**, qui se trouve la réciproque de la conjecture faible de Goldbach, qui a la particularité d'ôter trois éléments de  $\mathbb{P}^3$  q à savoir  $\{2,3,5\}$  et d'ôter trois éléments de  $\mathbb{I}$  à savoir  $\{1,3,5\}$ , ce qui sauve l'argument de Cardinalité. Et qu'on peut donc démontrer rapidement :

$\forall (p, p', p'') \in \mathbb{P}^3$ , sauf 2,  $p, p'$  et  $p''$  sont IMPAIRES, et la somme de trois impaires est évidemment un nombre IMPAIR, d'après le théorème -3 (Avec  $2+2+3=7$  début des impaires, en particulier)

-  $f$  est donc surjective :  $\forall n \text{ impair } \in \mathbb{I}, \exists (p, p', p'') \in \mathbb{P}^3, (p+p'+p'') = n.$

**Preuve :**

.Soit  $\mathbb{P}^3$  et  $\mathbb{I}$  respectivement l'ensemble des triplets de premiers, et l'ensemble des entiers naturels Impairs .

.Soit  $f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{I}$

$(p, p', p'') \rightarrow f(p, p', p'') = p + p' + p''$

.Soit  $P(n-1)$  un nombre premier de rang  $(n-1)$ , son successeur  $P_n$ , puis  $P(n+1)$  le successeur de  $P_n$  .

### 1°- Cas : $P_n > 3 P(n-1)$ , $P_n$ est plus grand au triple de son prédécesseur

a) Si  $P_n > 3 P(n-1)$  , posons  $P_n = 3 P(n-1) + 2$  :

$n1 = P(n-1) + P(n-1) + P(n+1) = 3 P(n-1)$  correspond au plus **grand** antécédent généré par le triplet  $(P(n-1), P(n-1), P(n-1))$  de  $\mathbb{P}^3$  .

$n2 = (3 P(n-1) + 2) + 2 + 2 = 3 P(n-1) + 6$  , impair qui correspond au plus **petit** antécédent généré par le triplet  $((3 P(n-1) + 2), 2, 2)$  de  $\mathbb{P}^3$

$\Rightarrow$  l'impair  $3 P(n-1) + 6$  est le successeur de  $3 P(n-1) + 2$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{I} / 3 P(n-1) + 2 < n < 3 P(n-1) + 6$  ,  $n$  ne peut avoir d'image dans  $\mathbb{P}^3$  puisqu'il n'y a pas

De premiers entre  $P(n-1)$  et  $P_n$  , donc ,dans ce cas ou  $P_n = 3 P(n-1) + 2$  ,  $3 P(n-1) + 4$  ne peut être la somme de trois premiers, elle serait donc un contre-exemple à la conjecture faible de Goldbach.

b) Si  $P_n > 3 P(n-1)$  , posons  $P_n = 3 P(n-1) + 4$  : ( $3 P(n-1) + 2$  n'étant pas premier )

$n1 = P(n-1) + P(n-1) + P(n+1) = 3 P(n-1)$  correspond au plus **grand** antécédent généré par le triplet  $(P(n-1), P(n-1), P(n-1))$  de  $\mathbb{P}^3$

$n2 = (3 P(n-1) + 4) + 2 + 2 = 3 P(n-1) + 8$  correspond au plus **petit** antécédent généré par le triplet  $((3 P(n-1) + 4), 2, 2)$  de  $\mathbb{P}^3$

$\Rightarrow 3 P(n-1) + 8$  est le successeur de  $3 P(n-1)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{I} / 3 P(n-1) < n < 3 P(n-1) + 8$  ,  $n$  ne peut avoir d'image dans  $\mathbb{P}^3$  puisqu'il n'y a pas

De premiers entre  $P(n-1)$  et  $P_n$  , donc , $3 P(n-1) + 2$  et  $3 P(n-1) + 6$  ne peuvent être la somme de trois premiers, elle serait donc deux contre-exemples à la conjecture faible de Goldbach.

c) Si  $P_n > 3P(n-1)$ , posons  $P_n = 3P(n-1) + k$ ,  $k$  entier positive Pair

$n_1 = P(n-1) + P(n-1) + P(n+1) = 3P(n-1)$  correspond au plus **grand** antécédent généré par le triplet  $(P(n-1), P(n-1), P(n-1))$  de  $\mathbb{P}^3$

$n_2 = (3P(n-1) + k) + 2 + 2 = 3P(n-1) + (k+4)$  correspond au plus **petit** antécédent généré par le triplet  $((3P(n-1) + k), 2, 2)$  de  $\mathbb{P}^3$

$\Rightarrow 3P(n-1) + (k+4)$  est le successeur de  $3P(n-1)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{I} / 3P(n-1) < n < 3P(n-1) + (k+4)$ ,  $n$  ne peut avoir d'image dans  $\mathbb{P}^3$  puisqu'il n'y a pas de premiers entre  $P(n-1)$  et  $P_n$ , donc  $3P(n-1) + 2, \dots, 3P(n-1) + (k+2)$  ne peuvent être

la somme de trois premiers, elle seraient donc  $\frac{k}{2}$  contre-exemples à la conjecture faible de Goldbach

Conclusion 1 :

Si  $P_n > 3P(n-1)$ , alors  $\exists$  un contre-exemple à la conjecture Faible de Goldbach. (5)

## 2°- Cas : $P_n < 3P(n-1)$ , $P_n$ est plus petit au triple de son prédécesseur

D'après le **théorème de Tchebychev** dument explicité ci-dessus dans le théorème -4 :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{P}$  (ensemble des nombres premiers) /  $n < q < 2n$

soit  $P(n-1)$  un nombre premier du rang  $(n-1)$ , et soit  $P_n$  son successeur.

posons  $n = 2P(n-1)$  d'après le théorème -4

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{P} / 2P(n-1) < q < 4P(n-1)$

Si  $\exists! q \in \mathbb{P} / 2P(n-1) < q < 4P(n-1)$ , alors  $q$  est le successeur de  $P(n-1)$

$\Rightarrow q = P_n$

$\Rightarrow 2P(n-1) < P_n < 4P(n-1)$

Si  $\exists q_1, q_2, q_3, \dots, q_m \in \mathbb{P} / 2P(n-1) < q_1 < q_2 < q_3 < \dots < q_m < 4P(n-1)$ , alors  $q_1$  est le successeur de  $P(n-1)$

$\Rightarrow q_1 = P_n$

$\Rightarrow 2P(n-1) < P_n < 4P(n-1)$

**deux cas alors** soit  $P_n \in [2P(n-1), 3P(n-1)[$  ou bien  $P_n \in [3P(n-1), 4P(n-1)[$

a) si  $P_n \in [2P(n-1), 3P(n-1)[$  alors  $\nexists$  de contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. (6)

b) si  $P_n \in [3P(n-1), 4P(n-1)[$  on ne peut pas conclure car il faut démontrer aussi qu'  $\nexists$  premiers dans cette intervalle :

soit  $\pi(n)$ , le cardinal des nombres premiers compris dans  $]1, n]$ ,  $n$  entier avec  $\pi(n) \sim \frac{n}{\log(n)}$

supposons  $\pi(4n) - \pi(3n) = 0$

Alors dans  $[2n, 4n[$ ,  $\pi(4n) - \pi(3n) = 0$ .

$$\Rightarrow \frac{4n}{\log(4n)} - \frac{3n}{\log(3n)} = 0$$

$$\Rightarrow 4n \cdot \log(3n) - 3n \cdot \log(4n) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{4n \cdot \log(3n)} &= e^{3n \cdot \log(4n)} \\ \Rightarrow (3n)^{4n} &= (4n)^{3n} \\ \Rightarrow 81^n \cdot n^{4n} &= 64^n \cdot n^{3n} \text{ Absurde} \end{aligned}$$

Donc  $\pi(4n) - \pi(3n) > 0. \Rightarrow \exists$  premier dans  $[3P(n-1), 4P(n-1)[$

On ne peut donc se contenter d'une probabilité de  $\frac{1}{2}$  (a ou b) pour vérifier la Conjecture faible de Goldbach avec le postulat de BERTRAND contrairement à la conjecture forte de Goldbach.

Comme nous avons déjà démontré que la conjecture forte est vérifiée, utilisant la démonstration de GAUSS qui démontre que si tout nombre pair supérieur à 4 soit somme de 2 nombres premiers p et p', alors ;  $p+p'+3 =$  impair . (puisque la somme d'un nombre pair avec un impair est toujours impair)

**3**, premier, étant le premier dont la somme du premier triplet  $(2+2+3)=7$ , ce qui est vrai pour tout p''  
Premier  $> 3$  puisque tout premier  $> 3$  est impair, donc la somme  $(p+p'+p'')$  est toujours impair

Ce qui achève la démonstration.

### C) CONCLUSION :

Soit la proposition **P = Toute somme S de trois nombres premiers  $> 5$  est impaire**

Et sa réciproque **Q = Tout nombre impair  $> 5$  est la somme de trois nombres premiers**, qui correspond au fait à la conjecture faible de Goldbach .

1)  $f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{I}$

$(p, p', p'') \rightarrow f(p, p', p'') = (p+p'+p'')$  est une bijection démontrée injective et surjective, ce qui

justifie le choix de  $f(p, p'+p'') = (p+p'+p'')$ , c'est l'introduction de l'énoncé de la conjecture forte de Goldbach dans cette bijection.

2) l'énoncé de la conjecture faible de Goldbach coïncide avec celui de la Surjection à savoir :

$\forall n$  impair  $\in \mathbb{I}, \exists (p, p', p'') \in \mathbb{P}^3, (p+p'+p'') = n.$  nous savions que c'est une bijection et devait donc être nécessairement surjective mais ce n'est pas suffisant.

3) ce qui nous a amené à démontrer cette surjection qui est donc la conjecture faible de Goldbach. En détaillant sa preuve ci-dessus pour constater qu'il ~~z~~ il de contre-exemple à la conjecture Faible de Goldbach. (qui suffit à elle seule) mais dont nous respectons la démarche du départ, en constatant par le biais de cette double démonstration que **non Q** est fausse

$\Rightarrow$  que **Q**, la conjecture Faible de Goldbach est VRAI par déduction selon le principe du tiers exclu.

CQFD

Casablanca le 19/05/2016 - 11:00

BERKOUK Mohamed ; email: [bellevue-2011@hotmail.com](mailto:bellevue-2011@hotmail.com)

#### REFERENCE

[1] Conférence du Mr. **KRAFFT** du 12 avril 1798, in **Nova acta Academiae Scientiarum Imperialis** – p.220