La conjecture de Collatz a été découverte par ce dernier dans les années vingt du 20° siècle. Elle était en ce moment là appelé « problème 3x+1 » ; elle a pris d'autre noms parmi autres la suite de Collatz qui se définit simplement comme suit :

$\forall x \in N^*$, *partant* de x ; s'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1 (3x+1) ; s'il est pair on le divise par 2 (x/2) ; si on répète la transformation, on finit par tomber sur 1 qui suit son « vol » infiniment dans le cycle trivial, c'est-à-dire 1, puis 4, puis2, puis encore 1, ainsi de suite.

Depuis on a cessé d'utiliser l'informatique pour marquer des records de x grand,$\in N^*$ qui permettent de rechercher un hypothétique contre exemple . Le projet « 3x+1@home » entend s'attaquer à toutes les suites de Collatz comprises entre 2^{71} et 2^{72}. Jusqu' à peu prés cette limite, la conjecture est vérifiée.

Je crois que si on vérifie les trois étapes suivantes, on peut démontrer la conjecture à savoir :

1)- *∃! Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1*
2)- *$\forall x \in N^*$, la suite de Collatz décroit vers un x' / x' < x*
3)- *$\forall x \in N^*$, la suite de Collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1, est le plus petit Élément.*

1)- ∃! Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1

> PROPOSITION I :
>
> *$\forall n \in N^*$; $\forall$ le cycle de la suite de Collatz défini sur n, son plus petit élément est toujours Impair.*

Démonstration : soit m le plus petit élément du cycle C ; C étant la trajectoire de m. Soit m' le nombre qui suit m, dont il est issu

Alors m'est aussi dans la trajectoire m ; $m' > m$, puisque m est le plus petit élément d'après notre proposition . Si m est pair $\Rightarrow m' = m/2 \Rightarrow m > m'$ ce qui est absurde, donc <u>m est impair</u> et $m' = 3m + 1$ avec m toujours $< m'$. CQFD.

Partant de notre proposition I, soit un cycle de longueur k = 3 dans N*. On notera ses k éléments distincts deux à deux a_1, a_2, a_3.

Supposant que le plus petit des éléments est a_3. Alors a_3 est forcément impair, et en particulier $a_1 = 3a_3+1$. a_2 devra être $> a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{a2}{2}$

Si a_1 est impair $==> a_2 = 3a_1+1 \Rightarrow a_1 = \frac{(a2-1)}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{((2a3)-1)}{3} \Rightarrow a_1 \simeq (\frac{2}{3}.a_3) \Rightarrow a_1 < a_3$

Absurde, donc a_1 est pair $\Rightarrow a_2 = \frac{a1}{2}$

Arrivant au calcul du Produit P, des termes du cycle :

$P = a_1 . a_2 . a_3$ remplaçant par leurs valeurs calculées,

$P = (3a_3+1). a_1/2. a_2/2$ établissant l'équation associée au produit des termes du cycle.

$a_1 . a_2 . a_3 = (3a_3+1). a_1/2. a_2/2$

$==> a_1 . a_2 . a_3 = \frac{(3a_3+1).a1.a2}{4}$

$==>$ $4(a_1 . a_2 . a_3) = (3a_3+1). a_1 . a_2$

$==>$ $4 = (3 + \frac{1}{a3})$: l'équation sous sa forme épurée admet comme solution $a_3 = 1$ (4=4) , donc $a_2 = 2.a_3 = 2$ et $a_1 = 3.a_3+1 = 4$, l'équation associée au cycle trivial 4->2 ->1

Existent – ils d'autres x1, x2, x3définis dans N*, qui forment un autre cycle avec k =3 ?

Nous avons 3 nombres x_1, x_2 et x_3 avec chacun 2 façons de se présenter, s'il est pair, soit en (x/2) dite a, soit en (3x+1) dite b s'il est impair, donc nous avons $2^3 = 8$ cas possibles que nous allons examiner en permutant les opérations a et b par 3 :

-1) cas : a a a⇒ $((x/2)/2) / 2 = x \Rightarrow x = 0$

(Après 3 opérations, il retourne à x puisque c'est un cycle, donc = x)

-2) cas : a a b ⇒ $3((x/2)/2) +1 = x \Rightarrow x = 4$

-3) cas : a b a ⇒ $((3x+1)/2)/2=x \Rightarrow x = 1$

-4) cas : a b b ⇒ $(3(3x+1)+1)/2 = x \Rightarrow x = -4/7$

-5) cas : b b b ⇒ $3(3(3(x+1) +1) +1 = x \Rightarrow x = -1/2$

-6) cas : b a b ⇒ $3((3x+1)/2)+1 = x \Rightarrow x = -5/7$

-7) cas : b b a ⇒ $3(3(x/2)+1)+1 = x \Rightarrow x = -8/7$

-8) cas : b a a⇒ $(3(x/2) +1) /2 = x \Rightarrow x = 2$

Les seuls solutions de nos équations dans N* sont $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ qui sont celles du cycle trivial 4 -> 2->1 ; les autres solutions (0, -4/7,-1/2,-5/7,-8/7) n'appartiennent pas à N*

PROPOSITION II

$\forall n \in N^*$ *définissant la suite de Collatz* **∃!** cycle de longueur k=3,

c'est le cycle trivial 1->4->2->1.

CQFD

Cas si la longueur du cycle k > 3 :

Supposons qu'il existe un cycle de la suite de Collatz de longueur k>3, a1 étant le plus petit élément, défini par les termes suivants:

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_k \qquad [1]$$

Pour opérer les calculs selon la suite de Collatz sur les termes $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_k$ Nous devrions connaitre leur parité. Or tout ce que nous savons par notre proposition I ci-dessus, c'est que c_1, le plus petit élément est impair. Quant aux autres termes, soit en procédant théoriquement par un tri des termes du cycle suivant la parité ; indépendamment de l'indice et de sa position exacte dans la suite, puisqu' on l'ignore.

Nous posions ensuite le produit de ces k termes, qu'on appellera *P*.(la commutativité du produit nous dispense de la position des vrais indice du cycle)

En posant d'abord, en les triant par parité, puis en spécifiant les termes impairs par a, les termes pairs par b ; puis en désignant par m le nombre de termes (ou cardinal) impairs, et h le nombre de termes pairs (m & h ∈ N*)

On obtient

$$\mathbf{P = a_1. a_2 \ldots. a_m \quad .b_1.b_2 \ldots. b_h} \qquad [2]$$

Exprimant maintenant chaque terme par sa valeur puisque nous avions défini sa parité en le multipliant par3x+1 s'il impair et en le multipliant par x/2 s'il est pair :

$$\mathbf{P=(3a_1+1). (3a_2+1)\ldots. (3a_m+1). (b_1)/2. (b_2)/2\ldots (b_h)/2.} \qquad [3]$$

Soit l'équation qui relie les deux formes du produit sous sa forme brute :

$$a_1. a_2 \ldots. a_m \quad .b_1.\ b_2 \ldots. b_h = (3a_1+1). (3\,a_2+1)\ldots. (3a_m+1).\ (b_1)/2. (b_2)/2\ldots (b_h)/2.$$

Simplifions l'équation par :

$$(a1.a_2 \ldots. a\ m). (b_1.\ b_2 \ldots. bh)= \frac{(3a1+1).(3a2+1)\ldots.(3am+1).\ (b1).(b2)\ldots (bh))}{2\hat{}h}$$

$$\Rightarrow \mathbf{2^h}.\ (a_1.\ a_2 \ldots. a\ m).(b_1.\ b_2 \ldots. bh) \ = (3a2+1)\ldots.(3am+1).\ (b1).(b2)\ldots\ (bh)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{2^h}(a_1.\ a_2 \ldots. a\ m \quad) \ = \ (3a1+1).(3a2+1)\ldots.(3am+1)$$

$$\mathbf{2^h} = \frac{(3a1+1)}{a1}.\frac{(3a2+1)}{a2}\ldots.\frac{(3am+1)}{am}$$

$$\mathbf{2^h} = \ (3+\ \frac{1}{a1}).\left(3+\ \frac{1}{a2}\right)\ldots.\left(3+\ \frac{1}{am}\right) \qquad [4]$$

Intéressons nous un instant au terme de droite que l'on nommé D.

$2^h = (3+\frac{1}{a1}).(3+\frac{1}{a2}) \dots (3+\frac{1}{am})$

Vérifions l'équation avec 3^m,borne minimale de D <==>$3^m < D$

Sachant que D > 3^m, ***par :*** $\underline{2^h<3^m<D \Rightarrow 2^h<3^m}$ ***ou*** $\underline{3^m < 2^h < D \Rightarrow 2^h>3^m}$

Selon h et m, trois cas peuvent se présenter :

1) – ***si m=h*** , $2^h<3^m \Rightarrow$ *h. log2 < m. log3* $\Rightarrow \frac{h.\log 2}{h.\log 3} < \frac{m.\log 3}{h.\log 3}$

$\Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$, *comme* $\frac{m}{h} = 1, \Rightarrow 1 > \frac{\log 2}{\log 3}$ *ce qui est évident*

2)- ***si m>h,*** $2^h<3^m \Rightarrow$ *h. log2 < m. log3* $\Rightarrow \frac{h.\log 2}{h.\log 3} < \frac{m.\log 3}{h.\log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$

Comme $m > h \Rightarrow \frac{m}{h} > 1 \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$, *ce qui est évident*

3)- ***si m < h*** *:la solution n'est pas évidente, comme m<h, il se peut que* $\frac{m}{h}$ *soit* $= \frac{\log 2}{\log 3}$

Or nous avons :

a) soit $2^h<3^m \Rightarrow$ *h. log2 < m. log3* $\Rightarrow \frac{h.\log 2}{h.\log 3} < \frac{m.\log 3}{h.\log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$, *ex* $2^4<3^3$

Ou bien

b) soit $2^h>3^m \Rightarrow$ *h. log2 > m. log3* $\Rightarrow \frac{h.\log 2}{h.\log 3} > \frac{m.\log 3}{h.\log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$, *ex* $2^7>3^4$ **[5]**

Or nous avons $2^h<3^m \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3} \Leftrightarrow 2^h>3^m \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ **[6]** *; cette équivalence logique est dû, si on multiplie ou divise les 2 membres d'une inéquation par une même valeur strictement négative (ex : -1), le sens de l'inéquation change tandis que les solutions de l'inéquation restent les mêmes.*

Il suffit donc de démontrer, si m< h, l'une des cas en ***a)*** *ou en* ***b)*** *par la transformation de Collatz et d'en tirer les conclusions*

Démontrons alors cette inégalité $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$:

Si le vol N atterrit en 1 alors le nombre **h** d'étapes paires du vol N et

Le nombre **m** d'étapes impaires du vol N vérifient

$\frac{m}{h}<\frac{log2}{log3}$ ***:Démonstration***

Soit N = U(0), U(1), ..., U(p)=l le vol N

Posons la suite de simplification pour N =$(\frac{U(0)}{U(1)}).(\frac{U(1)}{U(2)}).(\frac{U(2)}{U(3)})......(\frac{U(p-1)}{U(p)})$

Donc log N = log $(\frac{U(0)}{U(1)})$ + log $(\frac{U(1)}{U(2)})$+log $(\frac{U(2)}{U(3)})$ ...+ log $(\frac{U(p-1)}{U(p)})$

Lorsque i est une étape paire on a : log $(\frac{U(i)}{U(i+1)})$= log $(\frac{U(i)}{U(i)}*2))$ = log 2

Lorsque i est une étape impaire on a :

Log $(\frac{U(i)}{U(i+1)})$ = log $(\frac{U(i)}{3*U(i)+1})$ = log $(\frac{1}{3+\frac{1}{U(i)}})$ = - log $(3+\frac{1}{U(i)})$

⇒ log N = **h**.log(2) + **m**.log $(\frac{1}{3+\frac{1}{U(i)}})$

⇒ log N = **h**.log(2) + (-**m**. log $(3+\frac{1}{U(i)})$ (1)

Avec $U(i)$ grand ⇒ $\frac{1}{U(i)}\approx 0$, prenant seulement la borne minimale log(3) sans les $\frac{1}{am}$

puisque **h**.log(2) -**m**. log $(3+\frac{1}{U(i)})$ < **h.** log(2) – **m.** log(3) ; l'équation (1) devient donc :

0 < log N <**h.** log(2) –**m.** log(3)

⇒ 0 < h.log(2) –m .log(3)

⇒ m.log(3) < h .log (2) , divisons les 2 parties de l'inéquation par h.log(3)

$$\text{D'où} \quad \frac{m}{h} < \frac{log2}{log3}$$

Comme dans [6] nous avons vérifié que $2^h>3^m \Rightarrow \frac{m}{h}<\frac{\log 2}{\log 3}$, on peut conclure par la proposition suivante :

PROPOSITION III :

∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers **1**⇒ ($2^h>3^m$ et $\frac{m}{h}<\frac{\log 2}{\log 3}$) [7]

Vérifiant l'implication réciproque de cette proposition III :

Soit C = «∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers **1**»

Soit A = « $2^h>3^m$ »

Soit A = « $\frac{m}{h}<\frac{\log 2}{\log 3}$ »

Nous avons *l'implication* $C \Rightarrow (A \wedge B)$, et sa réciproque $(A \wedge B) \Rightarrow C$

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv \neg C \Rightarrow \neg (A \wedge B)$$
$$\equiv \neg C \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv \neg C \Rightarrow \neg A$$

Démontrons alors $\neg C \Rightarrow \neg A$

$\neg C$ = « *∃n ∈N* ; la suite de Collatz n'atterri pas de n vers **1*** » qui se traduit par un Produit des termes de cette suite dont n atterrit vers un entier différent de 1.

$$\text{Soit } \mathbf{P = (3a_1+1). (3a_2+1)\dots (3am+1). (b_1)/2. (b_2)/2\dots (bh)/2.} \quad \neq \mathbf{1}$$

$$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} (a_1+\frac{1}{a1}). (a_2+\frac{1}{a2})\dots (am+\frac{1}{am}). (b_1). (b_2) \dots (bh) \neq \mathbf{1}$$

Comme $\neg C \Rightarrow \neg A$ c'est-à-dire $\neg C \Rightarrow 2^h \leqslant 3^m$, et comme le produit des tout les termes pairs & impairs est toujours **> 1 et que $(\frac{3^m}{2^h}) \geqslant 1$,** $\left(2^h = 3^m \text{ si } \frac{m}{h} = \frac{\log 2}{\log 3} \right)$

ce qui donne , dans tous les cas ,forcément P ≠ 1.

(exemple si m=1 & h=1 , P avec 1 terme pair et 1 terme impair $= \frac{3^1}{2^1} (1+\frac{1}{1}). 2 = 6 \neq \mathbf{1}$)

Ce qui vérifie que $\neg C \Rightarrow \neg A$ est toujours Vraie, donc $(A \wedge B) \Rightarrow C$ est Vraie également. Sachant par la proposition III que l'implication $C \Rightarrow (A \wedge B)$ est vrai aussi :

> PROPOSITION IV :
>
> ∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers **1** ⟺ ($2^h > 3^m$ et $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) **[8]**

Vérifiant maintenant qu'il n'existe aucun cycle de longueur k, ∀ k>3 ∈N :

P étant le produit des termes de la suite de Collatz

Soit P = $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots ck$ **[1]**

P = $a_1. a_2 \dots a\,m \quad .b_1.b_2 \dots bh$ **[2]**

P= $(3a_1+1). (3a_2+1)\dots (3am+1). (b_1)/2. (b_2)/2\dots (bh)/2.$ **[3]**

Et $\mathbf{2^h} = (3+ \frac{1}{a1}).\left(3 + \frac{1}{a2}\right)\dots\left(3 + \frac{1}{am}\right)$ **[4]**

Sachant par la PROPOSITION I , que le dernier terme Ck de la suite de Collatz est toujours <u>impair</u> soit k ∈ N (k : longueur du cycle de la suite .) :

> . Supposons que Ck un nombre entier positif impair ≤ ($3a_m+1$) qui définit un cycle de longueur k > 3.

Preuve :

le produit P final des termes de cette supposé suite soit = Ck

et Ck se trouve dans le produit = à l'un des termes impairs de ce produit.

$\Rightarrow$ $(3a_1+1).(3a_2+1)\ldots Ck\ldots(3am+1).(b_1)/2.(b_2)/2\ldots(bh)/2. = Ck$ [3]

$\Rightarrow$ $(3a_1+1).(3a_2+1)\ldots Ck\ldots(3am+1).(b1.b2\ldots.bh)/2^h = Ck$

$\Rightarrow$ $(3a_1+1).(3a_2+1)\ldots Ck\ldots(3am+1).(b1.b2\ldots.bh)/Ck = 2^h$ [9]

D' après [4] , $2^h = \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots.\left(3+\frac{1}{am}\right)$

$\Rightarrow$ $$2^h = \left(\frac{(3a_1+1)}{a1}\right).\left(\frac{(3a_2+1)}{a2}\right)\ldots.\left(\frac{(3am+1)}{am}\right)$$

$\Rightarrow$ $$2^h = \left(\frac{1}{a1}\right).\left(\frac{1}{a2}\right)\ldots.\left(\frac{1}{am}\right).(3a_1+1).(3a_2+1)\ldots(3am+1).$$

$\Rightarrow$ $$2^h = \left(\frac{1}{(a1.a2\ldots.a\,m)}\right).(3a_1+1).(3a_2+1)\ldots(3am+1).$$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{(a1.a2\ldots.a\,m)}\right).(3a_1+1).(3a_2+1)\ldots(3am+1). = (3a1+1).(3a2+1)\ldots Ck\ldots(3am+1).(b1.b2\ldots.bh)/Ck$ [9]

$\Rightarrow$ $$\left(\frac{1}{(a1.a2\ldots.a\,m)}\right) = \left(\frac{(b1.\ b2\ldots.bh)}{Ck}\right)$$

$\Rightarrow$ $$\underbrace{(a1.a2\ \ldots.a\,m)}.\underbrace{(b1.\ b2\ldots.bh)} = Ck$$

D'où l'on tire que impair x paire = impair ?

$\Rightarrow$ **ABSURDE**

il n'existe aucun cycle de longueur k>3,et selon PROPOSITION II , ∃! Cycle trivial , d' ou :

PROPOSITION V $\forall n \in N^*$: ∃! Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1.

2)- *$\forall n \in N^*$, la suite de collatz décroit vers un n' / n' < n*

De ℕ, l'ensemble des entiers naturels, considéré comme suite croissante, on peut extraire 4 sous-suites , étant donné leurs coefficients directeur positifs , donc également croissantes sous forme de 4k+1 , 4k+2, 4k+3, et 4k+4 avec k ∈ à ℕ .

Si nous observons la transformation de Collatz sur ces 4 sous-suites nous constations :

1° - 4K+2 et 4k+4 tous deux pairs, après 1 ou 2 suites de divisions successives par 2 , finissent par décroitre : 4k+2 pair -> 2k+1 (2k+1 impair, **∀k ∈ N**) ->6k+4 ->**3k+2**; donc 3k+2< 4k+2

4k+ 4 pair -> 2k+2 - > **k+1** ; donc k+1 < 4k + 4

(En Sachant que la parité de k+1 ou 3k +2 dépend de la parité de k)

2° - 4k+1 est impair ⇒ 1^er^ étape : 3(4k+1) +1 = 12k+4 qui est pair

⇒ 2^er^ étape :(12k+4)/2 = 6k+2 qui est pair

⇒ 3^er^ étape :(6k+2)/2 = **3k+1** parité inconnue, mais nous constations que 4k+1 décroisse puisque 3k+1 < 4k+1

3° - 4K+3 est impair ⇒ 1^er^ étape : 3(4k+3) +1 = 12k+10 qui est pair

⇒ 2^er^ étape : (12k+10)/2 = 6k+5 qui est impair

⇒ 3^er^ étape : 3(6k+5) +1 = 18k+16 qui est pair

⇒ 4^er^ étape : (18k+16)/2 = **9k+8** parité inconnue, mais nous constations que 4k+1 croisse puisque 9k+8 > 4k+1

Démontrons dans un premier temps que tout nombre entier de la forme 4k+3 suivant la suite de Collatz pourrait se transformer en 4k+1 :

- ***Tout nombre impair peut s'écrire sous forme*** $2^p.x - 1$, ∀ p∈ N* **:**

∀ x ∈ N, le produit = x * une puissance de 2 est Pair, ôté de 1 est un nombre IMPAIR

- ***Tout nombre impair de forme 4k+1 peut s'écrire sous forme*** $2^p.x - 1$ ***avec p=1 ;(ou 2x – 1) :***

∀k∈ N, 4k+1 est impair, ∀ **x** ∈ N / 4k+1 = 2x – 1
Preuve : soit 4k+1 = I (impair)

$\mathrm{I} = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{\mathrm{I}+1}{2}$; comme $(\mathrm{I}+1)$est pair (somme de 2 impairs =pair)

Donc $(\mathrm{I}+1) = 2.m$ (m ∈ N*) ⇒ x est également un entier ∈ N*

- ***Tout nombre impair de forme 4k+3 peut s'écrire sous forme*** $2^p.x - 1$ ***avec p>1 , leurs proportion tend vers zéro quand p tend vers*** ∞***:***

∀k∈ N, 4k+3 est impair, ∃ **x** ∈ N / 4k+3 = $2^p.x - 1$

Preuve :

$4k+3 = 2^p.x - 1 \Rightarrow x = \frac{4k+4}{2^p}$

$\Rightarrow x = \frac{k+1}{2^{P-2}}$ (1)

Si dans (1) la proportion , selon étude de la récurrence, parmi les nombres de forme 4k+3 qui croissent est $P(4k+3) = \frac{1}{2^{P-2}}$ ⇒ la proportion des nombres de forme 4k+3 qui décroissent est égale au complémentaire de P(4k+3) , soit (1- $\frac{1}{2^{P-2}}$)qui bien entendu si on considère cette fois ci sur l'ensemble **N**, des entiers naturels, représente la proportion P(4k+1) =1 et P(4k+2)=1 et P(4k+4) =1 Et (1- $\frac{1}{2^{P-2}}$) ; c'est-à-dire Pr =(1- $\frac{1}{2^{P-2}}$) .1.1.1 =(1- $\frac{1}{2^{P-2}}$) représentant la proportion de tout les entiers suivants la transformation de Collatz , décroissants durant les premières étapes .soit

$$Pr = (1 - \frac{1}{2^{P-2}})$$

$$Pr = \frac{2^{P-2}-1}{2^{P-2}}$$

$$= \frac{4.2^{P-2}-4}{4.2^{P-2}}$$

$$Pr = \frac{2^{p}-4}{2^{p}}$$

nous constations enfin que P(4k+3) = $\frac{1}{2^{P-2}}$proportion des nombres qui croissent dans **N** suivant la suite de Collatz , le reste , c'est-à-dire Pr=$\frac{2^{p}-4}{2^{p}}$décroissant en suivant la transformation de Collatz dans **N** ,

nous vérifions que leurs somme est égale à l'unité :

$$\frac{2^{p}-4}{2^{p}} + \frac{1}{2^{P-2}} = \frac{2^{p}-4}{2^{p}} + \frac{4}{2^{P}} = \frac{2^{p}}{2^{p}} = 1$$

nous vérifions aussi que :

lim$\frac{1}{2^{P-2}}$quand p → ∞ est 0 (comme nous avions annoncé ci-dessus)

= =>lim$\frac{2^{p}-4}{2^{p}}$quand p → ∞ est 1 ; qui va dans le sens de ***∀x ∈N*, la suite de collatz décroit vers un x' / x' < x***

(ex : pour p=10,en appliquant les 2 formules, Pr = 99.60..% des nombres décroissent suivant la transformation de Collatz , alors que 0.40 % croissent,)

l'argument de la probabilité n'est point suffisant ,Il faudra alors que nous démontrons qu'un nombre impair de la forme 4k+3 peut par la suite de Collatz passer à la forme 4k+1 :

Appliquons la transformation de Collatz sur le nombre impair 4k+3 :

Soit le nombre N1= 4k+3 $= 2^{p}.x - 1$

Calculons N2 = (3N1 +1)/2 $= (3(2^{p}.x - 1) + 1)/2 = (3.2^{p}.x - 2)/2 = 3.2^{p-1}.x - 1$: 1°étape

N3 = (3N2 +1)/2 $= (3(3.2^{p-1}.x - 1) + 1)/2 = (3^{2}.2^{p-1}.x - 2)/2 = 3^{2}.2^{p-2}.x - 1$:2°étape

……Déduisons par récurrence le terme général de la suite ; Np = $3^{p-1}.2.x - 1$: (p-1) °étape

Finalement la puissance p, de 2 descend à 1 , le nombre prend donc la forme 2x'-1 ($x' = 3^{p-1}.x$),

Récapitulation :

- le nombre 4k+4 décr**oît** à k+1 au bout de 1 étape , la suite dépend de la parité de k
- le nombre 4k+2 décr**oît** à 3k+2 au bout de 2 étapes, la suite dépend de la parité de k
- le nombre 4k+1 décr**oît** à 3k+1 au bout de 3 étapes , la suite dépend de la parité de k
- le nombre 4k+3 cr**oît** à 9k+8 au bout de 4 étapes , la suite dépend de la parité de k

Démontrons respectivement que pour tout nombre de forme k+1 , 3k+2 , 3k+1 , 9k+8 ; il finit par décroitre ∀ la parité de k :

Les nombres (k+1) , (3k+2), (3k+1) et (9k+8) seront impairs si respectivement k est pair pour (k+1) et (3k+1) , ou k est impair pour les nombres (3k+2) et (9k+8) et inversement, ils seront pairs si k est impair pour (k+1) et (3k+1) , ou k est pair pour les nombres (3k+2) et (9k+8).

A) - soit P_1 , le produit de ces termes impairs

Optant pour un choix de parité de k , $\forall k \in N^*$, de façon à ce que tout les termes obtenus de la suite de Collatz à partir de ($A_1.k + B_1$) soient impairs et ne nécessitent que la multiplication par 3 ajouté à 1 de manière à ce que l'ordre suivi par la parité de k soit celui suivi dans N^* (impair-pair-impair… : 1,2,3….)

.

$$P_1 = (A_1.k + B_1).(3 (A_1.k + B_1) +1) .(3 (A_1.k + B_1) +1)+1) \ldots (A_m.k + B_m)$$

Pour 3k+1 impair :

$$P_1 = (3.k +1). (3 (3.k +1)+1) .(3 (3 (3.k +1)+1)+1).(3(3 (3 (3.k +1)+1) +1) +1) \ldots . (A_m.k + B_m)$$

$$= (3.k +1).(9 k +4) (27.k + 13) (81.k +40) \ldots (A_m.k + B_m)$$

Nous remarquons que les ($A_m.k$) progressent par rapport à m de $\mathbf{3^{m+1}}$

tandis que les (B_m) s'expriment selon la somme S , d'une suite géométrique $\mathbf{3^{m+1}}$

$$\mathbf{U_0 = 1}, \quad S = \mathbf{3^0 + 3^1 + 3^2 \cdots + 3^m}$$

$$3S = \mathbf{3^1 + 3^2 + 3^3 \cdots + 3^{m+1}}$$

$$3S - S = \mathbf{3^{m+1}} + (\mathbf{3^m} - \mathbf{3^m}) + \ldots + (\mathbf{3-3}) - 1 = \mathbf{3^{m+1} - 1}$$

$$S = \frac{\mathbf{3^{m+1}-1}}{\mathbf{3-1}}$$

D'ou l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transfomation du Collatz $P_1 = \mathbf{3^{m+1}}.k + \frac{\mathbf{3^{m+1}-1}}{\mathbf{2}}$.

pour 3k+2 pair :

$P_1 = (3.k + 2). (3 (3.k +2)+1) .(3 (3 (3.k +2)+1)+1).(3(3 (3 (3.k +2)+1) +1) +1) \ldots . (A_m .k +B_m)$

$= (3.k +1).(9 k + 7) (27.k+ 22) (81.k +67) \ldots (A_m .k +B_m)$ (1)

Nous remarquons que les $(A_m .k)$ progressent par rapport à m de 3^{m+1}

tandis que les (B_m) s'expriment selon la somme S , d'une suite géométrique 3^{m+1}

avec $U_0 = 5$, $S = 5 (3^0 + 3^1 + 3^2 \cdots + 3^m)$

$$S = 5.\left(\frac{3^{m+1}-1}{3-1}\right)$$

les premiers termes en (1) donne 5 , 20 , 65 ,200 ... en ajoutant à chaque fois 2

nous retrouvons la suite de nos B_m : 7 , 22 , 67 ,202 ...

D'ou l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transfomation du Collatz $P_1 = 3^{m+1} .k +2+5(\frac{3^m-1}{2})$

Pour k+1 pair :

$P_1 = (k +1). (3 (.k +1)+1) .(3 (3 (.k +1)+1)+1).(3 (3 (.k +1)+1) +1) \ldots . (A_m .k +B_m)$

$= (.k +1).(3 k +4) (9.k+ 13) (27.k +40) \ldots (A_m .k +B_m)$

Nous remarquons que les $(A_m .k)$ progressent par rapport à m de 3^m

tandis que les (B_m) s'expriment selon la somme S , d'une suite géométrique 3^{m+1}

$U_0 = 0$,

D'ou l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transfomation du Collatz $P_1 = 3^m .k + \frac{3^{m+1}-1}{2}$

Pour 9k+8 impair:

$P_1 = (9.k + 8). (3 (9.k +8)+1) .(3 (3 (9.k +8)+1)+1).(3(3 (3 (9.k +8)+1) +1) +1) \ldots . (A_m .k +B_m)$

$= (9.k +8).(27 k + 25) (81.k+ 76) (243.k +229) \ldots (A_m .k +B_m)$ (1)

Nous remarquons que les $(A_m .k)$ progressent par rapport à m de 3^{m+2}

tandis que les (B_m) s'expriment selon la somme S , d'une suite géométrique 3^{m+1}

avec $U_0 = 17$, $S = 17 (3^0 + 3^1 + 3^2 \cdots + 3^m)$

$$S = 17.\left(\frac{3^{m+1}-1}{3-1}\right)$$

les premiers termes en (1) donne 17 , 68 , 221 ,680 ... en ajoutant à chaque fois 8

nous retrouvons la suite de nos B_m : 25 , 76 , 229 ,202 ...

D'ou l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transfomation du Collatz $P_1 = 3^{m+2} .k +8+17(\frac{3^{m+1}-1}{2})$

$(A_i.k + B_i)$	**3k +1**	**3k+2**	**k+1**	**9k+8**
i = 1	9k+4	9k+7	3k+4	27k+25
i = 2	27k+13	27k+22k	9k+13	81k+76
i = 3	81k+40	81k+67	27k+40	243k+229
i = 4	243k+121	243k+202	81k+121	729k+688
""	""	""	""	""
""	""	""	""	""
""	""	""	""	""
i = m	$3^{m+1}.k + \frac{3^{m+1}-1}{2}$	$3^{m+1}.k + 2 + 5(\frac{3^{m}-1}{2})$	$3^{m}.k + \frac{3^{m+1}-1}{2}$	$3^{m+2}.k + 8 + 17(\frac{3^{m+1}-1}{2})$

B) - soit P_2 , le produit de ces termes pairs

Optant pour un choix de parité de k , ∀ k ∈ N , de façon à ce que tout les termes obtenus de la suite de Collatz à partir de* $(A_m.k + B_m)$ *qui est le dernier terme impair vu en* **A)**
Dont nous remarquions que selon l'ordre de parité de k, $(A_m.k + B_m)$ marque une altitude maximale quand il devient une puissance de 2 garantissant un atterrissage vers 1

$$P_2 = (A_m.k + B_m)/2.\ (A_m.k + B_m)/2^2 \ldots (A_m.k + B_m)/2^h$$

$$P_2 = \frac{(A_m.k + B_m)}{2^h}$$

Qui pour **3k +1** pair et k impair, $P_2 = \dfrac{3^{m+1}.k + \frac{3^{m+1}-1}{2}}{2^h}$

pour **3k +2** pair et k pair, $P_2 = \dfrac{3^{m+1}.k + 2 + 5(\frac{3^{m}-1}{2})}{2^h}$

pour **k +1** pair et k impair $P_2 = \dfrac{3^{m}.k + \frac{3^{m+1}-1}{2}}{2^h}$

Qui pour **9k +8** pair et k pair, $P_2 = \dfrac{3^{m+2}.k + 8 + 17(\frac{3^{m+1}-1}{2})}{2^h}$

C) - soit P, le produit de tous les termes de notre suite

Nous avons « découvert » que la parité de k suit l'ordre propre de N (1,2,3,4,5….= i,p,i,p,i,p…)*
Notre choix se limite au premier terme impair dont le produit P=P1. P2 qui nécessite P1 et P2 , d'abord P1 des termes impairs , ensuite P2 selon l'ordre i,p,i,p,i,p…(la parité de k dans k+1 , 3k+2 , 3k+1 , 9k+8 , suit également cet ordre i,p,i,p,i,p dans leurs termes) .

P = ($A_{1.k}$ +B_1).(3 ($A_{1.k}$ +B_1) +1).(3 ($A_{1.k}$ +B_1) +1)+1)..($A_{m.k}$ +B_m)/2...($A_{m.k}$ +B_m)/4...($A_{1.k}$ +B_1)/ $\boldsymbol{2^h}$

- pour **3k +1** : $P = (\boldsymbol{3^{m+1}}.k + \frac{\boldsymbol{3^{m+1}-1}}{\boldsymbol{2}}).(\frac{\boldsymbol{3^{m+1}}.k+\frac{\boldsymbol{3^{m+1}-1}}{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2^h}})$

$= (\boldsymbol{3^m}\ 3.k + \frac{\boldsymbol{3^m}\cdot 3}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}).(\frac{\boldsymbol{3^{m+1}}.k+\frac{\boldsymbol{3^{m+1}-1}}{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2^h}})$

$P = \frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}}(3.k + \frac{3}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\ .\ 3^m}}).(\boldsymbol{3^{m+1}}.k + \frac{\boldsymbol{3^{m+1}-1}}{\boldsymbol{2}})$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P =1 :

$$\frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}}(3.k + \frac{3}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\ .\ 3^m}}).(\boldsymbol{3^{m+1}}.k + \frac{\boldsymbol{3^{m+1}-1}}{\boldsymbol{2}}) = 1$$

$$\frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}} \quad X\ Q1 \quad X\ Q2 \quad = 1$$

Q1 = $(3.k + \frac{3}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\ .\ 3^m}})$ $\mathit{est\ toujours} > 1$ (pour m=1 & k=o ⇒ Q1= 4/3 minimum)

Q 2 =($\boldsymbol{3^{m+1}}.k + \frac{\boldsymbol{3^{m+1}-1}}{\boldsymbol{2}}$) $\mathit{est\ toujours} > 1$ (pour m=1 & k=o & ⇒Q2= 4 minimum)

Pour que l'équation ($\frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}}$ X Q1 X Q2 = 1) forcément $\frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}} < 1$

$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}} < 1 \Rightarrow \boldsymbol{3^m} < \boldsymbol{2^h} \Rightarrow \boldsymbol{2^h} > \boldsymbol{3^m}$

$\boldsymbol{2^h} > \boldsymbol{3^m} \Rightarrow h \log 2 > m \log 3 \Rightarrow \frac{m}{\boldsymbol{h}} < \frac{\log 2}{\boldsymbol{log3}}$ (m & h ∈ N*)

($\boldsymbol{2^h} > \boldsymbol{3^m}$) et ($\frac{m}{\boldsymbol{h}} < \frac{\log 2}{\boldsymbol{log3}}$) ⟺ ∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION IV .

- pour **3k +2** $P = \boldsymbol{3^{m+1}}.k + 2 + 5(\frac{\boldsymbol{3^m-1}}{\boldsymbol{2}}).(\frac{\boldsymbol{3^{m+1}}.k+2+5(\frac{\boldsymbol{3^m-1}}{\boldsymbol{2}})}{\boldsymbol{2^h}})$

$= (\boldsymbol{3^m}\ 3.k + \boldsymbol{3^m}.\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3^m}} + \boldsymbol{3^m}(\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2.3^m}}).(\frac{\boldsymbol{3^{m+1}}.k+2+5(\frac{\boldsymbol{3^m-1}}{\boldsymbol{2}})}{\boldsymbol{2^h}}$

$P = \frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}}(3.k + \frac{4}{\boldsymbol{2\ .\ 3^m}} + \frac{5}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2\ .\ 3^m}}).(\boldsymbol{3^{m+1}}.k + 2 + 5(\frac{\boldsymbol{3^m-1}}{\boldsymbol{2}}))$

$P = \frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}}(3.k - \frac{3}{\boldsymbol{2\ .\ 3^m}} + \frac{5}{\boldsymbol{2}}).(\boldsymbol{3^{m+1}}.k + 2 + 5(\frac{\boldsymbol{3^m-1}}{\boldsymbol{2}})$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P =1 :

$$\frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}}(3.k - \frac{3}{\boldsymbol{2\ .\ 3^m}} + \frac{5}{\boldsymbol{2}}).(\boldsymbol{3^{m+1}}.k + 2 + 5(\frac{\boldsymbol{3^m-1}}{\boldsymbol{2}})) = 1$$

$$\frac{\boldsymbol{3^m}}{\boldsymbol{2^h}} \quad X\ Q1 \quad X\ Q2 \quad = 1$$

Q1 = $(3.k - \frac{3}{\boldsymbol{2\ .\ 3^m}} + \frac{5}{\boldsymbol{2}})$ $\mathit{est\ toujours} > 1$ (pour m=1 & k=o ⇒ Q1= 2 minimum)

Q 2 =($3^{m+1}.\mathrm{k} + 2 + 5(\frac{3^m-1}{2})$) *est toujours* $\geqslant$ 1 (pour m=1 & k=o & ⇒Q2= 7 minimum)

Pour que l'équation ($\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1) forcément $\frac{3^m}{2^h} < 1$

$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$

$2^h > 3^m \Rightarrow \mathrm{h}\ \log 2 > \mathrm{m} \log 3 \Rightarrow \frac{\mathrm{m}}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ (m & h ∈ N*)

($2^h > 3^m$) et ($\frac{\mathrm{m}}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) ⟺ ∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION IV .

<u>- pour **k +1**</u> : P $= 3^m.\mathrm{k} + \frac{3^{m+1}-1}{2}.\left(\frac{3^m.\mathrm{k}+\frac{3^{m+1}-1}{2}}{2^h}\right)$

$= \left(3^m \mathrm{k} + \frac{3^m \cdot 3}{2} - \frac{1}{2}\right).\left(\frac{3^m.\mathrm{k}+\frac{3^{m+1}-1}{2}}{2^h}\right)$

P $= \frac{3^m}{2^h}\left(\mathrm{k} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2\ .\ 3^m}\right).\left(3^m.\mathrm{k} + \frac{3^{m+1}-1}{2}\right)$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P =1 :

$$\frac{3^m}{2^h}\left(\mathrm{k} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2\ .\ 3^m}\right).\left(3^m.\mathrm{k} + \frac{3^{m+1}-1}{2}\right) = 1$$

$$\frac{3^m}{2^h} \quad \text{X Q1} \qquad \text{X Q2} \qquad = 1$$

Q1 = ($3.\mathrm{k} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2\ .\ 3^m}$) *est toujours* > 1 (pour m=1 & k=o ⇒ Q1= 4 minimum)

Q 2 =($3^m.\mathrm{k} + \frac{3^{m+1}-1}{2}$) *est toujours* $\geqslant$ 1 (pour m=1 & k=o & ⇒Q2= 4 minimum)

Pour que l'équation ($\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1) forcément $\frac{3^m}{2^h} < 1$

$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$

$2^h > 3^m \Rightarrow \mathrm{h}\ \log 2 > \mathrm{m} \log 3 \Rightarrow \frac{\mathrm{m}}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ (m & h ∈ N*)

($2^h > 3^m$) et ($\frac{\mathrm{m}}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) ⟺ ∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION IV .

<u>- pour **9k +8**</u> P $= 3^{m+2}.\mathrm{k} + 8 + 17\left(\frac{3^{m+1}-1}{2}\right).\left(\frac{3^{m+2}.\mathrm{k}+8+17\left(\frac{3^{m+1}-1}{2}\right)}{2^h}\right)$

$= 3^m\ 9.\mathrm{k} + 3^m.\frac{8}{3^m} + 3^m.\left(\frac{51}{2} - \frac{17}{2.3^m}\right).\left(\frac{3^{m+2}.\mathrm{k}+8+17\left(\frac{3^{m+1}-1}{2}\right)}{2^h}\right)$

P $= \frac{3^m}{2^h}\left(9.\mathrm{k} + \frac{16}{2\ .\ 3^m} + \frac{51}{2} - \frac{17}{2\ .\ 3^m}\right).\left(3^{m+2}.\mathrm{k} + 8 + 17\left(\frac{3^{m+1}-1}{2}\right)\right)$

P $= \frac{3^m}{2^h}\left(9.\mathrm{k} - \frac{1}{2\ .\ 3^m} + \frac{51}{2}\right).\left(3^{m+2}.\mathrm{k} + 8 + 17\left(\frac{3^{m+1}-1}{2}\right)\right)$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P =1 :

$$P = \frac{3^m}{2^h}\left(9.k - \frac{1}{2\ .\ 3^m} + \frac{51}{2}\right).\left(3^{m+2}.k + 8 + 17\left(\frac{3^{m+1}-1}{2}\right)\right) = 1$$

$$\frac{3^m}{2^h} \quad X\ Q1 \qquad\qquad X\ Q2 \qquad\qquad = 1$$

Q1 = $\left(9.k - \frac{1}{2\ .\ 3^m} + \frac{51}{2}\right)$ *est toujours* $>$ 1 (pour m=1 & k=o ⇒ Q1= 76 /3 minimum)

Q 2 =$\left(3^{m+2}.k + 8 + 17\left(\frac{3^{m+1}-1}{2}\right)\right)$ *est toujours* $\geqslant$ 1 (pour m=1 & k=o & ⇒Q2= 76 minimum)

Pour que l'équation ($\frac{3^m}{2^h}$ X Q1 X Q2 = 1) forcément $\frac{3^m}{2^h} < 1$

$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$

$2^h > 3^m \Rightarrow h\ \log 2 > m \log 3 \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ (m & h ∈ N*)

($2^h > 3^m$) et ($\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$) ⇔ ∀ n ∈ N* ; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION IV .

Conclusion :* ∀*n* ∈*N*, la suite de collatz décroit vers un n' / n' < n

Nous remarquions que 4k+3 en passant à 4k+1, ce dernier reste supérieur à 4k+3 ,comme nous le montrons :

$$2^p.x - 1 < 3^{p-1}.2.x - 1 \Rightarrow 2^p. < 3^{p-1}.2 \Rightarrow 2^{p-1} < 3^{p-1}$$ Ce qui est évident

Nous avons vu en 1° que les formes 4k+2 et 4k +4 finissent par décroitre mais nous remarquions que le processus est plus évident dans la forme 4k+4 que dans la forme 4k+2

Parce que seuls les 4k+4 contiennent les puissance de 2 (P2) qui garantissent un trajectoire sùr vers 1 suite à des divisions successives par 2 , mais il ya aussi des non- P2 dans 4k+4 et seulement des non P2 dans la forme 4k+2 .(selon études des 2 suites.)

En ce qui concerne les 4k+1 et les 4k+3 , si 4k+1 décroit au bout de trois étapes et durant la transformation de Collatz, les 4k+3 finissent par se transformer en 4k+1 et décroitre rien nous garantit que ce dernier 4k+1 , reste dans cette forme et décroit vers 1 ,car le processus de la transformation est en réalité « réciproque » comme le montre cette exemple du nombre 19 de forme 4k+3 (4*4+3) génère dans la trajectoire 29 de forme 4k+1 (4*7 +1) qui donne 11 de forme 4k+3 (4*2+3), qui donne à son tour un 4k+1 : 17 (puis 13, puis 5 qui reste le dernier 4k+1 de la suite de Collatz si bien *sur* 32 ne prend pas sa place dans un autre $x \in N^*$.

19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1

Nous constations que la décroissance de 4k+2 et 4k+4 est acquise , et si du fait de la réciprocité du passage de la forme 4k+3 à 4k+1, nous considérons qu'ils se transforment entre eux équitablement ;

Nous concluons que dans plus des ¾ des cas , la tendance est à la décroissance, il nous reste que de trouver le moyen de suivre le vol et de démontrer effectivement qu'ils terminent dans le cycle trivial c'est que nous essayons de faire dans la 3° partie qui suit.

3)- $\forall x \in N^*$, la suite de collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1 , est le plus petit élément.

PROPOSITION –VI

$$\forall x \text{ impair} \in N, \forall n \in N^* ; \exists! x \ / \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi = x \text{ ; soit } xi = 1$$

preuve :

Soit Un ; la suite des nombres impairs ; $\forall$ n$\in$ N , Un = 2n +1 (x_1=U_1=1 ; x_2=U_2=3 ; x_3=U_3=5 ; x_4=U_4=7 ...).

Soit Vn = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_n$; V1= $(\frac{U(1)}{1})$= 1: V2= $\frac{(U1+U2)}{2}$= 2 ; V3= $\frac{(U1+U2+U3)}{3}$= 3 ;

V4=$\frac{(U1+U2+U3+U4)}{4}$=4$\Rightarrow$ .... Par récurrence, déduisons sa formule explicite Vn = n

n < 2n+1 $\Leftrightarrow$Vn< Un et Vn = Un ssi n=1 c à d xi impair = 1 ; d'où la proposition II.

PROPOSITION –VII

Dans N,l'ensemble des entiers naturels ; il ya autant de nombre pairs que d'impairs

Preuve :

Soit la formule du binome de Newton $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$

Avec a = 1 & b = 1 ; $\exists$ M parties de l'ensemble E / M = $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ $\Rightarrow$ M = (1 + 1)^n = 2^n

Soit Mp le nombre de parties de cardinal pair : Mp = $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6}$ ...= $\sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p}$

Soit Mi le nombre de parties de cardinal impair dont la somme est comptée jusqu'au dernier impair inferieur à n : Mi = $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots\ldots = \sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1}$;

Avec a = 1 & b =- 1 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}\ldots-\binom{n}{1}-\binom{n}{3}-\binom{n}{5}-\ldots$

parce que $(-1)^k$ = 1 si k est pair et $(-1)^k$ = -1 signe négative qui affecte Mi

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1}$$

Comme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$

$\Rightarrow \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1} = 0$; *on déduit que* $\sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p} = \sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1}$

⇒ **Le nombre de sous-parties de cardinal pair = nombre de sous-parties de cardinal impair**

La suite de Collatz peut être présenté sous un produit en spécifiant les nombres impairs (a_1, a_2,...am) et les nombres pairs (b_1. b_2 ....bh) ; encore une fois, selon deux formes de produits P1, puis P2 exprimé suivant la transformation de Collatz. m et h étant respectivement le cardinal des nombres impairs et pairs. (m & h $\in \mathbb{N}^*$)

P2 = a_1. a_2 ….a m . b_1. b_2 ….bh

P1 = (3a_1+1). (3 a_2+1)…. (3 am+1). (b_1)/2. (b_2)/2… (bh)/2

Utilisant encore une fois l'équation associée à ce produit sous sa forme brute

$$(\mathbf{a1}.\mathbf{a2}\ \ldots.\mathbf{a\,m})\ .\mathbf{b1}.\ \mathbf{b2}\ \ldots.\mathbf{bh}=(\mathbf{3a1+1}).(\mathbf{3\,a2+1})\ldots.(\mathbf{3\,a\,m+1}).\quad(\mathbf{b1})/\mathbf{2}.(\mathbf{b2})/\mathbf{2}\ldots(\mathbf{bh})/\mathbf{2}$$

$$(\mathbf{a1}.\mathbf{a2}\ \ldots.\mathbf{a\,m})\ .\mathbf{b1}.\ \mathbf{b2}\ \ldots.\mathbf{bh}=\frac{(\mathbf{3a1+1}).(\mathbf{3\,a2+1})\ldots.(\mathbf{3\,a\,m+1}).\quad(\mathbf{b1}).(\mathbf{b2})\ldots(\mathbf{bh})}{\mathbf{2\hat{}h}}$$

$$2^h = \frac{(\mathbf{3a1+1}).(\mathbf{3a2+1})\ldots.(\mathbf{3am+1}).}{(\mathbf{a1}.\mathbf{a2}\ \ldots.\mathbf{am}).}$$

$$2^h = \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$$

Or $2^h < 3^m < \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$

$\Rightarrow 2^h < \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$

Remplaçons les* ai *par La « moyenne arithmétique » défini sur m ⇒ $M = \sum_{i=1}^{m} \frac{ai}{m}$

M > 0 ⇒ $2^h < (3+\frac{1}{M}).\left(3+\frac{1}{M}\right) \ldots (3+\frac{1}{M})$ **m fois**

⇒ $2^h < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^m$

- *Supposons un nombre* $x \in N^*$ *infiniment grand dont la trajectoire par la transformation de Collatz, puise dans tous les nombres pairs et impairs, comme selon la proposition VII, il y aura autant de pair que d'impair, on pose donc m=h*

$$2^h < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^h \text{ ou } 2^m < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^m$$

- *Appliquons le théorème des fonctions réciproques, c'est-à-dire :*

∀ x ∈ N* , si x est positif et $x = y^n \Leftrightarrow y = \sqrt[n]{y^n}$ est <u>unique</u>.

Utilisant la racine nième jusqu'à m ou h, pour arriver au supposé dernier terme de la trajectoire parti d'un grand nombre infini :

$$\sqrt[m]{2^m} < \sqrt[m]{\left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^m} \text{ Ou } \sqrt[h]{2^h} < \sqrt[h]{\left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^h}$$

$$2 < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right).$$

- soit un nombre quelconque K qui puisse égaliser notre inéquation

$$2 + k = \frac{3M+1.}{M}$$
$$2M + kM = 3M + 1$$
$$kM - M = 1$$

M (k – 1) = 1 ⇒ admet comme solutions : <u>M=1 & k=2</u>(∈ **N***)

Comme**, suivant proposition II :** *∃! M ∈* ***N*/ M=***$\sum_{i=1}^{m} \frac{ai}{m} = ai$ *soit ai = 1,* et comme M= 1 donc ai, le dernier terme impair est <u>connu</u> soit ai = 1.

Notre équation épurée et simplifiée devient : $4 = \frac{3ai+1.}{ai}$, observons des 2 cotés :

<u>Du coté droit</u>, l'équation garde les nombres ai impairs, avec ai dernier terme =1

Démonstration :

Si ai = 1 est seulement premier terme de la suite de Collatz, sa transformation est celle qui concerne le cycle trivial : 1->4->2->1, nous constations aussi que c'est aussi le dernier terme ai=1, qui est en même temps le plus petit élément impair, du cycle trivial. (Suivant proposition I).

Si ai est dernier terme impair > 1 ⇒ l'équation $4 = \frac{3ai+1.}{ai}$,devient impossible puisque :

$$4 > \frac{3ai+1.}{ai} \Rightarrow 4 > 3 + \frac{1.}{ai} \text{ si ai} > 1$$

Donc ai est forcémént le dernier terme impair de la suite =1 CQFD

Du coté gauche : partant d'une puissance de 2 très grande et arrivant au dernier terme La racine nième qui colle à la trajectoire de la suite, s'arrête dans notre équation à 4 Le reste est pris en charge finalement par le cycle trivial, par 4 ou par 1, **∀x pair ou impair ∈ N***du départ.
Nous avons 4 =$\boldsymbol{2^2}$=$\boldsymbol{2^h}$, h = 2 étant le cardinal des nombres pairs dans ce dernier terme pair de la suite, nous connaissons déjà un : c'est 4 nous déduisons forcément le deuxième élément pair du cycle trivial : 2, solution aussi de l'équation avec 1 et passage obligé de 4 à 1 par la transformation de Collatz.

Conclusion finale :

Comme ∃! Cycle trivial dans la suite de COLLATZ(1)⇒∀ n ∈ N*, n décroisse suivant la transformation de COLLATZ (2),atterri forcément dans le cycle trivial dont 1 son plus petit élément. (3)

CQFD

CASABLANCA LE 01.12.2015
BERKOUK MOHAMED, émail :bellevue-2011@hotmail.com
Mohamed.berkouk@aei-maroc.ma

Référence :

J.P- Delahaye - Christian Lasou- UST- Licence S.T -2007.
- ShalomEliahou,problème 3n+1 : y a-t-il des cycles non triviaux ? –I.des math-2011.
-Luc-Olivier Pochon & Alain Favre ; version du 13 juillet 2017