Нетривиальное неархимедово расширение вещественных чисел.

Черных Илья

Вопрос о сравнении бесконечных множеств.

Интуитивно понятно, что множество чётных чисел «меньше» множества целых чисел, поскольку целые состоят из чётных и нечётных. Интуитивно понятно, что множество неотрицательных целых чисел «меньше» множества положительных целых чисел, поскольку включает на 1 число больше.

Канторовский метод сравнения бесконечных множеств (кардиналы) не подходит, потому что он основан на попарном соответствии элементов. Кардинальность всех вышеперечисленных множеств будет равна по Кантору.

Поэтому предлагается другой метод сравнения множеств. Этот метод работает только на множествах с нормой (предпочтительно, в метрических пространствах). Он основан на расширении действительных чисел с помощью «расширенных чисел». Расширенные числа состоят из чисто расширенной части и стандартной части (которая является обычным вещественным числом). Тут аналогия с комплексными числами.

Если мы обозначим меру множества целых чисел как 2τ, то мера чётных чисел, как и нечётных будет τ, а вот разделить целые числа на правую и левую части пополам не получится, потому что посередине находится 0. Поэтому, одна часть будет больше другой на 1. Таким образом, мы обозначим меру целых положительных чисел как $\omega_- = \tau - 1/2$, а меру целых неотрицательных чисел как $\omega_+ = \tau + 1/2$, так что $\omega_- + \omega_+ = 2\tau$.

Забегая вперёд я скажу, что мы постулируем, что τ- чисто расширенное число. Тогда выходит, что стандартная часть ω_- равна -1/2, а стандартная часть ω_+ равна 1/2.

Можно определить некоторые операции над множествами, которые не изменяют их меру, например, перемещение конечного количества элементов по числовой оси. Но более подробно об этом далее.

Связь с расходящимися рядами.

Если элементы множества находятся в точках, соответствующих натуральным числам, мы можем совершенно естественным образом задать соответствие между мерой такого множества и суммой ряда, под знаком суммы которого находится функция членства данного множества (1 если натуральное число входит в данное множество и 0 если нет). Таким образом, мы можем сопоставить ряд (возможно, расходящийся) любому подмножеству натуральных чисел. В частности,

$$\omega_- = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

$$\omega_+ = \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

Как оказалось (и это потрясающий результат), стандартная часть меры таких множеств равна обобщенной сумме (по Рамануджану, зета-регуляризации или другим совместимым с ними методом) данного расходящегося ряда. В частности, вышеперечисленные ряды имеют суммы Рамануджана -1/2 и 1/2 соответственно.

Мы можем расширить наше определение, рассматривая не просто множества, а множества взвешенных точек. Стандартная часть меры такого множества также будет выражаться суммой ряда. **Таким образом, раскрылось алгебраическое значение обобщённых сумм расходящихся рядов.**

Более того, если мы определим произведение мер как декартово произведение множеств и применим лексикографический порядок, мы получим стандартную часть результата, выражаемую числами Бернулли:

$$\operatorname{st}\omega_-^n = B_n$$

$$\operatorname{st}\omega_+^n = B_n^*$$

где B_n^* - вторые числа Бернулли (у которых $B_1^* = 1/2$).
Это потрясающее соотношение, оно открывает алгебраическую роль чисел Бернулли. Они являются стандартной частью степеней этих двух особых элементов!

Это особенно важно, потому что очень многие ряды используют числа Бернулли, таким образом, суммы этих рядов можно выразить как стандартные части. Имея два ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos z$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k} z^{2k-1}}{(2k)!} = \cot z, |z| < \pi$$

мы можем получить соотношение:

$$\operatorname{st}\cos(z\omega_-) = \operatorname{st}\cos(z\omega_+) = \frac{z}{2}\cot\left(\frac{z}{2}\right), |z| < \pi$$

Из определения чисел Бернулли также следует:

$$e^{z\omega_-} = \frac{z}{e^z - 1}$$

Одной из формул, использующих числа Бернулли является формула Фаулхабера для суммирования Рамануджана:

$$\sum_{n\geq 1}^{R} f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n-1)}(0)}{n!} B_n(1)$$

По сути, она является рядом Тейлора для стандартной части интеграла функции $f(x)$. Мы получаем следующее соотношение:

$$f'(\omega_- + z) = \operatorname{st} \Delta f(z)$$

Данное соотношение позволяет нам найти стандартную часть любой функции от нестандартного числа.

В частности, мы можем теперь записать формулу для стандартной части любых стандартных степеней особых элементов, эта формула выражается через зета-функцию Гурвица, раскрывая её алгебраическую роль:

$$\operatorname{st}(\tau + y)^x = -x\zeta(1 - x, 1/2 + y)$$

и, в частности,

$$\operatorname{st} \omega_-^x = -x\zeta(1 - x, 0)$$

$$\operatorname{st} \omega_+^x = -x\zeta(1 - x, 1) = -x\zeta(1 - x)$$

$$\operatorname{st}(\omega_- + z)^n = B_n(z)$$

где $B_n(z)$ - многочлены Бернулли.

Мы видим, что зета-функция по сути является стандартной частью экспоненциальной функции.

Более того, постулируя равенство ряда для зета-функции и соответствующей ей степени ω_-, мы можем получить выражения для расходящихся рядов (для случая $n > 0$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^n = -\frac{\omega_-^{n+1}}{n+1}$$

Особым случаем данного соотношения будет

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x+1} = -\ln \omega_+$$

Симметрии.

Мы можем наблюдать соотношения между стандартными частями степеней особых элементов:

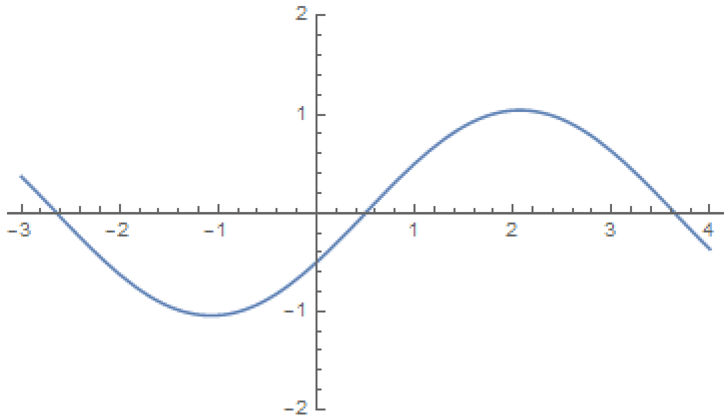
$$\operatorname{st} \omega_-^x = \operatorname{st} \omega_+^x, x > 1$$

$$\operatorname{st} \tau^x = \operatorname{st} \omega_+^x (2^{1-x} - 1)$$

Таким образом, стандартные части степеней ω_- и ω_+, превосходящих 1, совпадают. Это отражает глубокую симметрию между этими двумя особыми элементами.

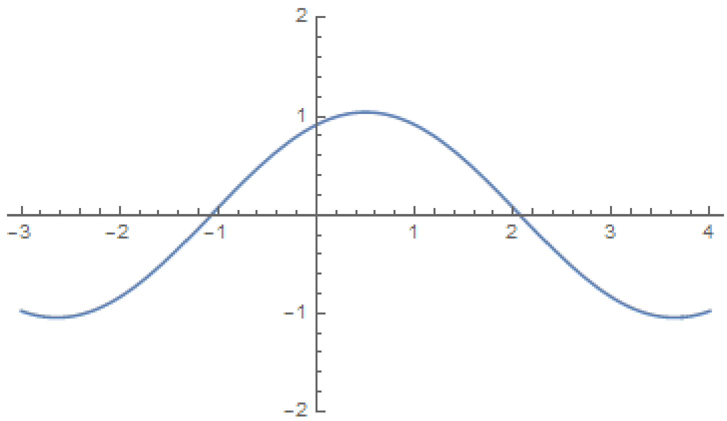
Мы можем получить выражения для стандартных частей элементарных функций от особых элементов:

$$\operatorname{st}\sin(a\omega_- + x) = \frac{a}{2}\cot\left(\frac{a}{2}\right)\sin x - \frac{a}{2}\cos x$$



Мы видим, в частности, что $\operatorname{st}\sin\omega_+ = 1/2$, $\operatorname{st}\sin\omega_- = -1/2$, $\operatorname{st}\sin\tau = 0$

$$\operatorname{st}\cos(a\omega_- + x) = \frac{a}{2}\csc\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2} - x\right)$$



С другой стороны,

$$\operatorname{st}\ln(\omega_- + z) = \psi(z)$$

где $\psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ - дигамма-функция. Мы видим, что данная функция имеет полюс в точке 0, таким образом $\ln(\omega_-)$ не имеет смысла. А вот $\operatorname{st}\log(\omega_+) = -\gamma$, где γ - постоянная Эйлера-Маскерони.

Аналогичным образом мы видим, что на ω_- нельзя и делить. Более того, все отрицательные степени этого элемента не имеют смысла. Однако, вполне возможно делить на ω_+. Более того, благодаря функциональному уравнению Римана, позитивные и негативные степени ω_+ проявляют симметрию:

$$\operatorname{st}\omega_+^{-x} = \operatorname{st}\frac{-\omega_+^{x+1}2^x\pi^{x+1}}{\sin(\pi x/2)\Gamma(x)(x+1)}$$

Потрясающей особенностью данного соотношения, раскрывающей алгебраическую роль функционального уравнения Римана является то, что будучи примененным к ряду Тейлора почленно, оно превращает экспоненциальные функции в логарифмические и наоборот. Таким образом, мы можем записать соотношения между тригонометрическими или гиперболическими функциями и их обратными в закрытой форме:

$$\operatorname{st}\left(1-\cosh\left(2x\omega_+\right)\right) = \operatorname{st}\frac{x}{\pi}\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{\pi\omega_+}\right) = \operatorname{st}\frac{x}{\pi}\operatorname{arcoth}\left(\frac{\pi\omega_+}{x}\right) = 1 - x\coth(x)$$

$$\operatorname{st}\frac{z}{2\pi}\ln\left(\frac{\omega_+ - \frac{z}{2\pi}}{\omega_- + \frac{z}{2\pi}}\right) = \operatorname{st}\cos(z\omega_-) = \operatorname{st}\cos(z\omega_+) = \frac{z}{2}\cot\left(\frac{z}{2}\right)$$

Остаётся неясным, могут ли аналогичные соотношения быть получены без использования функции взятия стандартной части, и таким образом, связать логарифмическую и экспонециальную функции в том же духе, как формула Эйлера связывает тригонометрические функции с гиперболическими.

Выражение производной без операции предела.

Возвращаясь к формуле Фаулхабера и обращая внимание на то, что все целые позитивные степени ω_- и ω_+, кроме степени 1 равны, мы можем выделить коэффициент при степени 1. Этот коэффициент является производной:

$$f'(x) = \operatorname{st}(f(\omega_+ + x) - f(\omega_- + x)) = \operatorname{st}\Delta f(\omega_- + x)$$

Существуют и другие аналогичные формулы:

$$f'(x) = \operatorname{st}(f(\omega_+ + x) - f(-\omega_+ + x))$$

$$f'(x) = \operatorname{st}(f(-\omega_- + x) - f(\omega_- + x))$$

Данные соотношения позволяют выразить производную аналитической функции без использования понятия предела. Это в какой-то степени аналогично формуле для производной в нестандартном анализе Робинсона.

Если функция $f(x)$ нечётная, то $\operatorname{st} f(\omega_+) = -\operatorname{st} f(\omega_-) = \frac{1}{2}f'(0)$

Расходящиеся интегралы.

Поскольку мы можем выразить суммы расходящихся рядов в форме нестандартных чисел, возникает вопрос, можем ли мы сделать то же самое с расходящимися интегралами.

Мы постулируем, что любой интеграл вдоль оси, имеющей масштаб 1:1 к подинтегральной функции соответствует взвешенной точке, расположенной на расстоянии от начала координат, соответствующем центру масс криволинейной трапеции и с весом равным площади этой криволинейной трапеции.

Таким образом, мы можем установить взаимное соответствие между множествами взвешенных точек и интегралами.

В частности, $\int_a^b f(x)dx$ эквивалентен взвешенной точке с координатой $x = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$ и весом $p = \int_a^b f(x)dx$. В бесконечном случае мы получаем, разбивая интеграл на куски:

$$\int_0^\infty f(x) = \int_0^{p_0} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^\infty \int_{p_{k-1}}^{p_k} f(x)\,dx$$

где $p_k = \frac{\int_k^{k+1} xf(x)\,ds}{\int_k^{k+1} f(x)\,dx}$

В частности, мы видим, что

$$\int_{-1/2}^\infty dx = \sum_{k=0}^\infty 1 = \omega_+,$$

$$\int_{1/2}^\infty dx = \sum_{k=1}^\infty 1 = \omega_-,$$

так как данные интегралы соответствуют множествам точек в целых числах.

Более того, очевидно, что

$$\int_0^\infty dx = \omega_- + 1/2 = \tau$$

Тут возможно возражение, что интеграл слева получает совсем другое значение при замене переменной. Поэтому очень важно, что ось x имеет тот же масштаб, что и подынтегральная функция. Далее будем считать, что это условие выполняется для оси x

Таким образом, мы видим, что τ в вопросах, связанных с несобственными интегралами играет такую же важную роль, какую ω_- и ω_+ играют в вопросах, связанных с рядами.

Исходя из соответствия между интегралами и множествами мы можем найти значения некоторых несобственных интегралов, в частности,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\infty} x dx = -\frac{\omega_-^2}{2} - \frac{1}{24}$$

Кроме того, из нашего определения следует общее правило, что если функция $f(x)$ - периодическая и интеграл за период равен нулю, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$$

а если ещё и чётная, то

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0$$

В частности,

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx = 0$$

Важно обратить внимание, что в данном случае речь идёт не о стандартной части интеграла, а о точном значении.

Связь с распределениями и Дельта-функцией Дирака.

Существует интегральное определение Дельта-функции Дирака:

$$\delta(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xt) dt$$

При $x \neq 0$ значение интеграла равно нулю, в соответствии с нашим прежним результатом. Однако при $x = 0$ мы получаем

$$\delta(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dt$$

Если ось t имеет масштаб 1:1 по отношению к оси подынтегральной функции, данный интеграл эквивалентен $\frac{2\tau}{\pi}$.

Поскольку Дельта-функция является производной шаговой функции, мы можем прийти к выводу, что все производные шаговых функций в точке шага также могут быть представлены в виде расширенных чисел: размер шага определяет расширенную часть, а предел производной определяет стандартную часть. В частности,

$$\operatorname{sgn}'(0) = \frac{4\tau}{\pi}$$

Сравнение с другими неархимедовыми расширениями.

По сравнению с другими неархимедовыми расширениями действительных чисел (нестандартный анализ, гипервещественные числа, сюрвещественные числа, ординалы и т.д.), данное расширение является нетривиальным, так как производит нетривиальные соотношения между элементарными функциями. Кроме того, нестандартный анализ и гипервещественные числа страдают от проблемы определимости: нет уникального способа задать на основе свойств уникальный бесконечно большой или бесконечно малый элемент. В большинстве неархимедовых расширений, даже если проблема определимости решена, существует единственный особый бесконечный элемент, обычно соответствующий счётному ординалу. Отличие предложенной здесь системы заключается в том, что имеется два одинаково важных особых элемента, соответствующих мере натуральных чисел и мере неотрицательных чисел, проявляющих симметрию между собой (и в конечном счёте, между 0 и 1).

Данная система объединяет весьма далёкие области математики, имеющие дело с бесконечностями: сравнение бесконечных множеств, теория расходящихся рядов, расходящиеся интегралы, теория чисел, исчисление конечных разностей, теория распределений и обобщённых функций и др.

Расширенные числа могут быть обобщены для сравнения множеств с точками аккумуляции и всюду-плотных множеств, чему в данной статье не было уделено внимания. Есть также гипотеза о количестве вещественных чисел на отрезке, которое при обобщении может быть выражено расширенным числом или как сумма бесконечного ряда.

Возможности применения.

Регуляризация расходящихся рядов и интегралов для избавления от бесконечностей применяется в квантовой теории поля, физике вакуума (для расчёта нулевой энергии и эффекта Казимира), теории гравитации, квантовой хромодинамике. В частности, Поль Дирак вывел значение средней энергии квартового гармонического осциллятора, применив регуляризацию расходящегося ряда:

$$\epsilon = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Та же самая величина в случае использования расширенных чисел выглядела бы так:

$$\epsilon = h\nu\omega_+ + kTe^{\frac{h\nu\omega_-}{kT}}$$

Первое слагаемое здесь соответствует нулевой энергии. Таким образом, возникает предположение, что ω_+ соответствует бесконечному числу заполненных отрицательных энергетических уровней в море Дирака, а минимальная наблюдаемая энергия квантового гармонического осциллятора имеет выражение $\frac{h\nu}{2}$ именно потому что стандартная часть ω_+ равна 1/2.

Учитывая вышесказанное, возникает предположение, что расширенные числа могут играть в квантовой теории поля и физике вакуума такую же роль, какую играют комплексные числа в квантовой механике.