О влиянии малых деформаций центрального тела на траекторию его спутника в задаче о гравитационном взаимодействии двух тел

Кирьян Д. Г., Кирьян Г. В.

Институт Проблем Машиноведения РАН В.О., Большой проспект 61, Санкт-Петербург, Россия, 199178 эл.адрес: diki.ipme@gmail.com

В рамках классической механики численно решена задача о гравитационном взаимодействии двух тел, одно из которых является деформируемым трёхосным эллипсоидом (центральное тело), а второе, материальной точкой (спутник). Установлена взаимосвязь угловой невязки расчётного и фактического положения перицентра спутника с гравитационной аномалией центрального тела.

Ключевые слова: гравитация, спутниковая гравиразведка, сплюснутость, барицентр

1. Постановка и обоснование задачи

Исследование влияния несферичности центрального, массивного тела на траекторию его спутника — известная задача спутниковой гравиразведки, но применительно к Солнцу и его спутнику Меркурию она не ставилась и поэтому представляет особый интерес. Суть, этого интереса заключается в том, чтобы с позиции классической механики попытаться раскрыть природу, так называемого, «аномального» смещения перигелия¹ Меркурия (рис. 1) за его синодический год² на угол $\Delta \psi$.

Обнаружение «аномального» смещения перигелия Меркурия, это результат многолетнего кропотливого труда французского астронома Урбен Леверье (*Urbain Jean Joseph Le Verrier*), который на основе, почти полувековых наблюдений за Меркурием в Парижской обсерватории, разработал теорию его движения с учётом всех известных ему, на тот период времени, гравитационных возмущений [1]. Леверье обнаружил, что расчётная траектория Меркурия немного расходится с данными оптических

¹Минимальное удаление спутника от центрального тела.

²Период обращения объекта вокруг Солнца.

наблюдений — перигелий смещался быстрее, чем следовало из его теории. Получившаяся невязка составила $\Delta \psi \approx 0,1''$ за синодический период Меркурия. Для удобства сравнения этой малой величины, при анализе различных гипотез, объясняющих природу невязки $\Delta \psi$, её принято пересчитывать на интервал времени равный 100 земным годам. Величина этой невязки, у разных авторов, лежит в диапазоне от 38'' до 43''.



Рис. 1. «Аномальное» смещение перигелия Меркурия $\Delta \psi$ за его синодический период. Цифрами 1, 2, 3 отмечена последовательность перигелиев Меркурия.

К сожалению, классическая механика «почти официально» отказалась от дальнейших поисков природы $\Delta \psi$, приняв, в начале XX века, без должной конструктивной критики, формулу Эйнштейна [2, 3, 4] для «аномального» смещения перигелия Меркурия в виде

$$\Delta \psi = \frac{6\pi \mathbf{G} M_{\odot}}{c^2 a (1 - e^2)} \qquad \text{или} \qquad \Delta \psi = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}, \tag{1}$$

где **G** — гравитационная постоянная; M_{\odot} — масса Солнца, как материальной точки; c — скорость света в вакууме; T — синодический период Меркурия; a, e — большая полуось и эксцентриситет невозмущённой орбиты Меркурия соответственно.

Предложенное Эйнштейном выражение (1) дало требуемую величину «аномального» смещения перигелия Меркурия $\Delta \psi \approx 0,1''$, правда ценой отказа от классического закона Ньютона о гравитационном взаимодействии. На этом, поиски гравитационных аномалий или иных физических процессов, которые могли бы объяснить природу $\Delta \psi$, были закончены. Выражение (1) было принято научным сообществом, как единственно возможное объяснение, выявленного Леверье, расхождения расчётного положения перигелия Меркурия и фактического на угол $\Delta \psi \approx 0,1''$ за один его оборот вокруг Солнца.

Анализ постулатов и гипотез, лежащих в основе выражения (1) для константы $\Delta \psi$, не является целью этой работы. Подробно вся история поиска причин «аномального» смещения перигелия Меркурия изложена в книге Роузвера Н. Т. «Перигелий Меркурия: От Леверье до Эйнштейна» [5].

На наш взгляд, классическая механика поторопилась сдать позиции. В теории Леверье и в предложенном Эйнштейном выражении (1), Солнце рассматривается, как материальная точка. Но есть ли достаточные основания принимать Солнце за материальную точку при расчёте орбиты Меркурия? Минимальное удаление Меркурия от Солнца составляет приблизительно 66 радиусов Солнца или 153 световых секунды, что по космическим меркам, очень близко к Солнцу и поэтому можно допустить рассмотрение Солнца не как материальной точки, а как деформируемого тела, которое может иметь форму отличную от сферы.

Итак, у нас замкнутая система двух гравитирующих тел: Солнце и Меркурий. По оценкам, основанным на наблюдательных данных, у Солнца, по причине своего собственного вращения³, присутствует полярное сжатие, то есть полярный радиус Солнца меньше экваториального на $\approx 6,3 \ \kappa m$. Для эллипсоида вращения, в том числе и для Солнца, вводится оценка сжатия через сплюснутость⁴. Наличие сжатия–сплюснутости означает, что предположение о деформируемости Солнца имеют под собой основу. И так, Солнце, это деформируемое тело, а Меркурий — материальная точка (пробное тело).

Солнце, как элемент Солнечной системы, участвует в двух движениях — собственное вращение и вращение вокруг барицентра⁵. Влияние экваториальных выступов Солнца, вызванных собственным вращением, на орбиту Меркурия, подобно влиянию экваториальных выступов Земли на траектории её искусственных спутников [6, 7]. Но, так как сплюснутость Солнца (1/900000) значительно меньше сплюснутости Земли (1/298), приблизительно в 30200 раз, то гравитационным влиянием экваториальных выступов Солнца на орбиту Меркурия можно пренебречь. Обоснование

 $^{^{3}\}mathrm{Coбственное}$ вращение Солнца, вернее его поверхностных слоёв, происходит с периодом от 25 до 34 суток.

⁴Это число характеризующее меру деформации круга или сферы по диаметру с образованием эллипса или эллипсоида. Сплюснутость принято обозначать через f. Сплюснутость определяется как $f = \frac{a-b}{a}$, где a и b—большая и малая полуоси эллипса. Деформация (сплющивание) планет зависит от их структуры и скорости собственного вращения.

⁵Мгновенный центр масс Солнечной системы.

этого допущения можно найти и в работе [8, Глава 7].

Таким образом, из двух вращений, остаётся только вращение Солнца, как деформируемого тела, вокруг барицентра Солнечной системы, положение которого непрерывно меняется относительно центра массы Солнца. Реальное и расчётное изменение взаимного положения барицентра и Солнца показано на рис. 2.



Рис. 2. Рисунок из книги [9]. «Рис. 22. Движение центра Солнца относительно центра масс Солнечной системы с 1940 по 2000 г.».

Солнце так же, как и все материальные объекты Солнечной системы, испытывает действие центробежных сил при вращении вокруг барицентра Солнечной системы. Поэтому у нас есть все основания считать, что Солнце, как деформируемое тело, под действием центробежных сил, образует форму отличную от сферы, которую, в первом приближении, можно принять за эллипсоид, большая полуось которого лежит в плоскости эклиптики и направлена на барицентр Солнечной системы.

Оценим степень влияния каждой из планет на положение центра массы L_{\odot} относительно Солнца (рис. 3). Результаты расчёта положений L_{\odot} для каждой из планет⁶ сведены в таб. 1.

Из таб. 1 следует, что основным фактором, определяющим величину радиального смещения барицентра Солнечной системы относительно центра массы Солнца, выступают планеты-гиганты, а именно *Юпитер*, *Сатурн*, *Уран* и *Нептун*. Конечно, учёт в расчётной модели текущего положения планет-гигантов внесёт свои коррективы при определении

⁶Характеристики планет взяты с pecypca http://nssdc.gsfc.nasa.gov



Рис. 3. Вращение системы Солнце–Планета вокруг центра массы L_{\bigodot} .

Таблица 1. Отношение величины смещения центра массы L_{\bullet} к среднему значению радиуса Солнца R_{\odot} для каждой из планет Солнечной системы. L — расстояние от Солнца до планеты в световых минутах; e — эксцентриситет орбиты; T — синодический период планеты.

	L, [*мин]	e	T, [cym]	L_{\odot}/R_{\odot}
Меркурий	3,219	0,20566	87,969	0,00001
Венера	6,016	0,00675	224,701	0,00038
Земля	8,317	0,01675	$365,\!256$	0,00065
Mapc	12,671	0,09347	$686,\!980$	0,00011
Юпитер	43,284	0,04887	$4332,\!589$	1,06733
Сатурн	$79,\!695$	0,05649	$10759,\!220$	$0,\!58876$
Уран	$159,\!692$	0,04566	$30685,\!400$	0,18025
Нептун	$249,\!898$	0,01126	60189,000	0,33275
Плутон	$328,\!359$	$0,\!24881$	90560,000	0,00006

координат барицентра относительно Солнца, но сам факт наличия переменного поля центробежных сил, воздействующих на Солнце в плоскостях параллельных плоскости эклиптики, не изменится. Поскольку, из всех планет, только Юпитер даёт максимальное смещение центра массы $L_{\mathbf{0}}$ относительно Солнца, поэтому рассмотрим Юпитер, как основную причину центробежной деформации Солнца, которая, в конечном итоге, как мы полагаем, позволит выявить природу «аномального» смещения перигелия Меркурия $\Delta \psi \approx 0,1''$.

Период обращения пары Солнце–Юпитер вокруг L_{\odot} , определяется синодическим периодом Юпитера. Следовательно, Солнце, как деформируемое тело, в процессе вращения вокруг центра масс системы Солнце–Юпитер L_{\odot} , будет испытывать действие соответствующих центробежных сил, которые сформируют, в первом приближении, трёхосный эллипсо-

ид 7 с большой полуосью a, лежащей в плоскости эклиптики и ориентированной на Юпитер.

Фактически мы рассматриваем систему из трёх тел: Солнце, Меркурий и Юпитер, но в два этапа. На первом мы обосновываем несферичность Солнца наличием центробежных сил при вращении вокруг центра масс пары Солнце–Юпитер с синодическим периодом Юпитера. А на втором этапе исследуем движение Меркурия вокруг центра массы, сформированного Юпитером, эллипсоида Солнца. Периоды собственного вращения Солнце–Юпитер и Солнце–Меркурий весьма разнятся. За один оборот Меркурия вокруг Солнца, само Солнце продвигается по своей орбите относительно центра масс L_{\odot} пары Солнце–Юпитер на угол равный:

$$\frac{2\pi}{T_{\mathcal{Y}}} T_{\mathfrak{P}} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) \approx 7.3^{\circ}, \qquad (2)$$

где T_{ψ} и T_{ψ} — синодические периоды Юпитера и Меркурия. Угол небольшой и, в первом приближении, будем считать, что Солнце для Меркурия является неподвижным эллипсоидом.

Итак, объект исследования — замкнутая система, состоящая из Солнца и Меркурия. Меркурий, как материальная точка, вращается вокруг неподвижного эллипсоида Солнца. Наша цель — выявить возможную взаимосвязь между параметрами эллипсоида Солнца и «аномальным» смещением перигелия Меркурия $\Delta \psi$, при условии, что таковая существует.

2. Система двух гравитирующих тел

Рассмотрим классическую задачу о движении двух гравитирующих тел, подчиняющихся законам механики Ньютона. Введём в рассмотрение неподвижную ортогональную систему координат **О**xyz (рис. 4). Радиусвектора \underline{r}_A и \underline{r}_B определяют текущее положение тел A и B с массами m_A , m_B соответственно. Пусть тела A и B обладают центральной симметрией. Поведение гравитационно взаимодействующих тел A и B на левой части рис. 4 описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} m_A \, \ddot{\underline{r}}_A &= \underline{f}_B \\ m_B \, \ddot{\underline{r}}_B &= \underline{f}_A \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m_A \, \ddot{\underline{r}}_A &= \underline{E}_B \, m_A \\ m_B \, \ddot{\underline{r}}_B &= \underline{E}_A \, m_B \end{cases} \tag{3}$$

⁷В реальности форма «жидкого» Солнца много сложнее [10, 11], так как присутствует ещё и собственное вращение, и непрерывно меняющееся положение барицентра Солнечной системы, но это вне рамок нашего исследования.



Рис. 4. Задача о невозмущённом движении двух гравитирующих тел A и B в плоскости $\mathbf{O}xy$. Слева, A и B двигаются относительно точки \mathbf{O} , а справа, A неподвижно и его центр масс совпадает с началом системы координат \mathbf{O} . $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ — единичные орты декартовой системы координат $\mathbf{O}xyz$, а $\underline{e}_r, \underline{e}_{\varphi}, \underline{e}_{\lambda}$ — единичные орты сферической системы координат в которой положение B определяется координатами r, φ, λ . По условию нашей задачи $\varphi \equiv 0$.

Здесь <u> f_B </u> — гравитационная сила, действующая на тело A со стороны тела B, равна произведению напряжённости гравитационного поля <u> E_B </u> на массу m_A . Аналогично определяется и сила f_A .

Упростим систему (3) вычитанием из нижнего уравнения верхнего, и принимая во внимание, что

$$\underline{r} = \underline{r}_B - \underline{r}_A \tag{4}$$

получаем уравнение движения тела Bотносительно неподвижного центрально-симметричного тела ${\cal A}$

$$\underline{\ddot{r}} = \underline{E}_A - \underline{E}_B \ . \tag{5}$$

Напряжённости гравитационных полей \underline{E}_A и \underline{E}_B выражаются через соответствующие градиенты потенциалов \mathbf{U}_A и \mathbf{U}_B

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{G}\frac{m_A}{r} , \quad \underline{E}_A = \left(\nabla \mathbf{U}_A \cdot \underline{e}_r\right) \underline{e}_r \quad \Rightarrow \quad \underline{E}_A = -\frac{\mathbf{G}m_A}{r^2} \underline{e}_r . \tag{6}$$

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{G}\frac{m_B}{r}, \quad \underline{E}_B = \left(\nabla \mathbf{U}_B \cdot \underline{e}_r\right)(-\underline{e}_r) \quad \Rightarrow \quad \underline{E}_B = -\frac{\mathbf{G}m_B}{r^2}\left(-\underline{e}_r\right) . \tag{7}$$

Здесь **G** — гравитационная постоянная; $r = |\underline{r}|$ — расстояние между точечными массами m_A и m_B ; ∇ — оператор набла, векторный дифференциальный оператор в сферической системе координат

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{e}_{\varphi} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \underline{e}_{\lambda} , \qquad (8)$$

где $\underline{e}_r, \underline{e}_{\varphi}, \underline{e}_{\lambda}$ — единичные орты сферической системы координат (рис. 4).

Полученные выражения (6) и (7) для напряженности гравитационного поля тел A и B, записанные через потенциалы, подставим в уравнение (5)

$$\underline{\ddot{r}} = \left(\nabla \left(\mathbf{U}_A + \mathbf{U}_B\right) \cdot \underline{e}_r\right) \underline{e}_r \tag{9}$$

Подставляем (6) и (7) в уравнение (5) или (9) и принимая во внимание то, что по условию задачи, $m_A \gg m_B$ получаем

$$\underline{\ddot{r}} = -\mathbf{G} \, \frac{m_A + m_B}{r^2} \, \underline{e}_r \quad \Longrightarrow \quad \underline{\ddot{r}} \approx -\mathbf{G} \, \frac{m_A}{r^2} \, \underline{e}_r \tag{10}$$

Таким образом, исключив в (10) массу m_B , мы исключили из рассмотрения и само гравитационное поле тела B.

Однако, полученное уравнение (10) верно только для точечных масс или тел с центральной симметрией. Если мы хотим учесть влияние геометрии центрального тела A с массой m_A на траекторию точечной массы m_B , то в первом приближении, воспользуемся выражением потенциала для трёхосного эллипсоида. В общем случае, потенциал трёхосного эллипсоида представляет собой сходящийся ряд, записанный через полиномы Лежандра [12, 13]. Для удобства, и без потери сути, ориентируем эллипсоид таким образом, чтобы оси декартовой системы координат Oxyz совпадали с главными осями эллипсоида, то есть полуось эллипсоида a совпадает с осью Ox, полуось b с осью Oy, а полуось c лежит на оси Oz. Начало системы координат — точка O, совмещено с центром массы однородного эллипсоида (рис. 5). Ограничимся первыми тремя



Рис. 5.

членами разложения потенциала трёхосного эллипсоида. Этого будет достаточно для учёта формы центрального тела A при расчёте траектории спутника B, то есть

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{G}m_A}{r} + \frac{\mathbf{G}}{r^3} \left(\left(J_c - \frac{J_a + J_b}{2} \right) \frac{1 - \sin^2 \varphi}{2} + \left(J_b - J_a \right) \frac{3\cos^2 \varphi \cos 2\lambda}{4} \right), \quad (11)$$

где

$$J_a = \frac{m_A}{5} \left(b^2 + c^2 \right) , \quad J_b = \frac{m_A}{5} \left(a^2 + c^2 \right) , \quad J_c = \frac{m_A}{5} \left(a^2 + b^2 \right) .$$
(12)

Здесь J_a, J_b, J_c — главные моменты инерции эллипсоида; **G**— масштабноразмерный множитель (гравитационная постоянная); m_A — гравитирующая масса эллипсоида; r, φ, λ — сферические координаты материальной точки B, расстояние, широта и долгота соответственно.

Введём некоторые допущения, которые помогут упростить выражение (11) для потенциала центрального тела *A*, представляющего собой трёхосный эллипсоид

- 1) $\varphi(t) \equiv 0$ (траектория *B* лежит в плоскости **O***xy*)
- 2) a > b = c (эллипсоид вращения)

В результате, выражение (11) принимает более простой вид:

$$\mathbf{U}(r,\lambda) = \mathbf{G} \, \frac{m_A}{r} \left(1 + \frac{1+3\cos 2\lambda}{r^2} \left(\frac{a^2 - b^2}{20} \right) \right) \tag{13}$$

Итак, для нашей задачи потенциалы в уравнении (9) будут следующими:

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{U}(r, \lambda) , \quad \mathbf{U}_B = 0 . \tag{14}$$

После подстановки (14) в (9) получаем уравнение движения материальной точки B с радиус-вектором <u>r</u> относительно неподвижного центрального тела A в форме эллипсоида с полуосями a > b = c

$$\frac{\ddot{r}}{r} = -\mathbf{G} \frac{m_A}{r^2} \left(1 + 3\left(\frac{a^2 - b^2}{20}\right) \frac{1 + 3\cos 2\lambda}{r^2} \right) \underline{e}_r \;. \tag{15}$$

Деформация эллипсоида задаётся через изменение его большой полуоси a, полуоси b и c пересчитываются исходя из условия неизменности объёма эллипсоида V_A в процессе его деформирования. Следовательно, при вариациях величины большой полуоси a, должны, соответствующим образом, меняться и полуоси b и c

$$V_A(k) = \frac{4}{3}\pi abc = Const \implies a = kR_A, \ b = \frac{R_A}{\sqrt{k}}, \ c = \frac{R_A}{\sqrt{k}}.$$
 (16)

Здесь R_A — радиус недеформированого, сферического тела A; k > 1 — вещественный коэффициент определяющий степень трансформации эллипсоида, через изменение длины его полуоси a.

3. Результаты исследования

Было численно решено уравнение (15), где в качестве центрального тела А, в форме эллипсоида, выступает Солнце, а материальной точкой *В* представлен Меркурий. Начальные условия для Меркурия следующие:

$$\lambda(t)\Big|_{t=0} = \lambda_0 , \quad r(t)\Big|_{t=0} = r_{\text{перигелий}} , \quad \dot{r}(t)\Big|_{t=0} = v_{\text{перигелий}} . \tag{17}$$

Процесс решения (15) с начальными условиями (17), это серия расчётов траектории Меркурия при различных величинах большой полуоси *а* эллипсоида Солнца.

$$a(k) = k R_{\odot}$$
, rge $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$.

Из множества решений, при $\lambda_0 = 0$, было выбрано такое значение коэффициента деформации k

$$k \approx 1,00044 \tag{18}$$

при котором реализуется так называемое «аномальное» смещение перигелия Меркурия $\Delta \psi \approx 0,1''$. Это означает, что в плоскости эклиптики, сплюснутость Солнца составляет около ¹/1516, то есть большая полуось *a* превышает полуось *b* на $\approx 459 \ \kappa m$. В масштабах Солнца, эта весьма малая величина, $\approx 0,07\%$ от радиуса Солнца, но именно эта разность полуосей эллипсоида Солнца и создаёт неучтённую гравитационную аномалию для Меркурия.

Так же, в ходе решения задачи была выявлена зависимость направления и величины смещения перигелия Меркурия от величины начального угла λ_0 в (17). Графически этот результат представлен на рис. 6. Из графика видно, что при λ_0 , принадлежащей областям

$$\lambda_* < \lambda_0 < \pi - \lambda_* \qquad \text{if } \qquad \pi + \lambda_* < \lambda_0 < 2\pi - \lambda_* , \tag{19}$$

наблюдается, чисто теоретически, обратное (по часовой стрелке) движение перигелия Меркурия.

4. Выводы

Проведённое исследование влияния несферичности Солнца на траекторию движения Меркурия показало, что так называемое «аномальное» смещение перигелия Меркурия, иными словами невязка, это результат,



Рис. 6. Влияние значения угла λ_0 на величину смещения перигелия Меркурия $\Delta \psi$. $\lambda *$ — критический угол при котором происходит смена направления смещения перигелия.

того, что Леверье, в своих расчётах, принял Солнце за материальную точку.

Смещение перигелия Меркурия на $\Delta \psi \approx 0,1''$ определяется несферичностью Солнца, которая характеризуется соотношением полуосей эллипсоида a,b и c. Природа несферичности Солнца, а речь идёт не о полярном сжатии, определяется деформацией Солнца при его вращении вокруг барицентра Солнечной системы.

Практический опыт спутниковой гравиразведки Земли, Луны, Марса показывает, что траектория искусственного спутника весьма чувствительна к гравитационным аномалиям центрального тела. В нашем случае, в роли спутника-индикатора гравитационных аномалий Солнца выступил Меркурий, который, через невязку $\Delta \psi \approx 0.1''$, указал на присутствие у Солнца гравитационной аномалии.

То, что Меркурий, в своём движении, чувствует гравитационные аномалии Солнца, говорит нам о том, что если в теоретической модели движения Меркурия учесть особенности деформации Солнца, то «аномальное» смещение, обнаруженное Урбеном Леверье, попросту исчезнет. И это без привлечения метафизики и модификации закона Ньютона о гравитационном взаимодействии материальных точек.

Фактически, проблема интерпретации «аномального» смещения $\Delta \psi$ свелась к обратной задаче спутниковой гравиразведки [14], применительно к Солнцу и его спутнику Меркурию.

Послесловие

При решении этой задачи с "большой" историей, как и при решении других, мы руководствовались тем, что при наличии неразрешимых проблем, на первый взгляд, не следует спешить с привлечением метафизики, конструируя нечто абстрактно-нематериальное. Естествоиспытатель, в любых ситуациях, должен оставаться на позиции материализма и опираться только на факты, подтверждённые независимыми экспериментами. Это тривиально, но необходимо критически относиться к существующим метафизическим трактовкам наблюдаемых явлений, на которых, в последствии, строится та или иная метафизическая концепция, например, «тёмная материя».

Если задача несколько десятилетий, а иногда и столетий не поддаётся решению, то надо вернуться к исходной точке, к началу пути и попытаться найти дополнительные или незамеченные ранее факты, провести проверочные эксперименты и наблюдения, проверить корректность постановки самой задачи.

Если ты желаешь вернуться к истине, у тебя нет необходимости искать дорогу. Ты знаешь её, ты спустился по ней. Вернись по собственным следам.

Бернард Клервосский

Стараясь придерживаясь этого принципа, мы смогли, как мы полагаем, решить несколько задач с историей. Установить причины появления Чандлеровского периода движения полюса вращения Земли [15], ответить на вопрос почему не удаётся уточнить гравитационную постоянную [16], показать фактическое существование гравитационного диполя и дать определение гравитирующей массы [17], объяснить физическую природу «плато» на кривой скоростей галактик без привлечения метафизического понятия «тёмная материя» [18].

Список литературы

- [1] Le Verrier, Urbain J. Theorie du mouvement de Mercure / Urbain J. Le Verrier // Annales de l'Observatoire de Paris. 1859. Jan.. Vol. 5. P. 1.
- [2] Einstein, Albert B. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie / Albert B. Einstein // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe. — 1915. — Pp. 831– 839.

- [3] Эйнштейн, А. Эволюция физики. Развитие идей от первоначальных понятий до теории относительности и квантов / А. Эйнштейн, Л. Инфельд. — «НАУКА», 1965. — С. 327.
- [4] *Паули, В.* Теория относительности / В. Паули. ОГИЗ, ГТТИ, 1947.
- [5] Роузвер, Н. Т. Перигелий Меркурия: От Леверье до Эйнштейна / Н. Т. Роузвер. — Мир, 1985.
- [6] Левантовский, В. И. Механика космического полёта в элементарном изложении / В. И. Левантовский. «НАУКА», 1980. С. 512.
- [7] *Аксёнов, Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли / Е.П. Аксёнов. «НАУКА», 1977. С. 360.
- [8] *М., Боулер.* Гравитация и относительность / Боулер М.— «МИР», 1979.
- [9] *Куликовский, П. Г.* Справочник астронома-любителя / П. Г. Куликовский. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
- [10] *Пуанкаре, Ж. А.* Фигуры равновесия жидкой массы / Ж. А. Пуанкаре; Под ред. А. Р. Логунов, Б. П. Кондратьев. — М. Ижевск: Науч.-изд. центр "Регуляр. и хаотич. динамика 2000.
- [11] *Крат, В. А.* Фигуры равновесия небесных тел / В. А. Крат. Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950.
- [12] *Грушинский, Н. П.* Основы гравиметрии / Н. П. Грушинский. «НАУКА», 1983.
- [13] Торг, Вольфганг. Гравиметрия / Вольфганг Торг. «Мир», 1999.
- [14] Миронов, В. С. Курс гравиразведки / В. С. Миронов. Недра, 1980.
- [15] Kiryan, Dmitry. Moon's perigee mass as a missing component of the Earth's precession-nutation theory / Dmitry Kiryan, George Kiryan // PAMM. - 2014. - Dec.. - Vol. 14, no. 1. - Pp. 49-60. - http://dx. doi.org/10.1002/pamm.201410017.
- [16] Kiryan, D. G. Decimal-by-decimal analysis of the gravitational constant value as exemplified by torsion balance / D. G. Kiryan, G. V. Kiryan // *e-prints viXra:1708.0245v3.* 2017. – P. 12. – http://vixra.org/ abs/1708.0245.

- [17] Kiryan, D. G. Gravitational interaction in the medium of non-zero density / D. G. Kiryan, G. V. Kiryan // e-prints viXra:1406.0128v2. – 2014. – Jul.. – P. 24. – http://vixra.org/abs/1406.0128.
- [18] Kiryan, Dmitry G. Modeling the Evolution of a gravitating bodies cluster based on absolutely inelastic collisions / Dmitry G. Kiryan, George V. Kiryan // ArXiv e-prints. 2018. Nov..