



LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE

UNA TRATTAZIONE COMPLETA, INCLUSA LA RELATIVITÀ RISTRETTA

di Leonardo **Rubino**

Maggio 1993 - Novembre 2025

Abstract: Una trattazione completa della Teoria della Relatività, inclusa la relatività ristretta.

Indice:

-Indice.

-Introduzione.

-Capitolo 1: Premesse di Geometria.

Par. 1.1: Formalismo, lunghezze di archi e aree di superfici curve.

Par. 1.2: Geometria differenziale di base.

Par. 1.3: Geometria differenziale dello spazio.

-Capitolo 2: Le grandezze salienti della Teoria della Relatività Generale.

Par. 2.1: Concetti introduttivi sulla Relatività Generale.

Par. 2.2: Sul tensore metrico ed altre grandezze salienti.

Par. 2.3: Sulla Trasformazione di Lorentz in Relatività Generale.

Par. 2.4: Il 4-vettore Momento-Energia ed il Tensore Momento-Energia.

Par. 2.5: Idrodinamica relativistica.

Par. 2.6: L'Equazione della geodetica.

Par. 2.7: La relazione tra $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$.

Par. 2.8: Il limite Newtoniano.

Par. 2.9: Il Tensore di Curvatura di Riemann-Christoffel.

-Capitolo 3: Le Equazioni del Campo Gravitazionale di Einstein.

Par. 3.1: Le dieci Equazioni del Campo Gravitazionale di Einstein.

-Capitolo 4: Tests classici della teoria di Einstein.

Par. 4.1: La metrica.

Par. 4.2: La soluzione di Schwarzschild.

Par. 4.3: Le equazioni generali del moto.

Par. 4.4: La deflessione della luce da parte del Sole.

Par. 4.5: Calcolo alternativo della deflessione, con profili di antagonismo alla TRG.

Par. 4.6: La precessione del perielio dei pianeti.

Par. 4.7: Onde gravitazionali dalle Equazioni di Einstein.

-Capitolo 5: Deduzione delle Equazioni Cosmologiche di Friedmann dalle Equazioni del C.G. di Einstein. Metrica di Robertson-Walker.

-APPENDICI.

Appendice 1: La Teoria Della Relatività Ristretta.

La cosa più vicina all'intelligenza è la semplicità.

Introduzione.

La Teoria della Relatività Generale (TRG) è un'estensione della Teoria della Relatività Ristretta (o Speciale) (TRR), necessaria ad Einstein per spiegare la Gravitazione. Il termine gravità richiama il termine accelerazione; vedremo infatti al Par. 2.1 che, laddove coi sistemi di riferimento c'è accelerazione, rotazione e gravità, la metrica non è più semplice come nella TRR.

Inoltre, la TRG spiega la gravità come una curvatura dello spazio, o meglio, dello spazio-tempo (spazio-tempo matematico, nell'opinione di chi scrive) determinata dalla materia (e

dall'energia!) immersa in tale spazio-tempo. E' un po' come quando, ad esempio, si pone una sfera di piombo su un materasso: in prossimità della sfera si ha uno sprofondamento ad imbuto e in tale zona il materasso appare incurvato. Potremmo dunque dire che tale area di materasso incurvato è il campo gravitazionale della sfera di piombo. Se ora lanciamo un pallino sul materasso, lo stesso, attriti a parte, procederà, indisturbato, di moto rettilineo uniforme sul materasso piatto, finchè, avvicinandosi all'area incurvata e sprofondata, non inizierà ad accelerare (cadere) verso la sfera di piombo.

La materia, nella TRG, ha lo spazio-tempo come binari su cui muoversi; se dunque questi vengono incurvati, le traiettorie seguite dalla materia saranno curve.

Se poi la sfera è così massiva da sprofondare completamente nel materasso, allora l'imbuto diventerà una sacca strozzata, ciò che chiameremmo buco nero, e dalla stessa non uscirebbe più neanche la luce.

In TRG vale poi il Principio di Equivalenza, secondo cui un campo gravitazionale può essere annullato da una accelerazione e non è dunque possibile distinguere, in senso assoluto, una accelerazione da un campo gravitazionale. Si immagini infatti l'Ascensore di Einstein, in cui una persona ferma ad un piano grava ovviamente sul pavimento dell'ascensore col suo peso; se però tagliamo il cavo dell'ascensore, questo inizierà a trovarsi in caduta libera nel campo gravitazionale terrestre e l'uomo all'interno galleggerà come in un'astronave priva di gravità, poiché lui cade e l'ascensore pure e il pavimento di quest'ultimo gli sfuggirà sempre da sotto i piedi. Dunque, una accelerazione, quella di caduta, ha annullato l'effetto della gravità; e contemporaneamente, ad ascensore fermo, la persona all'interno, invece di concludere che era fermo e sospeso in un campo gravitazionale (gravando coi piedi sul pavimento) poteva anche concludere che non vi era nessun campo gravitazionale, ma che l'ascensore stava accelerando verso l'alto, spingendo sotto le suole delle sue scarpe.

La gravità rallenta il tempo! In montagna il tempo scorre più velocemente che a valle. Ovviamente, sulla Terra, la differenza è impercettibile, ma su una stella di neutroni, o in un buco nero, l'effetto è intensissimo.

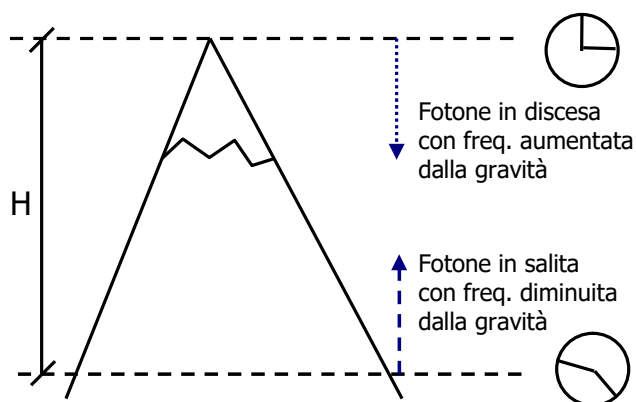


Fig. I.1: Montagna, gravità e tempo.

$$\Delta E = m_0 g H \text{ (delta energia del salto di quota)}$$

$$\Delta E = h \Delta \nu \text{ (delta energia del calo di freq. di un fotone)}$$

$$\text{Dalle due: } \Delta \nu = m_0 g H / h.$$

Per un fotone, $E = h \nu$, ma in relatività: $E = m_0 c^2$, da cui, per un fotone: $m_0 = h \nu / c^2$ e dunque, per $\Delta \nu$:

$\Delta \nu = \nu g H / c^2$ ed essendo il tempo l'inverso della frequenza, si ha: $\Delta \nu / \nu = \Delta t / t$ e dunque:

$$\Delta t = \frac{g H}{c^2} t.$$

Dunque, su un tempo t , si ha un rallentamento Δt dato dalla gravità!

Ora, trasferiamo un attimo il dispositivo sorgente/ricevitore dalla montagna ad un'ascensore:

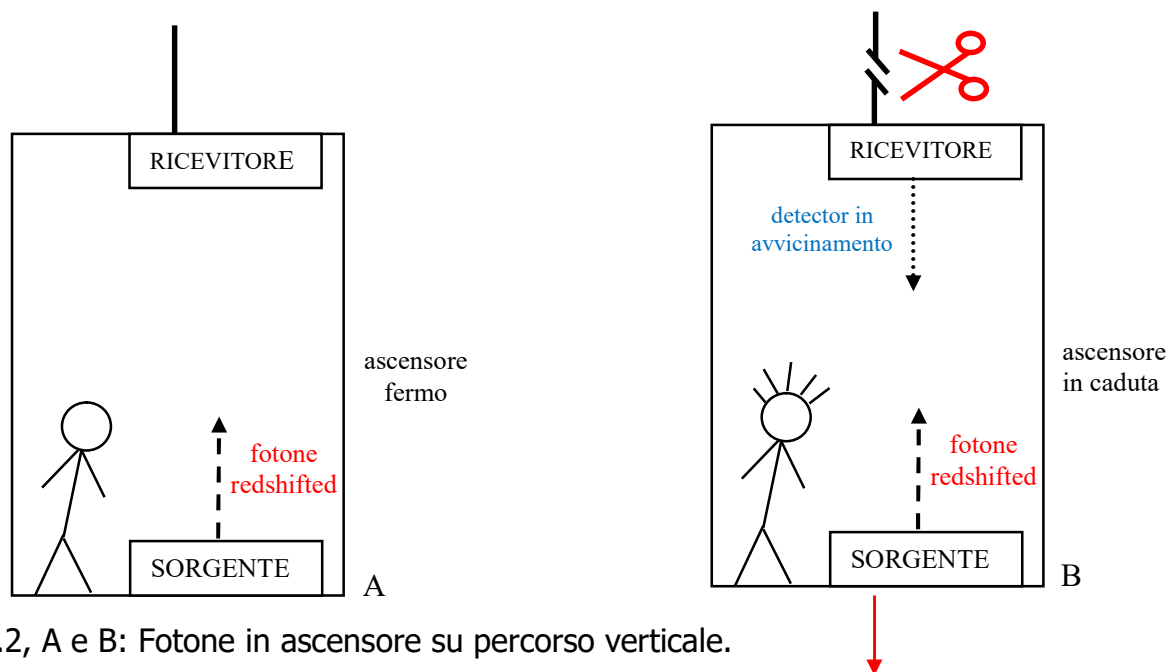


Fig. I.2, A e B: Fotone in ascensore su percorso verticale.

-Fig. I.2 A: il fotone fatica a risalire a causa del redshift gravitazionale della Terra.

-Fig. I.2 B: quando il cavo viene tagliato, l'osservatore sull'ascensore non rileva più la gravità, a causa della caduta libera, dunque il fotone non subisce nessuno shift e lo stesso fenomeno fisico, per principio, dovrebbe constatare l'osservatore sulla Terra; infatti, per quest'ultimo la gravità esiste ancora (redshift), ma contemporaneamente vi è un blueshift di avvicinamento del detector al fotone risalente, con compensazione reciproca.

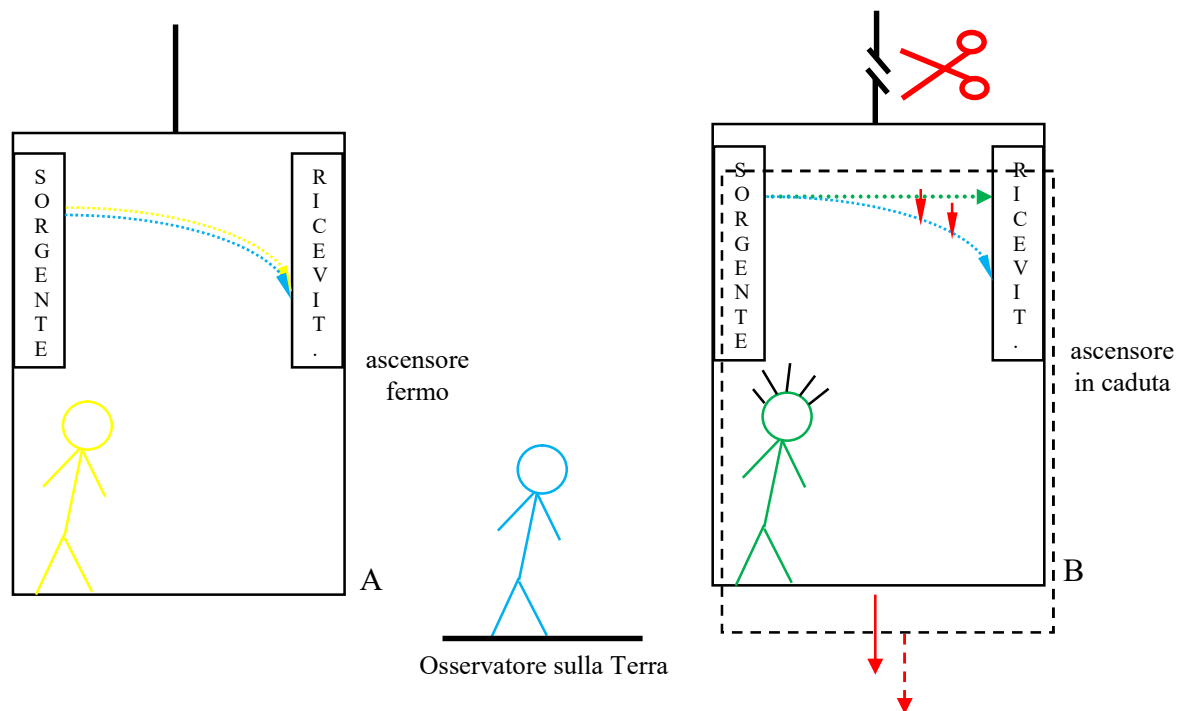


Fig. I.3, A e B: Fotone in ascensore su percorso orizzontale.

-Fig. I.3 A: l'osservatore in ascensore, che è fermo, vede il fotone curvare verso il basso a causa della gravità terrestre. Lo stesso osserva l'osservatore dal suolo terrestre.

-Fig. I.3 B: il cavo viene tagliato e la caduta libera annulla la gravità agli occhi dell'osservatore in caduta: il fotone va dritto. L'osservatore sul suolo terrestre è in un contesto gravitazionale e vede il fotone che parte da una quota più alta ed approda ad una quota più bassa, dunque esso curva! La gravità deflette la luce! Tuttavia, mentre il fotone curva verso il basso, il detector scende, tanto che anche per l'osservatore a terra il

fotone, nel contesto d'insieme ascensore/fotone, in ultima analisi è come se è andato dritto.

Con l'esempio del materasso abbiamo introdotto il concetto di curvatura dello spazio-tempo (matematico) causato dalla materia/energia. L'equazione tensoriale, che noi qui dimostreremo, che esprime appunto la corrispondenza tra materia/energia e curvatura è l'Equazione tensoriale del Campo Gravitazionale di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Il primo membro, tutto in R , ad indicare "raggio di curvatura", esprime appunto le caratteristiche geometriche dello spazio contenente materia/energia, e l'entità di tale materia/energia è invece data dal secondo membro, col tensore momento-energia $T_{\mu\nu}$, il quale, come vedremo, in alcune sue componenti è, ad esempio, proporzionale alla densità ρ ecc.

Anche l'equazione di Newton sul campo gravitazionale esprime una corrispondenza tra caratteristiche geometriche dello spazio e presenza di materia:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad m\vec{a} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \quad \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

infatti, il primo membro dell'ultima equazione, ossia $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$, ossia la derivata seconda della posizione spaziale nel tempo, è appunto una caratteristica geometrica dello spazio, mentre il secondo membro $-G \frac{M}{r^2} \hat{r}$ ci informa sull'entità di M !

Sin dalla sua nascita, ufficialmente nel 1916, la TRG è sempre stata vista da molti con perplessità, in quanto in essa la complessità, sia matematica che concettuale, non manca proprio e dunque sostenere che così tante ipotesi e così tanti calcoli conseguenti possano portare ad equazioni che siano sempre ben salde alla realtà, qualche volta ha portato più di qualche critico a definirla una teoria un po' azzardata (weird, in inglese).

I tests classici del Cap. 4 sono incoraggianti in senso opposto, anche se pure lì le premesse, le supposizioni ed i calcoli non scarseggiano e poi, ad esempio, nel calcolo della deflessione della luce delle stelle ad opera del Sole, durante una eclissi nel 1919, la precisione di misura forse era parecchio vicina al valore misurato. Ed esistono poi spiegazioni alternative ed antagoniste alla TRG per spiegare deflessione della luce e precessione del perielio dei pianeti.

Nell'opinione di chi scrive, la TRG è sicuramente una splendida e meravigliosa teoria fisico matematica, più matematica che fisica, forse la più bella che c'è, ma è altrettanto vero che contiene profili appunto un po' azzardati. Penso che la TRG sia la classica teoria falsificabile alla Popper, un po' come un modello interpretativo che va bene per spiegare parecchi fenomeni, ma che però non è l'essenza piena del fenomeno spiegato. E poi, supposta la realtà dell'interpretazione geometrica della curvatura, resterebbe da spiegare come mai la materia la causa; sì, la causa, ma perché? Costatare non equivale pienamente a spiegare ed a giustificare ed a rendere plausibile.

Nella TRG la gravità è solo attrattiva ed Einstein, nella sua Teoria dei Campi Unificati, riassumendo un po', dopo aver utilizzato il concetto di curvatura in TRG per spiegare

l'attrazione gravitazionale, utilizzò il concetto di torsione per tentare di spiegare anche le forze repulsive dell'elettricità. Purtroppo senza successo, ossia senza che le sue nuove equazioni del campo unitario (mi pare 33) trovassero un qualche riscontro nell'Universo reale. Il lavoro di Einstein, dunque, non si esaurì con la TRG; egli, infatti, morì nel 1955 in un letto d'ospedale con carta e penna in mano!

Io, personalmente, penso che la forza di gravità sia una macroscopica forza che si compone di microscopiche forze elettrostatiche tra le particelle, positive e negative, che compongono l'Universo, e che possono considerarsi distribuite in modo random.

Capitolo 1: Premesse di Geometria.

Par. 1.1: Formalismo, lunghezze di archi e aree di superfici curve.

la sfera ed il cerchio:

Con riferimento alla figura 1, vogliamo rappresentare con una formula la superficie di una sfera Σ :

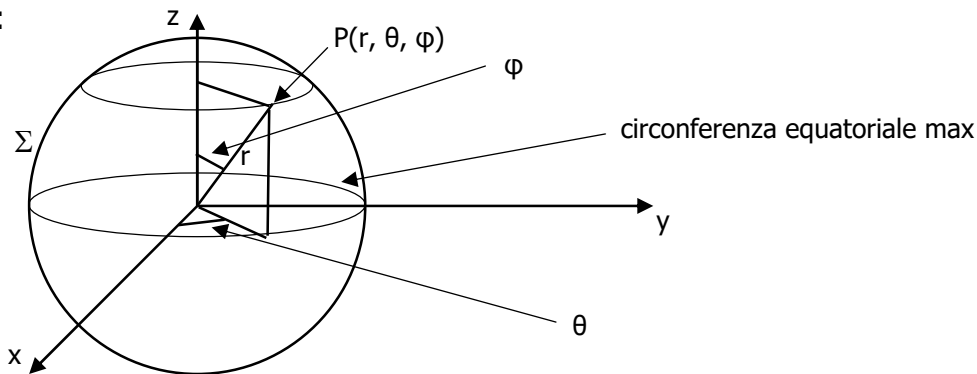


Fig. 1.1: La sfera.

In coordinate cartesiane, basta usare il Teorema di Pitagora per ottenere tale formula:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (1.1)$$

Invece, verso le più maneggevoli coordinate sferiche, si ha, molto banalmente ed intuitivamente:

$$\vec{r}_\Sigma = (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + (r \cos \varphi) \hat{z} \quad (1.2)$$

dove ovviamente $\vec{r}_\Sigma$ è il vettore che descrive (muovendosi) tutta la superficie della sfera.

Si vede che le componenti sono funzione di due parametri (θ e φ).

Ovviamente, nel caso più semplice di un cerchio γ , si avrebbe:

$$\vec{r}_\gamma = (r \cos \theta) \hat{x} + (r \sin \theta) \hat{y} \quad (1.3)$$

e qui si vede che invece le componenti sono funzione di un solo parametro (θ), se $r = \text{cost.}$

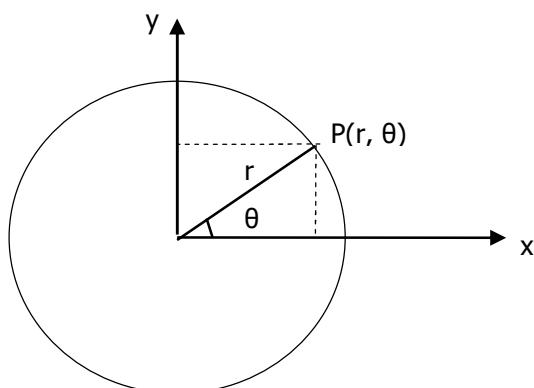


Fig. 1.2: Il cerchio.

Le (1.2) e (1.3) si possono dunque scrivere, in forma più generale, come funzioni, rispettivamente, di 2 e 1 parametri:

$$\vec{r}_\Sigma = \tau_1(u, v)\hat{x} + \tau_2(u, v)\hat{y} + \tau_3(u, v)\hat{z} \quad (u, v = \theta, \varphi \text{ e } r=r(u, v)) \quad (1.4)$$

$$\vec{r}_\gamma = \tau_1(u)\hat{x} + \tau_2(u)\hat{y} \quad (u = \theta \text{ e } r=r(u)) \quad (1.5)$$

E' ovvio che se nelle (1.4) e (1.5) i vari τ_i non hanno le espressioni che hanno nelle (1.2) e (1.3), ma bensì ne hanno altre, di generiche, allora esse (sempre le (1.4) e (1.5)) possono rappresentare non più sfera e cerchio, ma altre superfici e curve del tutto generiche.

Ora, volendoci avvicinare un po' più alle coordinate cartesiane $(x, y) = (x, f(x))$, effettuiamo nella (1.5) un cambio di parametro ($u \gg x$) in modo tale che si abbia:

$$\vec{r}_\gamma = \tau_1(u)\hat{x} + \tau_2(u)\hat{y} = x\hat{x} + f(x)\hat{y} \quad (1.6)$$

Riterremo dunque la (1.4) l'espressione generale di una superficie, e la (1.6) quella generale di una curva.

lunghezza di un arco su una curva:

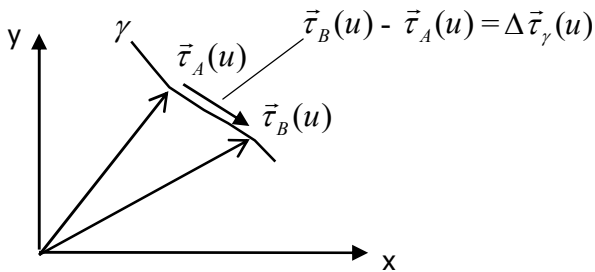


Fig. 1.3: Lunghezza di un arco.

Con riferimento alla figura 1.3, se $\vec{r}_B(u)$ tende a $\vec{r}_A(u)$, allora $\Delta \vec{r}_\gamma(u)$, diverrà un $d\vec{r}_\gamma(u)$; non solo; esso corrisponderà all'arco infinitesimo $d\vec{l}$ su γ . Possiamo dunque scrivere che: $d\vec{l} = d\vec{r}_\gamma(u)$, da cui:

$$l = \int_{l(A-B)} |d\vec{l}| = \int_{l(A-B)} |d\vec{r}_\gamma(u)| = \int_{l(A-B)} |\vec{r}'_\gamma(u)| du = \int_{l(A-B)} \sqrt{\left[\left(\frac{d\tau_1(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\tau_2(u)}{du}\right)^2\right]} du = \int_{l(A-B)} \sqrt{1 + f'^2(x)} du \quad (1.7)$$

e notiamo, altresì, dalla composizione vettoriale di Fig. 1.3, che $d\vec{r}_\gamma(u)$ risulta essere tangente a γ , in quanto la tocca in un solo punto, e dunque il vettore

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}_\gamma(u)}{du} \quad (1.8)$$

è un vettore tangente a γ .

area di una superficie curva:

Riprendiamo la (1.4), che qui riportiamo: $\vec{r}_\Sigma = \tau_1(u, v)\hat{x} + \tau_2(u, v)\hat{y} + \tau_3(u, v)\hat{z}$.

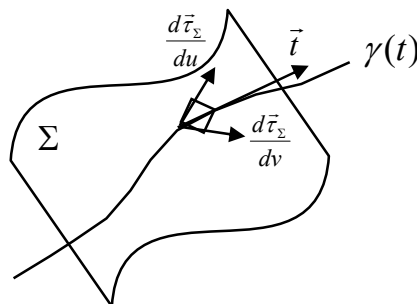


Fig. 1.4: Areola su una superficie curva.

Ora, con riferimento alla Figura 1.4, si abbia appunto una superficie curva Σ ed una curva $\gamma(t)$ su di essa. E' ovvio che se voglio sostenere che la curva $\gamma(t)$ sta proprio su Σ , allora si deve avere che i due parametri u e v di Σ devono essere funzione del parametro unico t di $\gamma(t)$. Ora, sappiamo dalla (1.8) che la derivata del vettore $\vec{\tau}_\gamma$ che descrive una curva, rispetto al suo parametro t , ci dà il vettore tangente $\vec{t}$ a tale curva. Parimenti, allora, la derivata del vettore $\vec{\tau}_\Sigma$ che descrive la superficie Σ fornisce un vettore $\vec{t}$ tangente alla superficie stessa, e se la derivata è effettuata sul parametro t della curva $\gamma(t)$ che sta su Σ , allora, ovviamente, tale vettore tangente sarà pure la tangente della curva $\gamma(t)$. Tale parentela è analiticamente esplicitabile vedendo i due parametri u e v come funzioni del parametro t della curva: $u = u(t)$ e $v = v(t)$.

Allora, la tangente alla curva $\gamma(t)$ sarà:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dt} = \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du} \frac{du}{dt} + \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv} \frac{dv}{dt} \quad (1.9)$$

Dunque, sempre con riferimento alla Figura 1.4, per la (1.9) si vede che il vettore tangente $\vec{t}$ ed i vettori $\frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du}$ e $\frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv}$ stanno sullo stesso piano, in quanto costituiscono una composizione a tre, come appunto in figura. Ora, dal momento che il prodotto vettoriale tra due vettori (modulo = prodotto dei moduli per il seno dell'angolo tra loro) dà come risultato ancora un vettore che è ortogonale ai primi due, allora, per ottenere il vettore normale alla superficie Σ , effettuo il prodotto vettoriale tra $\frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du}$ e $\frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv}$ e se poi voglio il versore $\hat{n}$ (modulo unitario) dividerò per il modulo del vettore normale:

$$\hat{n} = \frac{\frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du} \times \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv}}{\left| \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du} \times \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv} \right|} \quad (\text{versore normale}) \quad (1.10)$$

Per quanto riguarda l'area di una superficie (in generale) curva, sappiamo dalla geometria elementare che l'area di un trapezio è data dal prodotto dei due lati per il seno dell'angolo da essi formato e ricordando la definizione di prodotto vettoriale riportata qui sopra, possiamo allora dire che l'areola $d\Sigma$ individuata dai due vettorini $\frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du}$ e $\frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv}$ (Fig. 1.4) è:

$$d\Sigma = \left| \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du} \times \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv} \right|, \text{ da cui, per integrazione su tutto } u \text{ e } v: \quad (1.11)$$

$$\Sigma = \int_\Sigma d\Sigma = \iint_{u,v} \left| \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du} \times \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv} \right| du dv$$

Par. 1.2: Geometria differenziale di base.

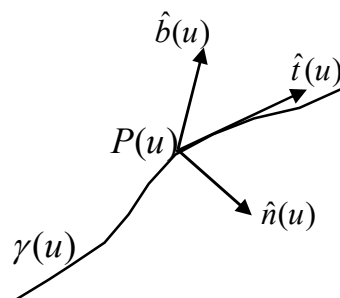


Fig. 1.5: Triangolo fondamentale.

Abbiamo visto con la (1.8) che il vettore $\vec{t}(u) = \frac{d\vec{\tau}_\gamma(u)}{du} = \vec{\tau}'_\gamma(u)$ è tangente alla curva $\gamma(u)$.

Volendo noi un versore $\hat{t}$ (modulo unitario), avremo:

$$\hat{t}(u) = \frac{\vec{\tau}'_\gamma(u)}{|\vec{\tau}'_\gamma(u)|} \quad (\text{versore tangente}) \quad (1.12)$$

Quindi, sempre con la (1.8) abbiamo visto che l'operazione di derivazione fornisce un vettore ortogonale.

Deriviamo ora la (1.12), ottenendo il versore normale $\hat{n}(u)$:

$$\hat{n}(u) = \frac{d}{du} \hat{t}(u) \quad (\text{versore normale}) \quad (1.13)$$

Per ultimo, definiamo il versore binormale $\hat{b}(u)$, ovviamente nel seguente modo, utilizzando il prodotto vettoriale:

$$\hat{b}(u) = \hat{t}(u) \times \hat{n}(u) \quad (\text{versore binormale}) \quad (1.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{t}(u) = \frac{\vec{\tau}'_\gamma(u)}{|\vec{\tau}'_\gamma(u)|} \\ \hat{n}(u) = \frac{d}{du} \hat{t}(u) \\ \hat{b}(u) = \hat{t}(u) \times \hat{n}(u) \end{array} \right. \quad (\text{triedro fondamentale con parametro generico } u) \quad (1.15)$$

Vedemmo poi con la (1.7) che la lunghezza di un arco è pari a:

$$s(u) = \int_{s(A-B)} |d\vec{s}| = \int_{s(A-B)} |d\vec{\tau}_\gamma(u)| = \int_{s(A-B)} |\vec{\tau}'_\gamma(u)| du = \int_{u_0}^u |\vec{\tau}'_\gamma(u)| du \quad (1.16)$$

$$\text{da cui: } s'(u) = \frac{ds}{du} = |\vec{\tau}'_\gamma(u)|.$$

Se ora nel triedro (1.15) effettuiamo un cambio di parametro ($u \gg s$, con s parametro intrinseco), si avrà:

$$\vec{\tau}'_\gamma(s) = \vec{\tau}'_\gamma[u(s)] = \frac{d\vec{\tau}_\gamma(u)}{du} \frac{du}{ds} = \vec{\tau}'_\gamma(u) \frac{1}{s'(u)}, \text{ da cui:}$$

$$|\vec{\tau}'_\gamma(s)| = \frac{|\vec{\tau}'_\gamma(u)|}{|s'(u)|} = 1. \quad \text{Poi:}$$

$$\vec{\tau}''_\gamma(s) = \frac{\vec{\tau}''_\gamma(u) \frac{du}{ds} s'(u) - \vec{\tau}'_\gamma(u) s''(u) \frac{du}{ds}}{(s'(u))^2} = \frac{\vec{\tau}''_\gamma(u) - \vec{\tau}'_\gamma(u) s''(u) \frac{du}{ds}}{(s'(u))^2}$$

ed otteniamo così il triedro fondamentale nella parametrizzazione intrinseca:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{t}(s) = \vec{\tau}'_\gamma(s) \\ \hat{n}(s) = \frac{\vec{\tau}''_\gamma(s)}{|\vec{\tau}''_\gamma(s)|} \\ \hat{b}(s) = \hat{t}(s) \times \hat{n}(s) = \frac{\vec{\tau}'_\gamma(s) \times \vec{\tau}''_\gamma(s)}{|\vec{\tau}''_\gamma(s)|} \end{array} \right. \quad (\text{triedro fondamentale con parametro intrinseco } s) \quad (1.17)$$

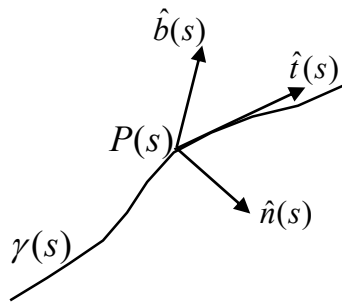


Fig. 1.6: Triangolo fondamentale nella parametrizzazione intrinseca.

curvatura e raggio di curvatura:

$|\vec{\tau}''_\gamma(s)|$ è nullo per le rette, mentre è $\neq 0$ sulle circonferenze ecc.

$|\vec{\tau}''_\gamma(s)|$ è definito come CURVATURA di γ in $\vec{\tau}_\gamma(s)$.

$$\rho(s) = \frac{1}{|\vec{\tau}''_\gamma(s)|} \quad (1.18)$$

è il RAGGIO DI CURVATURA.

Esempio del cerchio (sul piano x-y):

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (z=0)$$

$$x = r \cos \alpha = r \cos\left(\frac{s}{r}\right), \quad y = r \sin \alpha = r \sin\left(\frac{s}{r}\right), \quad z=0 \quad (\text{dove } s = \alpha r \text{ è l'arco di circonferenza}),$$

dunque: $\vec{\tau}_\gamma(s) = (x, y, z) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}), 0)$ da cui:

$$\vec{\tau}'_\gamma(s) = \frac{d\vec{\tau}_\gamma(s)}{ds} = (x', y', z') = (-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}), 0) \text{ e dunque:}$$

$$\vec{\tau}''_\gamma(s) = \frac{d\vec{\tau}'_\gamma(s)}{ds} = (x'', y'', z'') = (-\frac{1}{r} \cos(\frac{s}{r}), -\frac{1}{r} \sin(\frac{s}{r}), 0), \text{ da cui, ancora:}$$

$$|\vec{\tau}''_\gamma(s)| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \frac{1}{r} \text{ (curvatura)!!}$$

la torsione:

$\hat{b}'(s)$ è // a $\hat{n}(s)$; infatti:

$$\frac{d}{ds} \hat{b}(s) = \frac{d}{ds} (\hat{t}(s) \times \hat{n}(s)) = \frac{d}{ds} \hat{t}(s) \times \hat{n}(s) + \hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{n}(s) = \vec{\tau}''_\gamma(s) \times \hat{n}(s) + \hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{n}(s) = \hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{n}(s)$$

Ora osserviamo che, essendo $\hat{n}(s)$ un versore (modulo 1 costante), $\frac{d}{ds} \hat{n}(s)$ non rappresenta una variazione del modulo di $\hat{n}(s)$, ossia lungo la sua estensione di vettore, ma, di conseguenza, è una variazione solo ortogonalmente allo stesso $\hat{n}(s)$, dunque possiamo dire che: $\frac{d}{ds} \hat{n}(s) \perp \hat{n}(s)$, e parlandosi di terna ortogonale, si ha anche che

(ovviamente) $[\hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{n}(s)] \parallel \hat{n}(s)$ e dunque viene ad essere proporzionale a $\hat{n}(s)$:

$$\hat{b}'(s) = -\frac{1}{\tau(s)} \hat{n}(s); \quad (1.19)$$

$\frac{1}{\tau(s)}$ è la TORSIONE di γ in $\vec{\tau}_\gamma(s)$.

Vi è ora un legame tra curvatura e torsione, espresso dalle seguenti:

formule di Frénet:

dalle prime due delle (1.17) e dalla (1.18) si ha la seguente: $\hat{t}'(s) = \frac{1}{\rho(s)} \hat{n}(s)$. Poi, si ha la

(1.19): $\hat{b}'(s) = -\frac{1}{\tau(s)} \hat{n}(s)$. Inoltre, dall'ultima delle (1.17) scaturisce che: $\hat{n}(s) = \hat{b}(s) \times \hat{t}(s)$ e

quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \hat{n}(s) &= \frac{d}{ds} (\hat{b}(s) \times \hat{t}(s)) = \hat{b}'(s) \times \hat{t}(s) + \hat{b}(s) \times \hat{t}'(s) = -\frac{1}{\tau(s)} \hat{n}(s) \times \hat{t}(s) + \hat{b}(s) \times \frac{1}{\rho(s)} \hat{n}(s) = \\ &= \frac{1}{\tau(s)} \hat{b}(s) - \frac{1}{\rho(s)} \hat{t}(s) \end{aligned}$$

da cui le formule di Frénet:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{t}'(s) &= \frac{1}{\rho(s)} \hat{n}(s) \\ \hat{b}'(s) &= -\frac{1}{\tau(s)} \hat{n}(s) \\ \hat{n}'(s) &= \frac{1}{\tau(s)} \hat{b}(s) - \frac{1}{\rho(s)} \hat{t}(s) \end{aligned} \right. \quad \text{(formule di Frénet)} \quad (1.20)$$

Curiosità: un corpo che si muove lungo una curva potrà ovviamente avere una accelerazione tangenziale a_t ed una accelerazione centrifuga a_c che, dalla fisica, sappiamo essere v^2/r . Vediamo ora se le nostre equazioni e tutto il formalismo finora esposto confermano ciò. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}_\gamma(s)}{dt} &= \frac{d\vec{\tau}_\gamma(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{t}(s) \\ \frac{d^2\vec{\tau}_\gamma(s)}{dt^2} &= \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t}(s) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t}(s) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{\rho(s)} \hat{n}(s) = \boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = a_t \hat{t}(s) + \frac{v^2}{\rho} \hat{n}(s)} \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

Par. 1.3: Geometria differenziale dello spazio.

prima forma fondamentale:

abbiamo visto con la (1.4) che una superficie è rappresentabile come segue:

$\vec{\tau}_\Sigma = \tau_1(u, v) \hat{x} + \tau_2(u, v) \hat{y} + \tau_3(u, v) \hat{z}$, ossia: $\vec{\tau}_\Sigma = \vec{\tau}_\Sigma(u, v)$ ed in forma differenziale:

$$d\vec{\tau}_\Sigma = \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du} du + \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv} dv = \vec{\tau}_u du + \vec{\tau}_v dv$$

Definiamo allora la 1^ forma fondamentale di $\vec{\tau}_\Sigma(u, v)$ come segue:

$$I = d\vec{\tau}_\Sigma \cdot d\vec{\tau}_\Sigma = (\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_u) du^2 + 2(\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_v) du dv + (\vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_v) dv^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

con $E = (\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_u)$, $F = (\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_v)$, $G = (\vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_v)$

Se ora si effettua un cambio di parametri ($\vec{r}(u,v) \gg \vec{r}^*(\theta,\phi)$), cambiano i coefficienti E, F e G, ma $I=I^*$:

$$I^*(d\theta, d\phi) = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = |d\vec{r}|^2 = |\vec{r}_\theta^* d\theta + \vec{r}_\phi^* d\phi|^2 = |\vec{r}_\theta^*(\theta_u du + \theta_v dv) + \vec{r}_\phi^*(\phi_u du + \phi_v dv)|^2 =$$

$$= |(\vec{r}_\theta^* \theta_u + \vec{r}_\phi^* \phi_u) du + (\vec{r}_\theta^* \theta_v + \vec{r}_\phi^* \phi_v) dv|^2 = |\vec{r}_u^* du + \vec{r}_v^* dv|^2 = |d\vec{r}|^2 = I(du, dv)$$

lunghezza di un arco:

Si abbia un arco $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$; (1.21)

qui compaiono ancora i due parametri u e v caratteristici delle superfici, ma avendo sottolineato la loro reciproca dipendenza da un sol parametro comune t, la (1.21) è allora anche l'espressione di una curva (su cui l'arco). Per la lunghezza s tra a e b, si ha allora, ovviamente:

$$s = \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^{1/2} dt = \int_a^b \left[\left(\vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \right) \right]^{1/2} dt =$$

$$= \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \quad (1.22)$$

area A della superficie:

Con la (1.11) vedemmo che $A = \int_A dA = \iint_{u-v} |d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v| du dv$

Ora, dal momento che vale la seguente identità vettoriale: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$, si ha allora: $|d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v|^2 = EG - F^2$ e dunque:

$$A = \int_A dA = \iint_{u-v} |d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v| du dv = \iint_{u-v} \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (1.23)$$

-esempio 1: lunghezza di una circonferenza:

abbiamo già visto con la (1.2) che la sfera (Fig. 1.1) si rappresenta con la seguente equazione: $\vec{r} = (r \cos \theta \sin \phi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \phi) \hat{y} + (r \cos \phi) \hat{z}$.

Se ora consideriamo la circonferenza equatoriale massima (vedi Fig. 1.1), la stessa la si individua ponendo $\phi=90^\circ$, da cui:

$\vec{r} = (r \cos \theta) \hat{x} + (r \sin \theta) \hat{y} \dots (+0\hat{z})$ ed ho una $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{r}(\theta(t), r(t))$, proprio come nella (1.21), da cui:

$$\vec{r}_\theta = -(r \sin \theta) \hat{x} + (r \cos \theta) \hat{y}$$

$$\vec{r}_r = -\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y},$$

$$E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2, \quad F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_r = -r \cos \theta \sin \theta + r \cos \theta \sin \theta = 0,$$

$$G = \vec{r}_r \cdot \vec{r}_r = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \text{ e la (1.22) ci fornisce dunque } (r=\text{cost} \rightarrow \frac{dr}{dt} = 0):$$

$$s = \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt = \int_a^b \left[E \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2F \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + G \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt =$$

$$= \int_a^b \left[E \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt = \int_a^b \sqrt{E} \frac{d\theta}{dt} dt = \int_a^b r \omega dt = r \omega T = r \frac{2\pi}{T} T = 2\pi r = C$$

cioè proprio la circonferenza del cerchio!!!

-esempio 2: superficie della sfera:

consideriamo sempre la nostra sfera (Fig. 1.1), che per la (1.2) si rappresenta con la seguente equazione:

$$\vec{r} = (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + (r \cos \varphi) \hat{z}, \text{ da cui:}$$

$$\vec{r}_\theta = -(r \sin \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{y}$$

$$\vec{r}_\varphi = (r \cos \theta \cos \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \cos \varphi) \hat{y} - (r \sin \varphi) \hat{z}$$

$$E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = r^2 \sin^2 \varphi, \quad F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0, \quad G = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = r^2, \text{ e, per la (1.23), si ottiene:}$$

$$A = \int_A dA = \iint_{\theta-\varphi} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \iint_{\theta-\varphi} \sqrt{r^4 \sin^2 \varphi - 0} d\theta d\varphi = \iint_{\theta-\varphi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi =$$

$$= r^2 \int_{\theta} d\theta \int_{\varphi} \sin \varphi d\varphi = r^2 2\pi \left| -\cos \varphi \right|_0^\pi = r^2 2\pi \cdot 2 = 4\pi r^2$$

e cioè proprio la superficie della sfera che noi tutti conosciamo!!!

seconda forma fondamentale:

riscriviamo qui la (1.10), che ci fornisce un vettore/versore $\vec{N}$ normale alla superficie:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}; \text{ si ha poi, ovviamente: } |\vec{N}| = 1 \text{ e } 0 = d(1) = d(\vec{N} \cdot \vec{N}) = 2d\vec{N} \cdot \vec{N}, \text{ da cui:}$$

$$d\vec{N} \perp \vec{N}. \quad (1.24)$$

Se così è, allora $d\vec{N}$ giace sulla superficie, e dunque è esprimibile, a maggior ragione, come segue (u,v):

$$d\vec{N} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} dv = \vec{N}_u du + \vec{N}_v dv \quad (1.25)$$

Possiamo ora definire la seconda forma fondamentale II:

$$II = -d\vec{r} \cdot d\vec{N} = -(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{N}_u du + \vec{N}_v dv) = -\vec{r}_u \vec{N}_u du^2 - (\vec{r}_u \vec{N}_v + \vec{r}_v \vec{N}_u) dudv - \vec{r}_v \vec{N}_v dv^2 =$$
$$= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

proprietà di II:

visto che si ha che: $(\vec{r}_u, \vec{r}_v) \perp \vec{N}$, segue che $0 = (\vec{r}_u \cdot \vec{N})_u = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N} + \vec{r}_u \cdot \vec{N}_u$,

$$0 = (\vec{r}_u \cdot \vec{N})_v = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} + \vec{r}_u \cdot \vec{N}_v, \quad 0 = (\vec{r}_v \cdot \vec{N})_u = \vec{r}_{vu} \cdot \vec{N} + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_u, \quad 0 = (\vec{r}_v \cdot \vec{N})_v = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_v,$$

quindi: $\vec{r}_{uu} \cdot \vec{N} = -\vec{r}_u \cdot \vec{N}_u$, $\vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} = -\vec{r}_v \cdot \vec{N}_v$, $\vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} = -\vec{r}_u \cdot \vec{N}_v$, $\vec{r}_{vu} \cdot \vec{N} = -\vec{r}_v \cdot \vec{N}_u$ e allora:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{N}, \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} \text{ da cui:}$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N} du^2 + 2\vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} dudv + \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} dv^2 = d^2 \vec{r} \cdot \vec{N}$$

curvatura normale:

Se si ha una superficie S contenente una curva C e se P è un punto su C, la (1.20-1) ci fornisce il vettore curvatura, mentre definiamo curvatura $\hat{t}'_n(s)$ normale a C in P la proiezione del vettore curvatura $\hat{t}'(s)$ sulla normale $\vec{N}$ (ed $\vec{N}$ è il versore $\hat{n}(s)$ della (1.10)): $\hat{t}'_n(s) = (\hat{t}'(s) \cdot \vec{N}) \vec{N}$ e la componente lungo $\vec{N}$ è: $t_n = \hat{t}'(s) \cdot \vec{N}$.

Ora, visto che $\hat{t}(s) \perp \vec{N}$, si ha:

$\frac{d}{ds}(\hat{t}(s) \cdot \vec{N}) = 0 = \hat{t}'(s) \cdot \vec{N} + \hat{t}(s) \cdot \frac{d}{ds} \vec{N}$, da cui: $\hat{t}'(s) \cdot \vec{N} = -\hat{t}(s) \cdot \frac{d}{ds} \vec{N}$ e allora:

$t_n = \hat{t}'(s) \cdot \vec{N} = -\hat{t}(s) \cdot \frac{d}{ds} \vec{N} = -\frac{d\vec{\tau}_\gamma(s)}{ds} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{d\vec{\tau}_\gamma \cdot d\vec{N}}{ds^2} = \frac{II}{I}$, in quanto il numeratore $d\vec{\tau}_\gamma \cdot d\vec{N}$ è proprio la definizione di II, mentre ds^2 lo si può valutare derivando la (1.22) e quadrando, e si ha proprio I.

esempio: curvatura normale della sfera

abbiamo già visto con la (1.2) che la sfera (Fig. 1.1) si rappresenta con la seguente equazione:

$\vec{r} = (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + (r \cos \varphi) \hat{z}$ da cui:

$$\vec{r}_\theta = -(r \sin \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{y}$$

$$\vec{r}_\varphi = (r \cos \theta \cos \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \cos \varphi) \hat{y} - (r \sin \varphi) \hat{z}$$

$$\vec{r}_{\theta\theta} = -(r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} - (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y}$$

$$\vec{r}_{\theta\varphi} = -(r \sin \theta \cos \varphi) \hat{x} + (r \cos \theta \cos \varphi) \hat{y}$$

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = -(r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} - (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} - (r \cos \varphi) \hat{z}$$

$$\vec{N} = -(r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} - (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} - (r \cos \varphi) \hat{z}$$

$$E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = r^2 \sin^2 \varphi, \quad F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0, \quad G = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = r^2, \quad L = \vec{r}_{\theta\theta} \cdot \vec{N} = r \sin^2 \varphi, \quad M = \vec{r}_{\theta\varphi} \cdot \vec{N} = 0$$

$$N = \vec{r}_{\varphi\varphi} \cdot \vec{N} = r, \text{ da cui:}$$

$$t_n = \frac{Ld\theta^2 + 2Md\theta d\varphi + Nd\varphi^2}{Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\varphi + Gd\varphi^2} = \boxed{\frac{1}{r}} !!!$$

curvature e direzioni principali:

le due direzioni, perpendicolari tra loro, dove t_n assume valori massimo e minimo, sono dette direzioni principali e le corrispondenti curvature normali t_1 e t_2 sono le curvature principali.

Teorema: t_0 è principale con direzione principale du_0, dv_0 se e solo se du_0, dv_0 e t_0 soddisfano le condizioni:

$$\begin{cases} (L - t_0 E) du_0 + (M - t_0 F) dv_0 = 0 \\ (M - t_0 F) du_0 + (N - t_0 G) dv_0 = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

dimostrazione:

t_n è un estremante se ($t_n = II/I$)

$$\left. \frac{dt_n}{du} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dt_n}{dv} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0, \text{ cioè: } \left. \frac{I \cdot II_{du} - II \cdot I_{du}}{I^2} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0 \text{ e:}$$

$$\left. \frac{I \cdot II_{dv} - II \cdot I_{dv}}{I^2} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0. \text{ Ora, moltiplicando per } I, \text{ si ha:}$$

$$\left. H_{du} - \frac{H}{I} I_{du} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0, \text{ e: } \left. H_{dv} - \frac{H}{I} I_{dv} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0 \text{ ma: } \frac{H}{I}(du_0, dv_0) = t_0, \text{ dunque:}$$

$$\left. H_{du} - t_0 I_{du} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0 \text{ e } \left. H_{dv} - t_0 I_{dv} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0. \text{ Essendo ora:}$$

$$H_{du} = 2Ldu + 2Mdv \text{ e } I_{du} = 2Edu + 2Fdv \text{ e dunque:}$$

$$\begin{cases} (Ldu_0 + Mdv_0) - t_0(Edu_0 + Fdv_0) = 0 \\ (Mdu_0 + Ndv_0) - t_0(Fdu_0 + Gdv_0) = 0 \end{cases}$$

e cioè l'asserto.

Riscriviamo ora le (1.26) nel seguente modo:

$$\begin{cases} (L - tE)du + (M - tF)dv = 0 \\ (M - tF)du + (N - tG)dv = 0 \end{cases}$$

e moltiplichiamo membro a membro:

$$(EG - F^2)t^2 - (EN + GL - 2FM)t + (LN - M^2) = 0. \quad (1.27)$$

Le due soluzioni sono le curvature principali.

curvatura di Gauss e curvatura media:

dividendo la (1.27) precedente per $(EG - F^2)$, otteniamo: $t^2 - 2Ht + K = 0$, con:

$$H = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \text{ (curvatura media) e } K = t_1 t_2 \text{ (curvatura di Gauss). } (K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2})$$

equazioni di Gauss-Weingarten:

$\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v$, ed $\vec{N}$ abbiamo visto che sono linearmente indipendenti (ortogonali) e dunque possiamo utilizzarli come base per scrivere le loro derivate:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\tau}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{\tau}_v + b_{11} \vec{N} \\ \vec{\tau}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{\tau}_v + b_{12} \vec{N} \\ \vec{\tau}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{\tau}_v + b_{22} \vec{N} \end{aligned} \right\} \text{ Gauss} \quad (1.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{N}_u &= \beta_1^1 \vec{\tau}_u + \beta_1^2 \vec{\tau}_v + \gamma_1 \vec{N} \\ \vec{N}_v &= \beta_2^1 \vec{\tau}_u + \beta_2^2 \vec{\tau}_v + \gamma_2 \vec{N} \end{aligned} \right\} \text{ Weingarten}$$

dove i Γ_{ij}^k sono i simboli di Christoffel di 2^a specie.

Abbiamo visto con la (1.24) che: $d\vec{N} \perp \vec{N}$ e la (1.25) ci dice che $d\vec{N}$ è esprimibile in termini di $\vec{N}_u, \vec{N}_v$, da cui discende che $\vec{N} \perp (\vec{N}_u, \vec{N}_v)$ e, per le equazioni di Weingarten, possiamo scrivere che:

$$0 = \vec{N}_u \cdot \vec{N} = \beta_1^1 \vec{\tau}_u \cdot \vec{N} + \beta_1^2 \vec{\tau}_v \cdot \vec{N} + \gamma_1 \vec{N} \cdot \vec{N}$$

$$0 = \vec{N}_v \cdot \vec{N} = \beta_2^1 \vec{\tau}_u \cdot \vec{N} + \beta_2^2 \vec{\tau}_v \cdot \vec{N} + \gamma_2 \vec{N} \cdot \vec{N}$$

ma sappiamo anche che: $\vec{\tau}_u \cdot \vec{N} = \vec{\tau}_v \cdot \vec{N} = 0$ e $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$, da cui: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e quindi le (1.28) si semplificano un po', come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\tau}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{\tau}_v + b_{11} \vec{N} \\ \vec{\tau}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{\tau}_v + b_{12} \vec{N} \\ \vec{\tau}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{\tau}_v + b_{22} \vec{N} \end{array} \right\} \text{ Gauss} \quad (1.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_u = \beta_1^1 \vec{\tau}_u + \beta_1^2 \vec{\tau}_v \\ \vec{N}_v = \beta_2^1 \vec{\tau}_u + \beta_2^2 \vec{\tau}_v \end{array} \right\} \text{ Weingarten}$$

Scriviamo le (1.29), più semplicemente, in forma TENSORIALE, più compendiosa:

$$\vec{\tau}_{ij} = \Gamma_{ij}^\alpha \vec{\tau}_\alpha + b_{ij} \vec{N} \quad (i,j=1,2) \quad (1.30)$$

e ricordiamoci bene che, con la (1.30), si è appena iniziato a fare uso della CONVENZIONE DI EINSTEIN, secondo cui, se in un termine un indice è ripetuto, su esso è sottintesa la sommatoria su quell'indice. Infatti, nel termine $\Gamma_{ij}^\alpha \vec{\tau}_\alpha$ della (1.30), α è ripetuto e dunque tale termine darà due valori, esattamente come succede nelle equazioni (1.29) di Gauss.

II TENSORE METRICO g_{ij} :

rivediamo un attimo la nostra terminologia sin qui usata, usando forme un po' più compendiose:

$$u = u^1, \quad v = u^2, \quad u^i = (u, v), \quad \vec{\tau}_i = \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial u^i}, \quad \vec{\tau}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{\tau}}{\partial u^i \partial u^j};$$

$$I = d\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_1 du^1 du^1 + 2\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 du^1 du^2 + \vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_2 du^2 du^2 = g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2 = \sum_{i,k} g_{ik} du^i du^k = g_{ik} du^i du^k, \text{ con: } g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G \text{ e:}$$

$$g = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{11} g_{22} - g_{21} g_{12} = EG - F^2 = g \quad (1.31)$$

Inoltre: $d\vec{N} = \vec{N}_1 du^1 + \vec{N}_2 du^2$ e:

$$II = -d\vec{\tau} \cdot d\vec{N} = -\vec{\tau}_1 \cdot \vec{N}_1 du^1 du^1 - \vec{\tau}_1 \cdot \vec{N}_2 du^1 du^2 - \vec{\tau}_2 \cdot \vec{N}_1 du^2 du^1 - \vec{\tau}_2 \cdot \vec{N}_2 du^2 du^2 = \\ = b_{11} du^1 du^1 + b_{12} du^1 du^2 + b_{21} du^2 du^1 + b_{22} du^2 du^2 = \sum_{i,k} b_{ik} du^i du^k$$

$$\text{con: } b_{11} = L, \quad b_{12} = b_{21} = M, \quad b_{22} = N \text{ e: } b = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12} = LN - M^2 = b.$$

Moltiplichiamo ora scalarmente le eq. di Gauss per $\vec{\tau}_k$ si ha:

$$\vec{\tau}_{ij} \cdot \vec{\tau}_k = \Gamma_{ij}^\alpha \vec{\tau}_\alpha \cdot \vec{\tau}_k + b_{ij} \vec{N} \cdot \vec{\tau}_k = \Gamma_{ij}^\alpha \vec{\tau}_\alpha \cdot \vec{\tau}_k + 0 = \Gamma_{ij}^\alpha \vec{\tau}_\alpha \cdot \vec{\tau}_k = \Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha k} = \Gamma_{ijk} \quad (\alpha, i, j = 1, 2)$$

Γ_{ijk} sono i simboli di Christoffel di 1^a specie.

Ricordiamo poi che: $g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta_i^j$ (definizione di $g^{\alpha j}$), con δ_i^j che è la Delta di Kronecker, e vale 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$; infatti: $g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_\alpha \cdot \vec{\tau}^\alpha \cdot \vec{\tau}^j = \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}^j \cdot \vec{\tau}_\alpha \cdot \vec{\tau}^\alpha = \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}^j \cdot 1 = \delta_i^j$, in quanto $\vec{\tau}_i$ e $\vec{\tau}^j$ sono, per definizione, normali, se $i \neq j$ (definizione di $\vec{\tau}^j$).

Da ciò si ha allora: $\Gamma_{ij\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^\alpha \delta_\alpha^k = \Gamma_{ij}^k$ e dunque: $\Gamma_{ijk} = g_{k\alpha} \Gamma_{ij}^\alpha$ e

$$\Gamma_{ij}^k = g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha}. \quad (1.32)$$

$$\text{-Si ha che: } \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \quad (1.33)$$

dimostrazione:

si ha, per definizione di g_{ij} , che: $g_{ij} = \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j$, da cui:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \vec{\tau}_{ik} \cdot \vec{\tau}_j + \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_{jk} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$$

-Si ha poi che: $\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$ (1.34)

dimostrazione:

si ha, per la (1.33), che: $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij}$, $\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk}$ e $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$, (si tratta sempre della (1.33), ma con indici ogni volta diversi, ma, del resto, gli indici hanno valore 1 e 2, indipendentemente dal loro nome), da cui l'asserto.

Segue che:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} \right)$$
 (1.35)

e inoltre, moltiplicando la (1.32) $\Gamma_{ij}^k = g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha}$ in entrambi i membri per $g_{\mu\alpha}$ (reciproco di $g^{k\alpha}$), dove appunto, per definizione di reciproco: $g_{\mu\alpha} g^{k\alpha} = \delta_\mu^k$, si ha:

$g_{\mu\alpha} \Gamma_{ij}^k = g_{\mu\alpha} g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha} = \delta_\mu^k \Gamma_{ij\alpha}$, ossia, rimuovendo in quest'ultima δ_μ^k a condizione di porre $\mu = k$ nel suo primo membro, si ha:

$\Gamma_{ij\alpha} = g_{\mu\alpha} \Gamma_{ij}^\mu$ e, grazie a quest'ultima, la (1.33) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$ diventa:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = g_{\mu j} \Gamma_{ik}^\mu + g_{\mu i} \Gamma_{\alpha k}^\mu$$
 (1.36)

Moltiplicando scalarmente per $\vec{\tau}_j$ le equazioni di Weingarten (1.29) $\vec{N}_i = \beta_i^\alpha \vec{\tau}_\alpha$, si ottiene:

$-b_{ij} = \vec{N}_i \cdot \vec{\tau}_j = \beta_i^\alpha \vec{\tau}_\alpha \cdot \vec{\tau}_j = \beta_i^\alpha g_{\alpha j}$; ponendo ora: $b_i^j = b_{i\alpha} g^{\alpha j}$, si ha:

$b_i^j = b_{i\gamma} g^{\gamma j} = -\beta_i^\alpha g_{\alpha\gamma} g^{\gamma j} = -\beta_i^\alpha \delta_\alpha^j = -\beta_i^j$; dunque $\vec{N}_i = -b_i^\alpha \vec{\tau}_\alpha$, con:

$b_i^j = g^{\alpha j} b_{i\alpha}$ e $b_{ij} = g_{\alpha j} b_i^\alpha$

i simboli (tensori) di Riemann di 1^ e 2^ specie:

$$R_{mijk} = b_{ik} b_{jm} - b_{ij} b_{km} \quad (2^{\text{a}} \text{ specie, tensore di rango 4})$$
 (1.37)

$$R_{ijk}^\rho = g^{\alpha\rho} R_{\alpha ijk} \quad (1^{\text{a}} \text{ specie, tensore di rango 4})$$
 (1.38)

R_{mijk} è il tensore di curvatura di Riemann covariante

R_{ijk}^ρ è il tensore di curvatura di Riemann misto

Ovviamente: $R_{ijk}^\rho = g^{\alpha\rho} R_{\alpha ijk} = g^{\alpha\rho} (b_{ik} b_{j\alpha} - b_{ij} b_{k\alpha}) = b_{ik} b_j^\rho - b_{ij} b_k^\rho$ (1.39)

Per la (1.37), si ha: $R_{imjk} = -R_{mijk}$, $R_{mikj} = -R_{mijk}$; inoltre $R_{mijk} = 0$ se i primi due indici, o gli ultimi due, coincidono, dunque, solo quattro componenti sono diverse da zero e sono:

$$R_{1212} = R_{2121} = b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21} = LN - M^2 = b \quad \text{e} \quad R_{1221} = R_{2112} = b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11} = -(LN - M^2) = -b$$

Notiamo che: $\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b}{g} = \frac{R_{1212}}{g} = K(\text{Gauss})$. (1.40)

$$-Si\ ha\ che: R_{ijk}^{\alpha} = (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j - (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k + \Gamma_{ik}^{\beta}\Gamma_{\beta j}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta}\Gamma_{\beta k}^{\alpha} \quad (1.41)$$

dimostrazione:

$$\vec{\tau}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha} + b_{ij} \vec{N} \quad >>>$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}_{ij}}{\partial u^k} &= \vec{\tau}_{ijk} = (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k \vec{\tau}_{\alpha} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha k} + (b_{ij})_k \vec{N} + b_{ij} \vec{N}_k = (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k \vec{\tau}_{\alpha} + \Gamma_{ij}^{\alpha} (\Gamma_{\alpha k}^{\beta} \vec{\tau}_{\beta} + b_{\alpha k} \vec{N}) + \\ &+ (b_{ij})_k \vec{N} + b_{ij} (-b_k^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha}) = [(\Gamma_{ij}^{\alpha})_k + \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} - b_{ij} b_k^{\alpha}] \vec{\tau}_{\alpha} + [\Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} + (b_{ij})_k] \vec{N} \end{aligned}$$

dove si è usata la eq. di Weingarten $\vec{N}_i = -b_i^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha}$.

$$\text{Analogamente: } \vec{\tau}_{ikj} = [(\Gamma_{ik}^{\alpha})_j + \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - b_{ik} b_j^{\alpha}] \vec{\tau}_{\alpha} + [\Gamma_{ik}^{\alpha} b_{\alpha j} + (b_{ik})_j] \vec{N}$$

Ora, le derivate del terzo ordine sono indipendenti dall'ordine di derivazione se e solo se:

$$\vec{\tau}_{ijk} = \vec{\tau}_{ikj}, \text{ ossia:}$$

$$\vec{\tau}_{ijk} - \vec{\tau}_{ikj} = [(\Gamma_{ij}^{\alpha})_k - (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j + \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} - \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - b_{ij} b_k^{\alpha} + b_{ik} b_j^{\alpha}] \vec{\tau}_{\alpha} + [\Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} + (b_{ij})_k - \Gamma_{ik}^{\alpha} b_{\alpha j} - (b_{ik})_j] \vec{N} = 0$$

e dato che $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ ed $\vec{N}$ sono linearmente indipendenti, l'equazione precedente equivale a dire che:

$$[(\Gamma_{ij}^{\alpha})_k - (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j + \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} - \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - b_{ij} b_k^{\alpha} + b_{ik} b_j^{\alpha}] = 0 \quad (1.42)$$

$$[\Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} + (b_{ij})_k - \Gamma_{ik}^{\alpha} b_{\alpha j} - (b_{ik})_j] = 0$$

La (1.42), mediante la (1.39), fornisce: $R_{ijk}^{\alpha} = (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j - (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k + \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha}$, cioè l'asserto.

Capitolo 2: Le grandezze salienti della Teoria della Relatività Generale .

Par. 2.1: Concetti introduttivi sulla Relatività Generale.

Si rilegga innanzitutto l'Introduzione.

Inoltre, sappiamo dalla TRR che la contrazione di Lorentz avviene nella direzione del moto, dunque, se si ha un sistema in rotazione, o un punto che ruota, ad esempio, su un cerchio, ci si troverà a muoversi, in certe fasi lungo x, poi lungo x ed y, poi magari anche lungo z, dunque la contrazione di Lorentz non agisce sempre lungo una sola coordinata e, dunque, il cerchio percorso risulterebbe, agli occhi di un sistema di riferimento in rotazione, dunque non inerziale, schiacciato, in qualche modo, dunque modificato geometricamente.

Se, infatti, in un sistema inerziale I abbiamo:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k, \text{vedere oltre}) \quad (2.1)$$

in un altro sistema I' in accelerazione lungo x rispetto al primo, si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x' + \frac{1}{2} a t^2 \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right. \quad \text{e:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = dx' + a t' dt' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = dt' \end{array} \right. \quad \text{da cui:}$$

$$d\tau^2 = c^2 dt'^2 - (dx' + at' dt')^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad \text{oppure} \quad (2.2)$$

$$d\tau^2 = (c^2 - a^2 t'^2) dt'^2 - 2at' dx' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (2.3)$$

Se poi abbiamo anche un altro sistema I' col piano x - y in rotazione (a velocità angolare ω) rispetto a quello del primo, avendosi il seguente sistema di trasformazione:

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{cases}$$

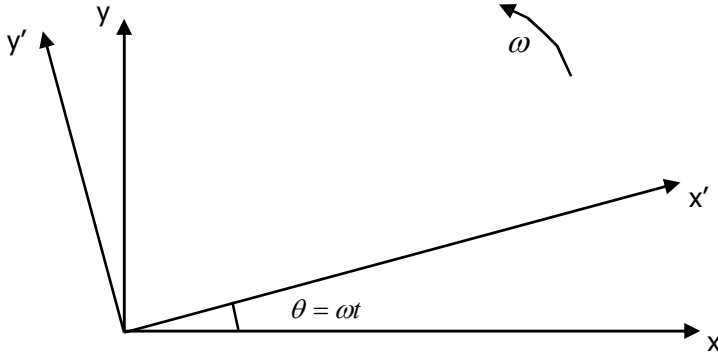


Fig. 2.1: Due sistemi di riferimento, uno in rotazione rispetto all'altro.

e ricordando che, banalmente, ad esempio, $d(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t \cdot dt$ ecc, si ha per $d\tau^2$:

$$d\tau^2 = [c^2 - \omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (2.4)$$

e si vede che in nessun caso ((2.2), (2.3), e (2.4), che sono del tipo $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$; vedere oltre) si può ridurre $d\tau^2$, tramite trasformazioni temporali, alla somma algebrica dei quadrati dei differenziali delle quattro coordinate, come nella (2.1) e come sarebbe invece per un altro sistema di riferimento inerziale.

Dunque, la presenza di accelerazioni rettilinee dei sistemi di riferimento (che possono annullare i campi gravitazionali) e anche centrifughe/centripete, ossia centrali, come per la gravità (ad esempio, in seguito a rotazioni), introducono termini misti che cambiano la metrica, e dunque la geometria dello spazio/spazio-tempo. Da qui l'esigenza di formulare una teoria relativistica per la gravitazione (TRG).

Par. 2.2: Sul tensore metrico ed altre grandezze salienti.

Quando abbiamo trattato le equazioni di Gauss-Weingarten, poco sopra, abbiamo visto che $\vec{\tau}_u$, $\vec{\tau}_v$, ed $\vec{N}$ sono linearmente indipendenti (ortogonali) e dunque sono un sistema di riferimento anche loro, ma curvilineo, e locale, in quanto giacciono su un punto della superficie, e quando ci si muove su di essa, tale terna si sposta ed essi cambiano pure di direzione. Ecco dunque un valido esempio di sistema di riferimento curvilineo, nell'opinione di chi scrive, ovviamente.

In tutte le equazioni presentate nel capitolo precedente sulla geometria, gli indici i, j, k ecc variavano da 1 a 2 o anche 3. Ora, addentrandoci un po' più nell'ambito dell'Universo e, quindi della Relatività Generale, prendiamo innanzitutto atto del fatto che il nostro

Universo appare tridimensionale, dunque, per gli indici, avremo una variabilità che giunge almeno fino a tre, e poi, visto che, come esposto anche in Relatività Ristretta, esiste un Universo matematicamente quadridimensionale (per la fisica ufficiale, esso è anche realmente quadridimensionale), in cui si ha covarianza, dunque conservazione, nel passaggio da un sistema inerziale all'altro, allora, con Einstein, iniziamo una volta per tutte a considerare l'Universo in chiave quadridimensionale e basta; dunque, gli indici di tutte le equazioni geometriche presentate nel capitolo precedente, avranno d'ora in poi gli indici con una variabilità a quattro valori e la quarta componente è quella temporale (ct). Varrà poi la convenzione di Einstein, secondo cui se in un termine di un'equazione un indice compare due volte, allora è sottintesa la somma su esso.

Riportiamo qui le principali, che ci serviranno:

$$\vec{\tau}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha} \quad (\text{Eq. di Gauss in forma più compendiosa; tutto in } \Gamma_{ij}^{\alpha}) \quad (i,j=1,2,3,4) \quad (2.5)$$

(questa ci dà anche la derivata del versore)

$$d\tau^2 = -g_{ik} du^i du^k \quad (i,j=1,2,3,4) \quad (\text{tensore metrico } g_{ik} / \text{de-quadridistanza quadro } d\tau^2) \quad (2.6)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ai}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{\alpha}} \right) \quad (i,j=1,2,3,4) \quad (\text{simbolo di Christoffel di 2^a specie}) \quad (2.7)$$

$$R_{ijk}^{\alpha} = (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j - (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k + \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} \quad (i,j=1,2,3,4) \quad (\text{Tensore di curvatura di Riemann misto}) \quad (2.8)$$

Il tensore metrico g_{ik} , nel caso ci si trovi in spazi euclidei, si riduce al tensore di Minkowski η_{ik} (vale 1 per $i=k=1,2,3$ e vale -1 per $i=k=4$; vale 0 per i diverso da k) e senza termini misti, cioè con i,k diversi, $\eta_{ik}=0$; infatti, si avrebbe ($u^i = x, y, z, ct$):

$d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + d(ct)^2$, proprio come nella Relatività Ristretta, e le ξ^i denoterebbero il sistema euclideo di coordinate. Passando a sistemi curvi ($d\xi^i \gggg dx^i$), si ha:

$$d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k = -\eta_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu} = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \text{ con} \quad (2.9)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{\nu}} \quad (2.10)$$

che è l'equazione di passaggio da un sistema all'altro.

In futuro riserveremo, per gli indici, tendenzialmente le lettere dell'alfabeto comune (i,j,k ecc) in caso di spazi euclidei (η_{ik}) e le lettere dell'alfabeto greco (μ, ν ecc) per gli spazi curvi $g_{\mu\nu}$, a forte gravità.

Abbiamo visto con le (1.1) e (1.2) che una sfera si può rappresentare tramite un'equazione che contenga le tre coordinate cartesiane classiche (x,y,z) oppure anche fissando un raggio e facendo variare due angoli (r, θ, φ):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (x,y,z)$$

$$\vec{r}_{\Sigma} = (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + (r \cos \varphi) \hat{z} \quad (r, \theta, \varphi)$$

Ora, nel caso in cui si effettui un cambiamento di sistema di coordinate (x,y,z) >>>> (x',y',z') con il secondo magari traslato e ruotato rispetto al primo, ci saranno delle classiche equazioni di passaggio da un sistema all'altro, ma i due sistemi di coordinate avranno sempre la stessa rappresentazione grafica di assi che si estendono dall'origine all'infinito, in positivo come in negativo.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 \quad (x',y',z')$$

Ciò, però, nell'ambito della geometria euclidea, o non curvilinea, se vogliamo.

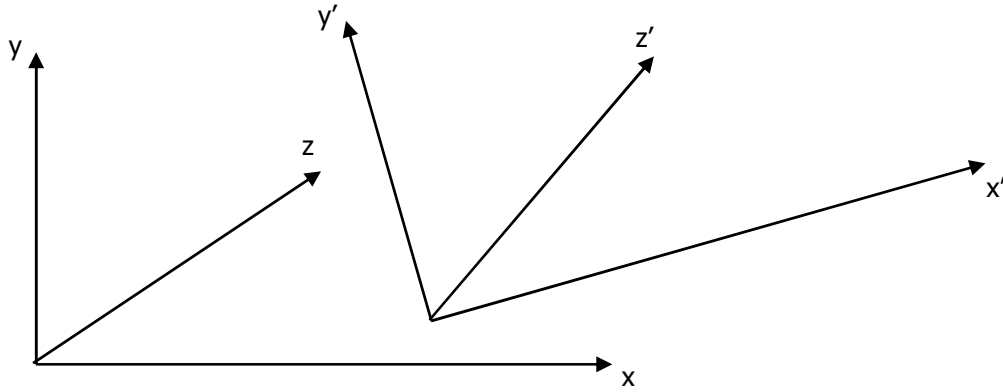


Fig. 2.2: Due diversi sistemi di riferimento "euclidei".

Se ora io suppongo di dover passare da un sistema come quello di Fig. 2.2 ad uno in cui lo spazio è, per qualche motivo, incurvato, magari dalla gravità della materia e dell'energia, come sostenuto in Relatività Generale, allora la geometria euclidea non mi è più sufficiente e quella curvilinea, non euclidea "alla Riemann" mi è più di aiuto. Infatti, nell'opinione di chi scrive, nel passare da un sistema normale ad uno "curvo", non si può più avere la rappresentazione di Fig. 2.2, ma il sistema curvo avrà un aspetto di terna di assi cartesiani rettilinei solo nell'infinitesimo ("d" = de), come in Fig. 2.3, in quanto, essendo lo stesso appunto curvo, appena mi allontanano dall'origine "0", l'asse si incurva e non ho più alcuna forma di linearità e di proporzionalità.



Fig. 2.3: Caso di sistema di coordinate curvilinee.

Avrò dunque un sistema di equazioni di passaggio da un sistema euclideo (ξ^i) ad uno curvilineo (x^i), nell'ambito dell'infinitesimo, per quanto appena detto, e che sarà, in generale, di questo tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^1 = \xi^1(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \xi^2 = \xi^2(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \xi^3 = \xi^3(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \xi^4 = \xi^4(x^1, x^2, x^3, x^4) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

e viceversa:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \\ x^2 = x^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \\ x^3 = x^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \\ x^4 = x^4(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \end{array} \right. \quad (2.12)$$

e per le equazioni di conversione delle espressioni per le superfici e per gli oggetti geometrici ($\vec{r}$), si ha ovviamente ($\vec{r} = \xi^1 \hat{i} + \xi^2 \hat{j} + \xi^3 \hat{k} + \xi^4 \hat{t} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ e

($\vec{r} = x^1 \vec{\tau}_1 + x^2 \vec{\tau}_2 + x^3 \vec{\tau}_3 + x^4 \vec{\tau}_4 = (x^1, x^2, x^3, x^4)$):

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{\tau}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \hat{i} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \hat{j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} \hat{k} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^1} \hat{t} \\ \vec{\tau}_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \hat{i} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \hat{j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} \hat{k} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^2} \hat{t} \\ \vec{\tau}_3 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} \hat{i} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} \hat{j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} \hat{k} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^3} \hat{t} \\ \vec{\tau}_4 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^4} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^4} \hat{i} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^4} \hat{j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^4} \hat{k} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} \hat{t} \end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

e inoltre, ovviamente:

$$\left\{ \begin{aligned} d\xi^1 &= \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^4} dx^4 \\ d\xi^2 &= \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^4} dx^4 \\ d\xi^3 &= \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^4} dx^4 \\ d\xi^4 &= \frac{\partial \xi^4}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} dx^4 \end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{e allora: } d\vec{r} &= d\xi^1 \hat{i} + d\xi^2 \hat{j} + d\xi^3 \hat{k} + d\xi^4 \hat{t} = (d\xi^1, d\xi^2, d\xi^3, d\xi^4) = (dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) = \\ &= d\vec{r} = dx^1 \vec{\tau}_1 + dx^2 \vec{\tau}_2 + dx^3 \vec{\tau}_3 + dx^4 \vec{\tau}_4 = \boxed{dx^i \vec{\tau}_i = d\vec{r}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

e dunque (dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) sono le componenti di $\vec{r}$ nella base curvilinea ($\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3, \vec{\tau}_4$).

Esiste ora una quaterna reciproca ($\vec{\tau}^1, \vec{\tau}^2, \vec{\tau}^3, \vec{\tau}^4$) tale che, per definizione: $\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}^j = \delta_i^j$.

Riprendendo ora un attimo la (2.15), dove è palesemente utilizzata la convenzione di Einstein, si ha: $d\vec{r} = dx^i \vec{\tau}_i$. Se ora vogliamo effettuare un cambiamento di base curvilinea,

con coordinate da dx^i a dx'^l , scriveremo ovviamente che: $dx^i \vec{\tau}_i = dx'^l \vec{\tau}'_l$ e, moltiplicando entrambi i membri per $\vec{\tau}^i$, si ha: $dx^i = dx'^l \vec{\tau}'_l \cdot \vec{\tau}^i$, ma è anche vero che (come per le

$$(2.14)): dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} dx'^l; \text{ segue che: } \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} = \vec{\tau}'_l \cdot \vec{\tau}^i, \text{ ossia:}$$

$$\vec{\tau}'_l = \vec{\tau}_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \quad (2.16)$$

e la (2.16) è l'equazione per il cambiamento di base.

Legge di trasformazione delle componenti di un 4-vettore:

sia $\vec{V} = V^i \vec{\tau}_i$ un generico vettore espresso con le coordinate curvilinee nella base $\vec{\tau}_i$; nella base $\vec{\tau}'_l$ si avrà invece: $\vec{V} = V'^l \vec{\tau}'_l$ e, per la (2.16):

$$\vec{V} = V'^l \vec{\tau}'_l = V'^l \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \vec{\tau}_i = V^i \vec{\tau}_i, \text{ con:}$$

$$V^i = V'^l \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \quad (2.17)$$

che è la equazione di trasformazione delle componenti di un 4-vettore per cambiamento di base. Banalmente, la sua inversa è: $V'^i = V^l \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}$

Legge di trasformazione delle componenti di un 4-tensore:

in Relatività Ristretta si ha che si ottiene un tensore T di rango n quando si moltiplicano tra loro le componenti di n vettori. Si abbiano dunque due vettori V ed S: (dove stiamo contemporaneamente ricordando come si trasformano le loro componenti)

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad \text{e} \quad S'^\lambda = S^\sigma \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \quad >>>>$$

$$T'^{\mu\lambda} = V'^\mu S'^\lambda = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} S^\sigma \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = V^\nu S^\sigma \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = \boxed{T^{\nu\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = T'^{\mu\lambda}} \quad \text{ed ecco come si}$$

trasformano le componenti di un tensore di rango 2. Si procede poi similmente per tensori di rango superiore.

derivazione di un 4-vettore:

si abbia un 4-vettore: $\vec{V} = V^\mu \vec{\tau}_\mu$; deriviamolo:

$$\frac{d\vec{V}}{dx^\nu} = \frac{dV^\mu}{dx^\nu} \vec{\tau}_\mu + V^\sigma \frac{d\vec{\tau}_\sigma}{dx^\nu} \quad (2.18)$$

gli indici cambiano da un termine all'altro, perchè essi variano su quattro valori e non devono necessariamente essere contemporaneamente gli stessi nei vari termini.

Moltiplichiamo ora il secondo membro della (2.18) per la quantità unitaria $\vec{\tau}^\mu \cdot \vec{\tau}_\mu$

$$\frac{d\vec{V}}{dx^\nu} = \left[\frac{dV^\mu}{dx^\nu} + V^\sigma \frac{d\vec{\tau}_\sigma}{dx^\nu} \cdot \vec{\tau}^\mu \right] \vec{\tau}_\mu \quad ; \quad \text{bene, la quantità tra le quadre è la derivata covariante ed è un tensore, per quanto finora detto:}$$

$$V_{;\nu}^\mu = \frac{dV^\mu}{dx^\nu} + V^\sigma \frac{d\vec{\tau}_\sigma}{dx^\nu} \cdot \vec{\tau}^\mu = \frac{dV^\mu}{dx^\nu} + V^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \quad (\text{derivata covariante}) \quad (2.19)$$

con i $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ detti Simboli di Christoffel (connessione affine) e già introdotti con la (1.30).

Inoltre, per il sistema (2.13), potremmo scrivere, più in forma vettoriale compendiosa, che

$$\vec{\tau}_\mu = \left(\sum_\alpha \right) \eta_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \quad , \quad \text{da cui una forma duale per la quaterna reciproca } \vec{\tau}^\mu \quad (\text{tale che, per def.}$$

$$\text{di reciprocità: } \vec{\tau}^\mu \vec{\tau}_\nu = \delta_\nu^\mu): \quad \vec{\tau}^\mu = \left(\sum_\mu \right) \eta_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \quad \text{e dunque il coefficiente } \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \text{ nella (2.19)}$$

possiamo anche esprimerlo nel seguente modo:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{d\vec{\tau}_\sigma}{dx^\nu} \cdot \vec{\tau}^\mu = \frac{d}{dx^\nu} \left(\eta_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \eta_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} = \eta_\alpha \eta_\mu \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \quad , \quad \text{che, inserito nella (2.19), può essere}$$

anche scritto in modo più semplice, senza i coefficienti unitari η :

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \quad (2.20)$$

Poi, sempre in Relatività Ristretta, si ricorda che una tale derivata (di un vettore) dà un tensore. Si vede poi che tale derivata è un tensore (di rango 2) già solo per il fatto che gli

addendi che la compongono contengono due indici, appunto come un tensore 2. Inoltre, la (1.30) del capitolo precedente sulla Geometria è un esempio di derivata di un vettore (versore) che appare appunto come tensore 2.

Nel caso di vettore espresso nella base reciproca ($\vec{V} = V_\mu \vec{\tau}^\mu$), si ha:

$$\frac{d\vec{V}}{dx^\nu} = \frac{dV_\mu}{dx^\nu} \vec{\tau}^\mu + V_\sigma \frac{d\vec{\tau}^\sigma}{dx^\nu} = \left[\frac{dV_\mu}{dx^\nu} \vec{\tau}^\mu + V_\sigma \frac{d\vec{\tau}^\sigma}{dx^\nu} \right] (\vec{\tau}^\mu \cdot \vec{\tau}_\mu) = \left[\frac{dV_\mu}{dx^\nu} + V_\sigma \frac{d\vec{\tau}^\sigma}{dx^\nu} \cdot \vec{\tau}_\mu \right] \vec{\tau}^\mu = [V_{\mu;\nu}] \vec{\tau}^\mu, \text{ ma:}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\vec{\tau}^\sigma \vec{\tau}_\mu) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta_\mu^\sigma = 0 = \frac{\partial \vec{\tau}^\sigma}{\partial x^\nu} \vec{\tau}_\mu + \vec{\tau}^\sigma \frac{\partial \vec{\tau}_\mu}{\partial x^\nu}, \text{ da cui: } \frac{\partial \vec{\tau}^\sigma}{\partial x^\nu} \vec{\tau}_\mu = -\vec{\tau}^\sigma \frac{\partial \vec{\tau}_\mu}{\partial x^\nu}, \text{ allora:}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dx^\nu} = \left[\frac{dV_\mu}{dx^\nu} - V_\sigma \vec{\tau}^\sigma \frac{\partial \vec{\tau}_\mu}{\partial x^\nu} \right] \vec{\tau}^\mu = \left[\frac{dV_\mu}{dx^\nu} - V_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right] \vec{\tau}^\mu = [V_{\mu;\nu}] \vec{\tau}^\mu, \text{ dunque:}$$

$$V_{\mu;\nu} = \frac{dV_\mu}{dx^\nu} - V_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$$

derivazione di un tensore:

$$\text{si ha che: } T_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_\lambda^{\mu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T_\lambda^{\nu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T_\lambda^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^k T_k^{\mu\sigma} \quad (2.21)$$

infatti ($T_\lambda^{\mu\sigma}$ sono solo le componenti, senza "versori" e inoltre $\vec{\tau}_\mu \vec{\tau}^\mu = \delta_\mu^\mu = 1$):

T(tensore) = $T_\lambda^{\mu\sigma} \vec{\tau}_\mu \vec{\tau}_\sigma \vec{\tau}^\lambda$, da cui:

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho} (T_\lambda^{\mu\sigma} \vec{\tau}_\mu \vec{\tau}_\sigma \vec{\tau}^\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} T_\lambda^{\mu\sigma} \right) (\vec{\tau}_\mu \vec{\tau}_\sigma \vec{\tau}^\lambda) + T_\lambda^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} \vec{\tau}_\nu \right) \vec{\tau}_\sigma \vec{\tau}^\lambda + T_\lambda^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} \vec{\tau}_\nu \right) \vec{\tau}_\mu \vec{\tau}^\lambda + T_\lambda^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} \vec{\tau}^\lambda \right) (\vec{\tau}_\mu \vec{\tau}_\sigma)$$

$$- T_k^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} \vec{\tau}_\mu \right) \vec{\tau}^k \vec{\tau}_\sigma (\vec{\tau}^\lambda) = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_\lambda^{\mu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T_\lambda^{\nu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T_\lambda^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^k T_k^{\mu\sigma} = T_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} \text{ c.v.d.}$$



$$(\text{in quanto : } \frac{\partial}{\partial x^\nu} \vec{\tau}^\mu \vec{\tau}_k = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta_k^\mu = 0 = \frac{\partial \vec{\tau}^\mu}{\partial x^\nu} \vec{\tau}_k + \vec{\tau}^\mu \frac{\partial \vec{\tau}_k}{\partial x^\nu}, \text{ da cui: } \frac{\partial \vec{\tau}^\mu}{\partial x^\nu} \vec{\tau}_k = -\vec{\tau}^\mu \frac{\partial \vec{\tau}_k}{\partial x^\nu})$$

Par. 2.3: Sulla Trasformazione di Lorentz in Relatività Generale.

Riprendiamo un attimo la (2.9), dove sappiamo dalla Relatività Ristretta che $d\tau^2$ è Lorentz invariante:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha'} dx^{\beta'} = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\delta} dx^\gamma dx^\delta = -\eta_{\gamma\delta} dx^\gamma dx^\delta, \text{ con:}$$

$$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\delta} \quad (2.22)$$

Differenziamo ora la (2.22) rispetto ad x^ε :

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma \partial x^\varepsilon} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\delta} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\delta \partial x^\varepsilon}; \text{ ora, sommiamo a quest'ultima la stessa con } \gamma \text{ ed } \varepsilon$$

scambiati e poi sottraiamo sempre la stessa con ε e δ scambiati, ottenendo:

$$0 = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma \partial x^\varepsilon} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\delta} >>>> \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma \partial x^\varepsilon} = 0, \text{ la cui soluzione è:}$$

$$x^{\alpha'} = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta + a^\alpha \quad (\text{Trasformazioni di Lorentz}) \quad (2.23)$$

$$\text{Questa, unitamente alla (2.22), fornisce: } \eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\delta} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta.$$

$$\text{Inoltre, la (2.23) in forma differenziale è: } dx^{\alpha'} = \Lambda_\gamma^\alpha dx^\gamma. \quad (2.24)$$

Valutiamo ora gli elementi della matrice di Lorentz (o del tensore di Lorentz) Λ^α_β :

Dalle Trasformazioni di Lorentz (A1.8) in App. 1, abbiamo che ($\parallel$ e $\perp$ si riferiscono alla direzione di moto):

$\vec{x}'_\parallel = \gamma(\vec{x}_\parallel - \vec{V}t)$, $\vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp$, $t' = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}}{c^2})$; inoltre, ovviamente, si ha che:

$\vec{x}_\parallel = (\vec{x} \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2}$ e $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_\parallel$, sicchè:

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)(\vec{x} \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2} - \gamma \vec{V}t \quad \text{e} \quad (2.25)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}}{c^2})$$

mentre per la (2.24), si ha: $dx'^i = \Lambda^i_\beta dx^\beta$, da cui, lasciando l'alfabeto comune (i,j ecc) per le tre componenti spaziali, 0 come quarto coefficiente temporale e quello greco per tutto:

$$dx'^i = \Lambda^i_j dx^j + \Lambda^i_0 dx^0 \quad (\text{per la (2.24)}) \quad (2.26)$$

$$dx'^i = dx^i + (\gamma - 1)(d\vec{x} \cdot \vec{V}) \frac{V^i}{V^2} + \gamma \frac{1}{c} V^i dx^0 \quad (\text{per le (2.25)}) \quad (2.27)$$

(qui l'ultimo termine ha segno + e non - perché $dx^0 = -cdt$)

Dal confronto tra le (2.26) e (2.27), si ha:

$\Lambda^i_0 = +\gamma \frac{1}{c} V^i$ e $\Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{(\gamma - 1)}{V^2} V^i V_j$, e facendo nostra la normalizzazione $c=1$, per semplificare un po' le espressioni:

$$\Lambda^i_0 = +\gamma V^i \quad \text{e} \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{(\gamma - 1)}{V^2} V^i V_j \quad (\text{Tensore di Lorentz})$$

dove il prodotto $d\vec{x} \cdot \vec{V}$ della (2.27) ha reso solo la componente $dx^j V_j$ nella (2.26), in quanto nella (2.26) compariva solo dx^j .

Se la T. di Lorentz diretta è data dalla (2.24): $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\gamma dx^\gamma$ quella inversa, evidentemente, la indichiamo così: $dx^\gamma = \Lambda^{\gamma}_\alpha dx'^\alpha$.

Allora, come del resto avviene con la Relatività Ristretta, non solo le componenti spaziali (x) e temporali (ct) si possono trasformare con Lorentz, ma anche i quadri-vettori ed i quadritensori lo fanno:

$$V'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta$$

$T'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma_\delta \Lambda^\epsilon_\alpha \Lambda^\zeta_\beta T^\delta_{\epsilon\zeta}$ (ricordando che le componenti di un tensore si ottengono moltiplicando quelle dei vettori)

Par. 2.4: Il 4-vettore Momento-Energia ed il Tensore Momento-Energia.

premessa sulla Delta di Dirac:

per definizione, la Delta di Dirac deve soddisfare la seguente equazione:

$$f(\vec{y}) = \int f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3x$$

Praticamente, messa nell'integrale (che, ricordiamolo, è una sommatoria anch'esso), fornisce sempre la funzione integranda f , ma di altra variabile. Si veda un qualche buon testo sulla trasformata di Fourier per avere utili versioni della Delta di Dirac.

premessa su correnti e densità (di materia/energia):

se in vari punti $\vec{x}_n(t)$ ho energia (e dunque anche materia) con densità volumica $e_n[J/m^3]$, per avere quella totale dovrò ovviamente sommare su n :

$$\varepsilon(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) ,$$

dove la Delta di Dirac mi garantisce il giusto valore di e_n nella sommatoria per ogni posizione $\vec{x}_n(t)$.

Per quanto riguarda invece la corrispondente densità di corrente di materia/energia $\vec{J}(\vec{x}, t)$, si ha ovviamente:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{d\vec{x}_n(t)}{dt}$$

infatti, $e_n[J/m^3]$ moltiplicato per $\frac{d\vec{x}_n(t)}{dt}[m/s]$ ci dà proprio una corrente di joule al metro quadro.

In componenti: $J^\alpha(x) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt}$ e, ovviamente: $J^0 = \varepsilon$ e $x_n^0(t) = ct$.

Ora, la sommatoria è sui punti n ; per avere il totale, bisogna integrare anche sul tempo:

$J^\alpha(x) \rightarrow \int dt' \delta(x - x_n(t')) J^\alpha(x) = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^\alpha(t')}{dt'}$; moltiplicando ora numeratore e denominatore per c , visto che il "de" tempo proprio è $d\tau = c dt'$, avremo:

$$J^\alpha(x) = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^\alpha(\tau)}{d\tau}$$

$J^\alpha(x)$ è un 4-vettore, perchè tale è $\frac{dx_n^\alpha(\tau)}{d\tau}$.

$$\text{Inoltre, } \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} = - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} =$$

$$= - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\vec{x}, t) . \text{ Portando ora } - \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\vec{x}, t) \text{ insieme con } \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) , \text{ avremo}$$

la quadridivergenza:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = 0 \text{ (è evidente l'invarianza su Lorentz).} \quad (2.28)$$

$$\text{Inoltre, } Q(\text{mat} - \text{energ}) = \int d^3x J^0(x) = \int d^3x \cdot \varepsilon(\vec{x}, t)$$

il 4-vettore momento-energia:

Tale vettore viene già trattato nell'ambito della Relatività Ristretta.

Ovviamente, $p^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{d\tau}$; poi $\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = f^\alpha$ e

$$d\tau = (c^2 dt^2 - d\vec{x}^2)^{1/2} = (1 - \vec{V}^2/c^2)^{1/2} dt = dt/\gamma$$

da cui, per la componente tridimensionale e per quella temporale:

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{V} \quad \text{e} \quad p^0 = E_0/c = m_0 \gamma c \quad \text{e quindi:} \quad (2.29)$$

$$p^\beta = (E_0/c^2) \frac{dx^\beta}{d\tau} . \quad (2.30)$$

Ovviamente, per Lorentz: $p'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta p^\beta$.

(*) : In realtà considereremo la massa m come massa riferita unità di volume $[\text{kg}/\text{m}^3]$

il TENSORE momento-energia:

$$T^{\alpha 0}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad ("0" \text{ è la componente temporale}) \quad (2.31)$$

$$T^{\alpha i}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad ("i" \text{ fa invece riferimento alle tre componenti spaziali})$$

e, nell'insieme, in modo più compendioso:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (x_n^0(t) = ct) \quad (2.32)$$

La prima è effettivamente un momento (p) e la seconda è effettivamente un'energia ($p \times v$). Come in precedenza, si è sommato sulle particelle n .

(Sommando poi anche sul tempo, si avrebbe, anche qui dopo aver moltiplicato numeratore

e denominatore per c : $T^{\alpha\beta} = \int d\tau \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau))$)

Ora, la (2.32), tramite la (2.30), diventa:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{(E_n/c^2)} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

Si nota la simmetria $T^{\alpha\beta}(x) = T^{\beta\alpha}(x)$; inoltre, $T^{\alpha\beta}(x)$ è un tensore e, come tale, per Lorentz, si trasforma come segue:

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta} . \quad (2.33)$$

Inoltre, proprio come fatto in precedenza per giungere alla (2.28), tramite la quadri divergenza, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i}(\vec{x}, t) &= \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = - \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \\ &= - \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\vec{x}, t) + \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \end{aligned}$$

in quanto $\frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\vec{x}, t)$ nell'ultima riga si compone appunto, per la regola della derivazione di un prodotto, dei due termini che ha a destra ed a sinistra.

Dunque, $\frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i} + \frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = G^\alpha(\vec{x}, t)$, ossia:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = G^\alpha, \text{ con:}$$

$$G^\alpha(\vec{x}, t) = \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \sum_n \frac{d\tau}{dt} \frac{dp_n^\alpha(\tau)}{d\tau} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \sum_n \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

dove $f_n^\alpha = \frac{dp_n^\alpha}{d\tau}$ è ovviamente una forza.

Se le particelle sono libere, allora $p_n^\alpha = \text{const}$ e dunque $\gggg \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = 0 !!!$

Par. 2.5: Idrodinamica relativistica.

E' ora molto importante dare una forma al tensore momento-energia $T^{\alpha\beta}$, in quanto vedremo che, nel limite newtoniano della gravitazione relativistica, una sua componente compare (T^{00}), suggerendoci così di coinvolgere, quando si esce dalla situazione limite, appunto tutto $T^{\alpha\beta}$. Per semplicità, considereremo ora $c=1$ (normalizzazione).

Vediamo ora che $T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) U^\alpha U^\beta$ e, per campi di intensità qualsiasi:

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \rho) U^\mu U^\nu \quad (c=1) \quad (2.34)$$

dimostrazione:

denotiamo col simbolo $\sim$ le grandezze che si riferiscono ad un sistema in quiete; inoltre, dalla (2.32) si evince che, a secondo membro, vi è un prodotto di una quantità di moto $[(\text{kg}/\text{m}^3)(\text{m}/\text{s})]$ per una velocità $[(\text{m}/\text{s})]$ (ricordare l'osservazione (*) a pag. 25) e dunque:

$$\text{massa} \times \text{velocità} \times \text{velocità} (=J) \text{ fratto } \text{m}^3, \text{ cioè una pressione } p. \quad (2.35)$$

Quando poi la quantità $dx/dt = d(ct)/dt = c$ è quella corrispondente all'indice zero, come per la (2.31), allora si avrà a secondo membro il prodotto p^0 (mc , vedi la (2.29)) per c , ma per l'osservazione (*) di pag. 25, m è una p e dunque si ha un pc^2 . Riassumendo:

$$\tilde{T}^{ij} = p \delta^{ij} [Pa], \quad \tilde{T}^{i0} = \tilde{T}^{0i} = 0, \quad \tilde{T}^{00} = \rho, \text{ ossia } (\rho c^2 \text{ con } c=1 [Pa]) \quad (2.36)$$

Essendo ora T un tensore, trasformiamolo secondo Lorentz, in accordo con la (2.33), per ottenere i suoi valori per un sistema generico, ossia non in quiete:

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta \tilde{T}^{\gamma\delta}; \text{ si otterrà: } \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}, \text{ con } c=1 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{ij} = p \delta^{ij} + (p + \rho) \gamma^2 V^i V^j \\ T^{i0} = (p + \rho) \gamma^2 V^i \\ T^{00} = \gamma^2 (p V^2 + \rho) \end{array} \right.$$

infatti, tenendo conto che, per il Tensore di Lorentz, si ha:

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \Lambda^i_0 = \gamma V^i \left(\gamma \frac{1}{c} V^i \text{ con } c=1 \right), \Lambda^0_i = \gamma V_i \left(\gamma \frac{1}{c} V_i \text{ con } c=1 \right), \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{(\gamma-1)}{V^2} V^i V_j, \text{ segue che:}$$

$$T^{00} = \Lambda^0_\gamma \Lambda^0_\delta \tilde{T}^{\gamma\delta} = \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 \tilde{T}^{00} + \sum_i (\Lambda^0_i \Lambda^0_i \tilde{T}^{ii}) = \gamma^2 \rho + \sum_i [\gamma^2 (V^i)^2] p = \gamma^2 (\rho + p V^2)$$

$$T^{i0} = \Lambda_{\gamma}^i \Lambda_{\delta}^0 \tilde{T}^{\gamma\delta} = \Lambda_0^i \Lambda_0^0 \tilde{T}^{00} + \Lambda_j^i \Lambda_j^0 \tilde{T}^{jj} = \gamma^2 V^i \rho + p \sum_j (\Lambda_j^i \Lambda_j^0) = \gamma^2 V^i \rho + p(\Lambda_i^i \Lambda_i^0 + \Lambda_k^i \Lambda_k^0 + \Lambda_l^i \Lambda_l^0) =$$

(k,l ≠ 0, i e j può valere i, oppure k,l)

$$\begin{aligned} &= \gamma^2 V^i \rho + p[(1 + (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}) \gamma W^i + V^i V^k \frac{(\gamma-1)}{V^2}) \gamma W^k + \\ &+ V^i V^l \frac{(\gamma-1)}{V^2}) \gamma W^l] = \gamma^2 V^i \rho + p[\gamma W^i + \gamma W^i (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}) + \gamma W^i (V^k)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}) + \gamma W^i (V^l)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2})] = \\ &= \gamma^2 V^i \rho + p \gamma W^i + p \gamma W^i \frac{(\gamma-1)}{V^2} [(V^i)^2 + (V^k)^2 + (V^l)^2] = \gamma^2 V^i \rho + p \gamma W^i + p \gamma W^i (\gamma-1) = \\ &= \gamma^2 V^i (p + \rho) \end{aligned}$$

Invece, per il calcolo di T^{ij} , separiamo i due casi: (i=j e i ≠ j)

$$\begin{aligned} T^{ii} &= \Lambda_{\gamma}^i \Lambda_{\delta}^i \tilde{T}^{\gamma\delta} = \Lambda_0^i \Lambda_0^i \tilde{T}^{00} + \Lambda_i^i \Lambda_i^i \tilde{T}^{ii} + \Lambda_k^i \Lambda_k^i \tilde{T}^{kk} + \Lambda_l^i \Lambda_l^i \tilde{T}^{ll} = (k, l \neq i) = \gamma^2 (V^i)^2 \rho + [1 + (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}]^2 p + \\ &+ [V^i V^k \frac{(\gamma-1)}{V^2}]^2 p + [V^i V^l \frac{(\gamma-1)}{V^2}]^2 p = \gamma^2 (V^i)^2 \rho + p + p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} [(V^i)^2 + (V^k)^2 + (V^l)^2] + \\ &+ 2p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} = \gamma^2 (V^i)^2 \rho + p + p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)^2}{V^2} + 2p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} = p + \gamma^2 (V^i)^2 \rho + \\ &+ p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} (\gamma-1+2) = p + \gamma^2 (V^i)^2 \rho + p \frac{(V^i)^2}{V^2} (\gamma^2 - 1) = p + \gamma^2 (V^i)^2 \rho + p (V^i)^2 \gamma^2 = \\ &= p + \gamma^2 (V^i)^2 (p + \rho). \quad (\text{poichè } \frac{(\gamma^2 - 1)}{V^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} = \gamma^2 \text{ se } c=1) \end{aligned}$$

Nel caso invece di i ≠ j:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \Lambda_{\gamma}^i \Lambda_{\delta}^j \tilde{T}^{\gamma\delta} = \Lambda_0^i \Lambda_0^j \tilde{T}^{00} + \Lambda_i^i \Lambda_i^j \tilde{T}^{ii} + \Lambda_j^i \Lambda_j^j \tilde{T}^{jj} + \Lambda_k^i \Lambda_k^j \tilde{T}^{kk} = (k \neq i, j) = \gamma^2 V^i V^j \rho + \\ &+ p[1 + (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}][V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2}] + p[V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2}][1 + (V^j)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}] + \\ &p[\delta^{ik}_{(=0)} + V^i V^k \frac{(\gamma-1)}{V^2}][\delta^{jk}_{(=0)} + V^j V^k \frac{(\gamma-1)}{V^2}] = \gamma^2 V^i V^j \rho + p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} + p (V^i)^2 V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} + \\ &+ p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} + p (V^j)^2 V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} + p (V^k)^2 V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} = \gamma^2 V^i V^j \rho + 2p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} + \\ &+ p V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} [(V^i)^2 + (V^j)^2 + (V^k)^2] = \gamma^2 V^i V^j \rho + 2p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} + p V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^2} = \\ &= \gamma^2 V^i V^j \rho + p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} (2 + \gamma - 1) = \gamma^2 V^i V^j (p + \rho) \quad (\text{poichè } \frac{(\gamma^2 - 1)}{V^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} = \gamma^2 \text{ se } c=1). \end{aligned}$$

In totale:

$$T^{ij} = p \delta^{ij} + (p + \rho) V^i V^j \gamma^2 \quad (\text{per le componenti spaziali})$$

$$T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) U^{\alpha} U^{\beta} \quad (\text{per tutte e 4 le componenti, ma in campi deboli } (\eta^{\alpha\beta}))$$

$$\text{dove } U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma \frac{dx^i}{dt} = \gamma V^i \quad \text{e} \quad U^0 = \gamma c.$$

Per ultimo, per campi gravitazionali qualsiasi ($\eta^{\alpha\beta} \gg \gg \gg g^{\alpha\beta}$):

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \rho) U^{\mu} U^{\nu} \quad (c=1) \text{ cvd.}$$

Par. 2.6: L'Equazione della geodetica.

Un paracadutista in caduta libera non ha un pavimento su cui il suo corpo può gravare, dunque lui, tra sé e sé, non avverte accelerazione di gravità, e si sente come sospeso nel vuoto e si accorge che sta cadendo solo se guarda gli altri oggetti attorno che si muovono. Per una particella in caduta libera, dunque, vi è ovviamente un sistema di riferimento in cui $\vec{a} = 0$, ossia:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate euclidee}) \quad (2.37)$$

con $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$.

Possiamo però vedere la (2.37) nel seguente modo:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri per $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ e teniamo conto del fatto che:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda \quad \text{si avrà:}$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate curvilinee}) \quad (2.38)$$

(equazione della geodetica, dove geodetica, qui sulla Terra, è la rotta minima tra una località e l'altra)

$$\text{con } \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}.$$

Par. 2.7: La relazione tra $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

Già ricavamo tale relazione in un contesto tutto geometrico (vedere la (1.35)). Ricaviamo ora la stessa relazione partendo da un calcolo diretto:

Sappiamo già che: $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$; applichiamo ora a quest'ultima $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}; \text{ ricordando ora che } \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \text{ segue che:} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Similmente, si calcolano poi $\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}$ e $\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}$, da cui:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{k\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^k; \text{ definendo ora una matrice (o tensore) reciproco } g^{\nu\sigma} \text{ tale che:}$$

$$g^{\nu\sigma} g_{k\nu} = \delta_k^\sigma, \text{ si avrà, dunque:}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right), \quad (2.40)$$

esattamente ciò che ottenemmo in ambito puramente geometrico appunto nel Capitolo 1.

Par. 2.8: Il limite Newtoniano.

Sappiamo che nel limite newtoniano ($V \ll c$): $d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - \vec{V}^2 dt^2 \cong c^2 dt^2$
 Ciò equivale a dire che $V^i = dx^i / dt \propto dx^i / d\tau \ll dx^0 / d\tau \propto dx^0 / dt = d(ct) / dt = c$, ossia appunto: $dx^i / d\tau \ll dx^0 / d\tau$.

Con ciò, la (2.38) diviene: $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$ (con la convenzione $c=1$); inoltre, essendo, in tale limite, il campo stazionario, $g_{\mu\nu}$ tende a $\eta_{\mu\nu}$ (cost) e allora le derivate temporali di $g_{\mu\nu}$ sono nulle e allora, per la (2.40):

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \quad \text{e} \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{con } |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad \text{e quindi: } \Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \quad \text{e:}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} = 0 \quad \text{da cui:}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} = 0 \quad \text{e} \tag{2.41}$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad \text{da cui: } \frac{dt}{d\tau} = C.$$

Ora, sappiamo dalla gravitazione di Newton che: $m\vec{a} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$, da cui: $\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$, ma:

$$\frac{GM}{r^2} \hat{r} = \nabla \left(-\frac{GM}{r}\right) = \nabla \phi \quad (\text{con } \phi = -\frac{GM}{r}) \quad \text{e quindi: } \vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad \text{e da quest'ultima con la}$$

$$(2.41), \text{ emerge che: } h_{00} = -2\phi + \text{const}; \quad \text{visto che all'infinito } h_{00} = \phi = 0, \quad \text{allora const}=0 \quad \text{e:}$$

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\phi = -(1 + 2\phi) \tag{2.42}$$

equazione di Poisson:

definiamo ora, con ovvietà, il flusso del vettore accelerazione $\vec{a}$:

$$\Phi(\vec{a}); \quad \text{si ha: } d\Phi(\vec{a}) = \vec{a} \cdot d\vec{S} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{u} dS = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta dS = -GM \frac{dS_n}{r^2} = -GM d\Omega, \quad \text{da cui:}$$

$$\Phi(\vec{a}) = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = -GM \int d\Omega = -4\pi GM, \quad \text{ma: } M = \int_V \rho(x, y, z) dV, \quad \text{da cui:}$$

$$\Phi(\vec{a}) = -4\pi G \int_V \rho(x, y, z) dV = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \text{for Theorem of Div.} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV, \quad \text{e cioè:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = -4\pi G \rho(x, y, z). \quad \text{Adesso, visto che si ha dall'analisi matematica che } \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2},$$

allora: $\nabla \phi = -\vec{a}$ e quindi:

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{Equazione di Poisson}) \tag{2.43}$$

Par. 2.9: Il Tensore di Curvatura di Riemann-Christoffel.

Al paragrafo 2.7 abbiamo dimostrato che $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right)$, e cioè esattamente ciò che ottenemmo al Cap. 1, con la (1.35), in chiave puramente geometrica. Ora, sarebbe possibile, sebbene in forma un po' ampollosa, esplicitare la forma del tensore di curvatura di Riemann-Christoffel tramite calcoli diretti, puramente matematici, proprio in analogia col Par. 2.7, ma si ottiene appunto quanto ottenuto al Cap. 1 con la (1.41), che qui riportiamo, ottenuta in chiave più prettamente geometrica e dove useremo lettere greche per gli indici, per denotare che parliamo qui di campi gravitazionali di intensità

qualsiasi e ricordando altresì che qui tali indici sono a quattro valori (spazio-tempo), tre spaziali ed uno temporale:

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{,\kappa} - (\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{,\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (2.43b)$$

e anche $R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ da cui pure: $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma}$ e ricordando l'espressione (2.40) per Γ_{ab}^c :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} = \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} [g^{\sigma\rho} (\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}})] - \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [g^{\sigma\rho} (\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\rho}})] + g_{\lambda\sigma} [\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}] \quad (2.44)$$

Ora, sappiamo che $g_{\lambda\sigma} g^{\sigma\rho} = \delta_{\lambda}^{\rho}$, da cui: $\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} (g_{\lambda\sigma} g^{\sigma\rho}) = 0$ e dunque, tenendo anche conto

della (2.39), ossia della seguente: $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = g_{ij} \Gamma_{ik}^{\mu} + g_{\mu i} \Gamma_{\alpha k}^{\mu}$ si ha:

$$g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g_{\lambda\sigma} = -g^{\sigma\rho} (\Gamma_{k\lambda}^{\eta} g_{\eta\sigma} + \Gamma_{k\sigma}^{\eta} g_{\eta\lambda}) \quad (2.45)$$

dove è stato ovviamente effettuato un piccolo aggiustamento degli indici, che, ricordiamolo, hanno una valenza di genericità, ossia, poco importa se uso j o k; è importante che essi varino su quattro valori, come ormai sappiamo, e che la loro ripetizione sia coerente. Ritornando alla (2.44), la stessa diventa, grazie alla (2.45):

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} [\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}] - [\Gamma_{k\lambda}^{\eta} g_{\eta\sigma} + \Gamma_{k\sigma}^{\eta} g_{\eta\lambda}] \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + [\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\eta} g_{\eta\lambda}] \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} + g_{\lambda\sigma} [\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}] \quad \text{e cioè:} \quad (2.46)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} [\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}] + g_{\eta\sigma} [\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{k\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}]$$

Come, del resto, abbiamo fatto anche alla fine del Par. 1.3, deduciamo tre proprietà del tensore $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, che sono di verifica diretta:

-Simmetria $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$

-Antisimmetria $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\kappa\lambda\nu}$

-Ciclicità $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$

Il tensore di Ricci:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}) \quad R_{\mu\kappa} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \quad (2.47)$$

e si verifica direttamente che: $R_{\mu\kappa} = -g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\kappa\nu}$

E' poi palese la parentela strettissima di tale tensore con la curvatura di Gauss (vedi la (1.40), bidimensionale), da cui appunto il nome di tensore di curvatura.

L'Identità di Bianchi:

ponendoci in un sistema di coordinate localmente inerziale (campo gravitazionale non forte) i vari Γ_{ab}^c sono nulli; infatti, la differenza tra l'equazione della geodetica in uno spazio euclideo (2.37) e quella di uno spazio fortemente incurvato dalla gravità, ossia la (2.38), sta proprio nella comparsa di un Γ_{ab}^c . In un sistema di coordinate localmente inerziale,

dunque, la (2.46) fornisce (derivazione ;η espressa dalla presenza di $\frac{\partial}{\partial x^{\eta}}$):

$$R_{\lambda\mu\nu k;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] \quad (2.48)$$

e quindi, per verifica diretta, si ha che:

$$R_{\lambda\mu\nu k;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;k} + R_{\lambda\mu k\eta;\nu} = 0$$

Contraendo (moltiplicando con), in quest'ultima, λ, ν con $g^{\lambda\nu}$, si ha:

$R_{\mu k;\eta} - R_{\mu\eta;k} + R_{\mu k\eta;\nu}^\nu = 0$ e, contraendo ancora: $R_{;\eta}^\mu - R_{\eta;\mu}^\mu - R_{\eta;\nu}^\nu = 0$ che equivale a scrivere anche (gli ultimi due termini sono simili: $2x \gg \gg 1/2$):

$$(R_{\eta}^\mu - \frac{1}{2} \delta_{\eta}^\mu R)_{;\mu} = 0 \quad \text{e} \quad (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{;\mu} = 0 \quad (2.49)$$

Capitolo 3: Le Equazioni del Campo Gravitazionale di Einstein.

Par. 3.1: Le dieci Equazioni del Campo Gravitazionale di Einstein.

Si tratta di 16 equazioni, in realtà, in quanto le stesse contengono tensori di rango 2, ossia a due indici, ognuno dei quali può assumere 4 valori, e dunque $4 \times 4 = 16$, ma tali equazioni non sono tutte linearmente indipendenti tra loro, ossia contengono dei doppietti, e quelle indipendenti sono appunto dieci.

Sappiamo dalla (2.42) che $g_{00} = -(1 + 2\phi)$ (punto di contatto con la teoria di Newton e base di partenza), mentre dalle (2.36) sappiamo che, per materia non relativistica:

$$T_{00} = \rho c^2 = \rho \quad (\text{con normalizzazione } c=1); \text{ si ha poi che:}$$

$$\Delta g_{00} = \nabla^2 g_{00} = \nabla^2 [-(1 + 2\phi)] = -2\nabla^2 \phi = -8\pi G \rho = -8\pi G T_{00} \quad \text{ossia:}$$

$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}$; possiamo quindi, per estensione, supporre che valga un'eguaglianza del tipo: $G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}$ e, per campi gravitazionali di intensità qualsiasi:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

Deduciamo ora cinque particolarità che $G_{\mu\nu}$ deve evidentemente avere:

A) per definizione, $G_{\mu\nu}$ è un tensore, visto che il tensore momento-energia $T_{\mu\nu}$ lo è

B) $G_{\mu\nu}$ consiste di termini con derivate seconde del tensore metrico (ciò guardando $\nabla^2 g_{00}$)

C) $G_{\mu\nu}$ è simmetrico come $T_{\mu\nu}$

D) siccome $T_{\mu\nu}$ è conservato ($T_{\mu\nu;\mu} = 0$) allora anche $G_{\mu\nu}$ e simili lo sono ($G_{\nu;\mu}^\mu = 0$)

E) per campi stazionari deboli, non relativistici, si ha: $G_{\mu\nu} = \nabla^2 g_{00}$

A e B vogliono che $G_{\mu\nu}$ sia proporzionale al tensore di curvatura (2.46) o meglio la (2.48), palesemente composto da derivate seconde del tensore metrico.

Inoltre, la simmetria degli indici vuole che il tensore di curvatura sia rappresentato dal tensore di Ricci $R_{\mu k} = R_{k\mu}$ e dall'altrettanto simmetrico $R = R_{\mu}^\mu$ (vedi paragrafo sul tensore di Ricci): $G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R$ (3.1)

ma, con le (2.49), abbiamo anche visto che:

$$(R_{\nu}^\mu - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^\mu R)_{;\mu} = 0, \text{ da cui: } R_{\nu;\mu}^\mu = \frac{1}{2} \delta_{\nu}^\mu R_{;\mu} = \frac{1}{2} R_{;\nu}$$

$$G_{\nu}^\mu = C_1 R_{\nu}^\mu + C_2 R g_{\nu}^\mu \quad \text{e} \quad G_{\nu;\mu}^\mu = C_1 R_{\nu;\mu}^\mu + C_2 R_{;\nu} = \frac{C_1}{2} R_{;\nu} + C_2 R_{;\nu} = (\frac{C_1}{2} + C_2) R_{;\nu}$$

Per la particolarità D, o $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ o $R_{;\nu} = 0$; la seconda è da escludere poiché:

$G_{\mu}^{\mu} = (C_1 + g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} C_2)R = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi G T_{\mu}^{\mu}$, quindi, se $R_{,\nu} = \partial R / \partial x^{\nu}$ si annulla, altrettanto deve accadere a $\partial T_{\mu}^{\mu} / \partial x^{\nu}$, ma noi non siamo ancora nel caso di materia non relativistica. Allora: $G_{\mu\nu} = C_1(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R)$ (3.2)

Ora, grazie alla particolarità E, calcoliamo C_1 : per sistemi non relativistici, si ha sempre:

$|T_{ij}| \ll T_{00}$, ossia: $|G_{ij}| \ll G_{00}$, da cui, per la (3.2) qui sopra: $R_{ij} \cong \frac{1}{2} g_{ij} R$; inoltre, $g_{\alpha\beta} \cong \eta_{\alpha\beta}$ (tensore di Minkowski) e dunque: $R_{kk} \cong \frac{3}{2} R$ e $R_{00} \cong \frac{R}{2}$.

La (3.2) con $\mu = \nu = 0$ ($g_{00} \cong \eta_{00}$) fornisce:

$G_{00} = C_1(R_{00} - \frac{1}{2}(-1)2R_{00}) = 2C_1 R_{00}$; inoltre, per campi deboli possiamo scrivere (vedi la (2.46) con $\Gamma_{ab}^c = 0$ o direttamente la (2.48)):

$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} [\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}]$ e $R_{\mu k} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu k}$; essendo il campo statico, le derivate temporali si annullano:

$R_{00} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda 0 \nu 0} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\nu} (\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}) = \frac{1}{2} \eta^{ij} (\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}) - \frac{1}{2} \eta^{00} 0 = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$, da cui:

$G_{00} = 2C_1 \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} = C_1 \nabla^2 g_{00}$, da cui ($C_1 = 1$) $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ e quindi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

che sono le **equazioni del campo gravitazionale di Einstein**, che riscriviamo ora complete, ossia senza più la convenzione $c=1$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

che ci dicono che la curvatura ($\propto R_{\mu\nu}, R$) dello spazio-tempo è uguale alla presenza di materia-energia ($\propto T_{\mu\nu}$) nello stesso!!!

Contraendo ora con $g^{\mu\nu}$, si ha: $R - 2R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu}^{\mu}$, ossia $R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu}^{\mu}$ e quindi:

$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda})$ (altra forma delle equazioni di Einstein).

Nel vuoto, $f(T)=0$ e quindi $R_{\mu\nu} = 0$.

Capitolo 4: Tests classici della teoria di Einstein.

Par. 4.1: La metrica.

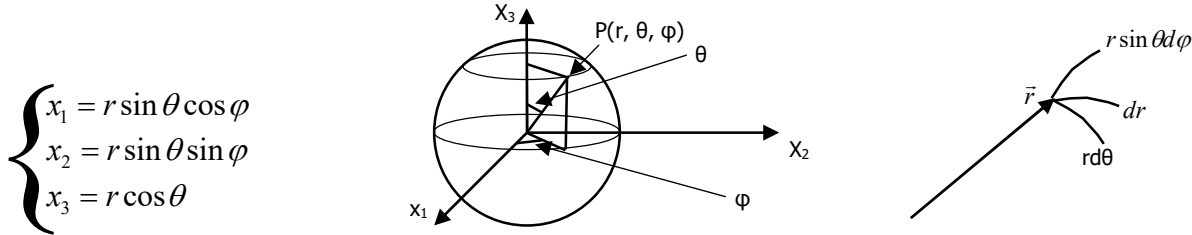
Qui di seguito viene data una derivazione rigorosa della metrica di Schwarzschild; per passare direttamente ad una deduzione più semplice, che approda poi alla (4.5e), si veda più sotto.

Si abbia sempre $c=1$, come convenzione semplificatrice. Definiamo un tensore metrico generale, per cui un campo gravitazionale sia statico e isotropico; statico significa che il tensore metrico non dipende dal tempo, riguardo la sua forma e le sue caratteristiche, con chiaro riferimento ai coefficienti. Isotropico significa che vi è dipendenza dagli invarianti irrotazionali; sappiamo infatti che la norma di un vettore ed il prodotto scalare tra due vettori sono invarianti per rotazione: $\vec{x}^2 = |\vec{x}|^2$, $(d\vec{x})^2$, $\vec{x} \cdot d\vec{x}$

Tutto ciò per coordinate ortogonali quasi minkowskiane (quasi $\eta_{\alpha\beta}$)

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)dtx \cdot dx - D(r)(x \cdot dx)^2 - C(r)dx^2 \quad (4.1)$$

$r = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2}$ e, in coordinate sferiche:



$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2rE(r)dt dr - r^2 D(r)(dr)^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Definiamo ora l'applicazione lineare $t' = t + \phi(r)$ ed eliminiamo gli elementi non diagonali (misti) ponendo:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}; \text{ esiste una rototraslazione/applicazione lineare che mi riduce a forma}$$

canonica la forma quadratica qui sopra:

$$d\tau^2 = F(r)dt'^2 - G(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \text{ con:}$$

$$G(r) = r^2 \left(D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right)$$

Definiamo $r'^2 = C(r)r^2$; otteniamo allora la forma standard:

$$d\tau^2 = B(r')dt'^2 - A(r')dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.2)$$

$$\text{con } B(r') = F(r) \quad A(r') = \left(1 + \frac{C(r)}{G(r)} \right) \left(1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr} \right)^{-2}$$

A noi interessa dunque la forma standard (4.2):

$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ e dal confronto con l'espressione generale della metrica (2.9), si evince che: $g_{rr} = A(r)$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, $g_{tt} = -B(r)$ e siccome $g_{\mu\nu}$ è ortogonale, si ha che: $g^{rr} = A^{-1}(r)$, $g^{\theta\theta} = r^{-2}$, $g^{\phi\phi} = r^{-2} \sin^{-2} \theta$, $g^{tt} = -B^{-1}(r)$.

Sapendo poi che, per la (2.40): $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right)$, emerge che le sole quantità non nulle sono:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A(r)}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr}, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta, \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr}.$$

Calcoliamo ora il tensore di Ricci ($\lambda = \nu$ in $R_{\mu\nu}^\lambda$ della (2.43b)):

$R_{\mu k} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{k\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu k}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}$ e ricordiamo che $\frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^k}$ è simmetrico su μ e k , anche per eventuale verifica diretta; dunque, in totale, troviamo che:

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'(r)}{A(r)}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \cdot R_{\theta\theta} \quad , \quad R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{A(r)} \quad , \quad R_{\mu\nu} = 0 \text{ per } \mu \neq \nu .$$

Par. 4.2: La soluzione di Schwarzschild.

Sappiamo già che: $d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$

Inoltre, nel vuoto $R_{\mu\nu} = 0$, quindi

$$R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{tt} = 0 ; \quad (4.3)$$

notiamo inoltre che:

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \text{ e, per la (4.3), si ha: } \frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B}, \text{ cioè:}$$

$$A(r)B(r) = \text{const} . \quad (4.4)$$

Poi, per $r \rightarrow \infty$, il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ deve approssimarsi al tensore di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ in coordinate sferiche, ossia: $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$, da cui, per la (4.4):

$A(r) = \frac{1}{B(r)}$ e usando quest'ultima nelle espressioni per $R_{\theta\theta}$ ed R_{rr} , si ha:

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r) \text{ e } R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}(r)}{2rB(r)}; \text{ ponendo } R_{\theta\theta} = 0 \text{ si ha:}$$

$$\frac{d}{dr} rB(r) = rB'(r) + B(r) = 1, \text{ da cui: } rB(r) = r + \text{const} .$$

Inoltre, per $r \rightarrow \infty$: $g_{tt} = g_{00} = -B = -1 - 2\phi \rightarrow (\phi = -\frac{GM}{r}) \rightarrow$

$$B(r) = [1 - \frac{2GM}{r}] \text{ e } A(r) = [1 - \frac{2GM}{r}]^{-1} \text{ e cioè, infine:}$$

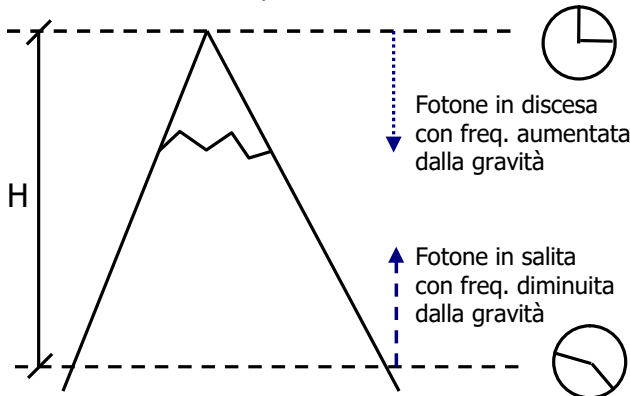
$$d\tau^2 = [1 - \frac{2GM}{r}] dt^2 - [1 - \frac{2GM}{r}]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.5)$$

(Soluzione di Schwarzschild)

La Soluzione di Schwarzschild la usiamo per descrivere lo spazio-tempo al di fuori degli astri; infatti, trattiamo una massa M ed il potenziale generato a distanza r dal centro di M ($U(r) \propto \frac{GM}{r}$). Per procurarci invece una metrica di uno spazio-tempo in cui noi stessi siamo immersi, come nel caso della cosmologia, ricorriamo a quella di Robertson e Walker.

Ecco una deduzione semplificata della metrica di Schwarzschild:

anche la gravità rallenta il tempo! In montagna il tempo scorre più velocemente che a valle. Ovviamente, sulla Terra, la differenza è impercettibile, ma su una stella di neutroni, o in un buco nero, l'effetto è intensissimo.



$$\Delta E = m_0 g H \quad (\text{delta energia del salto di quota})$$

$$\Delta E = h \Delta \nu \quad (\text{delta energia del calo di freq. di un fotone})$$

$$\text{Dalle due: } \Delta \nu = m_0 g H / h.$$

$$\text{Per un fotone, } E = h \nu, \text{ ma in relatività: } E = m_0 c^2, \text{ da cui, per un fotone: } m_0 = h \nu / c^2 \text{ e dunque, per } \Delta \nu:$$

$$\Delta \nu = \nu g H / c^2 \text{ ed essendo il tempo l'inverso della frequenza, si ha: } \Delta \nu / \nu = \Delta t / t \text{ e dunque:}$$

$$\Delta t = \frac{g H}{c^2} t \quad \text{Dunque, su un tempo } t, \text{ si ha un rallentamento } \Delta t \text{ dato dalla gravità!}$$

Montagna, gravità e tempo.

Sappiamo che la velocità di fuga di un corpo celeste di massa M e raggio R vale: $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Se su quel corpo un

oggetto viene lanciato verticalmente alla velocità di fuga, esso uscirà dal campo gravitazionale del corpo celeste ed andrà verso l'infinito, senza più ricadere.

Un buco nero è un corpo così compresso (M grande ed R piccolo) che la velocità di fuga sulla sua superficie raggiunge il valore della velocità della luce e dunque neanche la luce vi sfugge, da cui il nome di buco nero; inoltre, per quanto detto sopra, si può affermare che in un buco nero il tempo è pressoché fermo!

Tornando al rallentamento: $\Delta t = \frac{gH}{c^2} t$, che può essere interpretata come: $dt = \frac{gdr}{c^2} t$ e

considerando che $|g| = \frac{GM}{r^2}$, segue che: $dt = t \frac{GM}{c^2 r^2} dr$, ossia:

$$\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow \int \frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \int \frac{dr}{r^2} \rightarrow \ln t = -\frac{GM}{c^2 r} + k \rightarrow$$

$$t = k \cdot e^{\frac{-GM}{c^2 r}} \rightarrow (e^{-x} \approx 1 - x) \rightarrow t = k(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow (t = t_0 \gg r = \infty) \rightarrow t = t_0(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow$$

$$(\sqrt{1-x}) \approx 1 - \frac{1}{2}x \rightarrow t = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (4.5b)$$

D'altra parte, sappiamo che la formula per la contrazione di Lorentz ha la stessa forma della formula per la dilatazione del tempo, ma con la radice al denominatore, dunque:

$$r = r_0 / \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (4.5c)$$

Ricordiamo il tensore metrico: $d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ e ricordiamo anche le più semplici coordinate sferiche: $d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$. (4.5d)

Ricordiamo ora un attimo le (4.5b) e (4.5c):

$$dt = dt_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \rightarrow dt^2 = dt_0^2 (1 - \frac{2GM}{c^2 r}) = dt_0^2 B(r) \text{ e:}$$

$$dr^2 = dr_0^2 / (1 - \frac{2GM}{c^2 r}) \cong dr_0^2 (1 + \frac{2GM}{c^2 r}) = dr_0^2 A(r), \text{ poich , per Taylor: } 1/(1-x) \cong (1+x). \text{ Inoltre,}$$

$$\text{non si ha contrazione di Lorentz sulle direzioni trasversali (ad esempio, y e z), da cui, per la (4.5d): } d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.5e)$$

che   la Soluzione di Schwarzschild.

Par. 4.3: Le equazioni generali del moto.

Sappiamo dunque che $d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ e teniamo inoltre conto della equazione della geodetica (2.38): $\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0$ (in p generico, per ora): si ha allora, facendo variare μ :

$$0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)} \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \quad (4.6)$$

$$0 = \frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \quad (4.7)$$

$$0 = \frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{dp} \frac{d\theta}{dp} \quad (4.8)$$

$$0 = \frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} \quad (4.9)$$

Ora, siccome il campo è isotropico, poniamo $\theta = \pi/2$ e dunque le ultime due, (4.8) e (4.9) diventano:

$$\frac{d}{dp} \left[\ln \frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2 \right] = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dp} \left[\ln \frac{dt}{dp} + \ln B \right] = 0, \text{ da cui:}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = J \text{ (costante)} \quad (4.10)$$

$$\frac{dt}{dp} B = \text{const} \quad (=1, \text{ per scelta}) \quad (4.11)$$

da cui: $\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B}$. Inserendo ora le (4.10), (4.11) e la condizione ($\theta = \pi/2$) usata prima, nella (4.6), si ha:

$$0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{J^2}{r^3 A(r)} + \frac{B'(r)}{2A(r) B^2(r)} \quad \text{e moltiplicando ora per } 2A(r) \frac{dr}{dp} :$$

$$\frac{d}{dp} \left[A(r) \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \right] = 0 \text{ cioè:}$$

$$A(r) \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \text{ (costante)} \quad (4.12)$$

Facendo poi sistema tra la condizione ($\theta = \pi/2$) usata prima, la (4.10), (4.11) e (4.12), si ottiene:

$$d\tau^2 = E dp^2 \quad (4.13)$$

Sappiamo che $E=0$ per i fotoni e $E>0$ per particelle materiali.

Siccome $A(r)$ è sempre positivo, si ha che la particella può raggiungere r solo se (vedi la (4.12)):

$$\frac{J^2}{r^2} + E \leq -\frac{1}{B(r)}. \text{ Usando poi la (4.11) nelle (4.10), (4.12) e (4.13), si ottiene:}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = JB(r) \quad (4.14)$$

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad (4.15)$$

$$\text{e } d\tau^2 = EB^2(r)dt^2 \quad (4.16)$$

Sappiamo ora che, per campi deboli: $B - 1 = 2\phi \rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dt} = J$ e

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi \cong \frac{1-E}{2} \quad (4.17)$$

in quanto: $-\frac{1}{B(r)} = -\frac{1}{1+2\phi} \cong (\text{per Taylor}) \cong -(1-2\phi)$

La (4.17) ha una analoga nella meccanica classica di Newton.

Per orbite generali, $r=r(\phi)$; sappiamo poi che:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d\phi}{dp} = J \\ A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \end{cases}$$

eliminando dp , si ha: $\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2}$, (4.18)

con soluzione:

$$\phi = \pm \int \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}} \quad (4.19)$$

Par. 4.4: La deflessione della luce da parte del Sole.

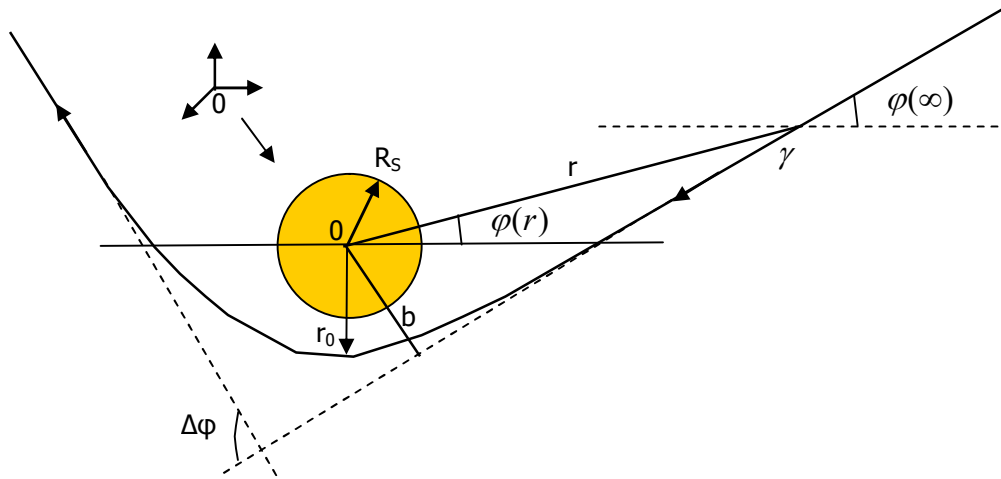


Fig. 4.1: La deflessione della luce da parte del Sole.

$R_S = R_{delSole}$; b è il parametro d'urto. All'infinito, $b = r \sin(\phi - \phi_\infty) \cong r(\phi - \phi_\infty)$ e:

$-V = \frac{d}{dt} r \cos(\phi - \phi_\infty) \cong \frac{dr}{dt}$; V è la velocità di moto (costante). Essendo all'infinito $A=B=1$,

inserendo queste due relazioni nelle (4.14) e (4.15), si ha:

$$J = bV \text{ ed} \quad (4.20)$$

$$E = 1 - V^2 \quad (4.21)$$

La (4.21) è banale; per ottenere invece la (4.20), osserviamo che:

$b \cong r(\varphi - \varphi_\infty)$, da cui: $0 = dr(\varphi - \varphi_\infty) + r d\varphi$, da cui: $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{dr}{dt}(\varphi - \varphi_\infty)r = bV = J$

Per $r = r_0$ si ha che $dr/d\varphi = 0$ e la (4.18) allora diviene: $J = r_0 \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{1/2}$ e la (4.19) diviene, con facili passaggi:

$$\varphi(r) = \varphi(\infty) + \int_r^\infty \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left[\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{B(r)} - 1 + V^2 \right) \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{-1} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (4.22)$$

La variazione totale di φ è: $2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty|$, mentre se il raggio di luce procedesse indisturbato, si avrebbe una variazione pari a π , quindi, con riferimento alla Fig. 4.1, si ha: $\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi$; per un fotone, $V^2 = 1$ e la (4.22) fornisce:

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty A^{1/2}(r) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r} \quad (4.23)$$

Usando ora gli sviluppi (di Taylor) dovuti a Robertson:

$$A(r) = 1 + 2 \frac{GM}{r} + \dots, \quad B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{r} + \dots, \text{ si ha:}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 &= \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[\frac{1 - 2 \frac{GM}{r_0} + \dots}{1 - 2 \frac{GM}{r} + \dots} \right] - 1 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[1 + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \dots \right] - 1 \cong \\ &\cong \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 2GM \frac{(r_0 - r)}{rr_0} - 1 \right] = \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] \end{aligned}$$

L'ultima eguaglianza è verificabile direttamente.

La (4.23) diviene, per Taylor:

(per la risoluzione dei primi due integrali, si ponga $\frac{r_0}{r} = \cos x$, mentre per il terzo si porrà

$\frac{r_0}{r} = t$ e l'integrale sarà $\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$)

1° Int.	2° Int.	3° Int.
------------	------------	------------

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{GM}{r} + \frac{GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] dr$$

(i tre termini nel riquadro giallo scaturiscono dal prodotto tra $A^{1/2}(r) = 1 + \frac{GM}{r} + \dots$ e

$\left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]^{-1/2} \cong \left[1 + \frac{GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]$, ed è stato trascurato il quarto, in quanto molto minore degli altri,

poiché va ricordato che siamo in convenzione $c=1$ ed ai denominatori ci sarebbero dei c^2 ed il quarto termine trascurato avrebbe avuto al suo denominatore addirittura un c^4)

ossia: $\varphi(r) - \varphi(\infty) = \sin^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) + \frac{GM}{r_0} \left[1 + 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2} - \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right] + \dots$ e dunque:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0} \text{ e ricordando la nostra normalizzazione (c=1), si ha infine: } \Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0 c^2}; \text{ con}$$

$r_0 = R_s = 6,95 \cdot 10^8 m$ e $M_s = 1,97 \cdot 10^{30} kg$, si ha:

$\Delta\varphi = 1,75''$, in ottimo accordo con i dati sperimentali. In realtà, quando nel 1919 fu effettuata una spedizione in Brasile per la misura di tale deflessione della luce delle stelle da parte del Sole, in occasione di una eclissi, la precisione della misura era dello stesso ordine di grandezza del risultato.

Par. 4.5: Calcolo alternativo della deflessione, con profili di antagonismo alla TRG.

Questo metodo (Firk) fa leva sulla variazione di velocità che la luce subisce quando si approssima ad una massa.

Ricordiamo innanzitutto che, per Schwarzschild (vedi, ad esempio, la (4.5e)):

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2; \quad (4.24)$$

Sappiamo poi che, in generale: $d\tau^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$ ed essendo, per un fotone, $(d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2$, segue che: $d\tau^2 = 0$, da cui, per la (4.24):

$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$; inoltre, considerando luce che viaggia radialmente verso il Sole, possiamo annullare le componenti in $d\theta$ e $d\varphi$:

$$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2; \quad (4.25)$$

la velocità della luce è $c = dr/dt$ lontano dalla massa del Sole, mentre in prossimità dello stesso vale la (4.25), dalla quale si ricava che:

$$V = dr/dt = c(B(r)/A(r))^{1/2} \neq c;$$

Dal Par. 4.2 abbiamo i valori di $A(r)$ e $B(r)$, in cui, però, nel momento dei calcoli, va tenuto conto che non è più $c=1$; quindi:

$$B(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}] \text{ e } A(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]^{-1} \cong [1 + \frac{2GM}{rc^2}]$$

dagli sviluppi in serie sulla variabile $\frac{2GM}{rc^2}$, si ha banalmente che:

$$V/c = ([1 - \frac{2GM}{rc^2}] / [1 + \frac{2GM}{rc^2}])^{1/2} \cong [1 - \frac{2GM}{2rc^2}] [1 - \frac{2GM}{2rc^2}] \cong [1 - \frac{2GM}{rc^2}], \text{ ossia: } V \cong c[1 - \frac{2GM}{rc^2}]$$

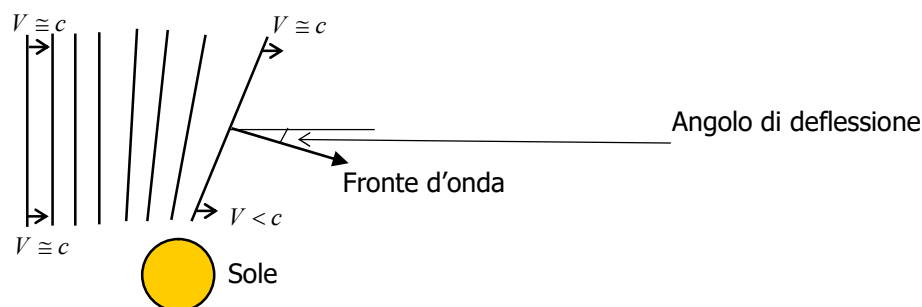


Fig. 4.2: Le velocità dei fronti d'onda.

Con riferimento alla Figura 4.2, la parte di fronte d'onda che è più lontana dalla massa M ha velocità c , mentre quella più vicina ha velocità $V < c$.

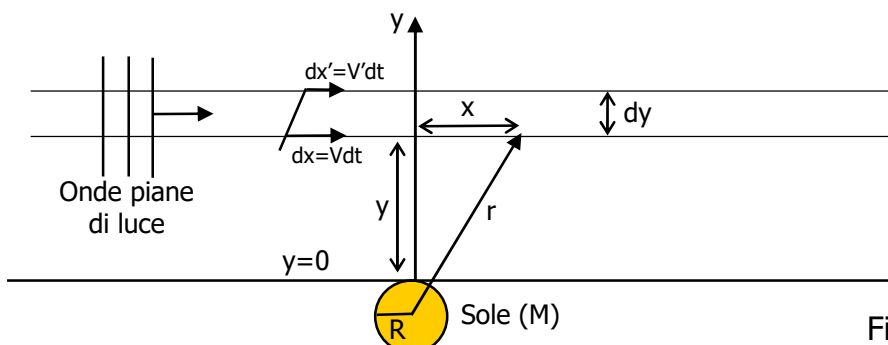


Fig. 4.3: Schema per i calcoli.

Ora, con riferimento invece alla Figura 4.3, si ha:

$$r^2 = (y + R)^2 + x^2 \text{ (eq. di un cerchio);} \quad (4.26)$$

applichiamo ora l'operatore $\partial/\partial y$ alla (4.26), ottenendo:

$2r(\partial r/\partial y) = 2(y + R)$ da cui: $\partial r/\partial y = (y + R)/r$ e sulla superficie della massa M:

$$\partial r/\partial y|_{y \rightarrow 0} = R/r$$

Ora: $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} (c[1 - \frac{2GM}{rc^2}]) = \frac{2GM}{r^2 c} \frac{\partial r}{\partial y}$, da cui:

$$\frac{\partial V}{\partial y}|_{y \rightarrow 0} = \frac{2GM}{r^2 c} \frac{\partial r}{\partial y}|_{y \rightarrow 0} = \frac{2GM}{r^2 c} \frac{R}{r} = \frac{2GMR}{r^3 c}.$$

Calcoliamo ora la differenza tra i cammini dx e dx' dei fronti d'onda a distanza verticale y ed $y+dy$, alle quali la luce ha velocità rispettivamente pari a V e V' :

$dx' = V'dt$ e $dx = Vdt$, da cui:

$$dx' - dx = V'dt - Vdt = dt(V' - V); \quad (4.27)$$

inoltre, si ha, per Taylor: $V' = V + (\partial V/\partial y)dy$, ossia: $V' - V = (\partial V/\partial y)dy$ e la (4.27) diventa:

$$dx' - dx = (\partial V/\partial y)dydt \quad (4.28)$$

Poi, sempre dalla Figura 4.3 e dalla (4.28), si ha:

$$d\alpha = (dx' - dx)/dy = (\partial V/\partial y)dt = (\partial V/\partial y)dx/V.$$

La deflessione totale $\Delta\alpha$ subita tra $-\infty$ e $+\infty$ è, considerando che, in tale range, V è quasi sempre uguale a c (tranne che appena in prossimità di M):

$$\Delta\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c} (\partial V/\partial y)dx \cong \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial V/\partial y)dx \text{ e, in prossimità della superficie di M (y=0):}$$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2GMR}{r^3 c} dx = \frac{2GMR}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2GMR}{c^2} \left| \frac{x}{R^2(R^2 + x^2)^{1/2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2GMR}{c^2} \cdot \frac{2}{R^2}, \text{ cioè:}$$

$$\Delta\alpha = \frac{4GM}{Rc^2} = 1,75'' , \text{ proprio come ottenuto al Par. 4.4!!!}$$

Par. 4.6: La precessione del perielio dei pianeti.

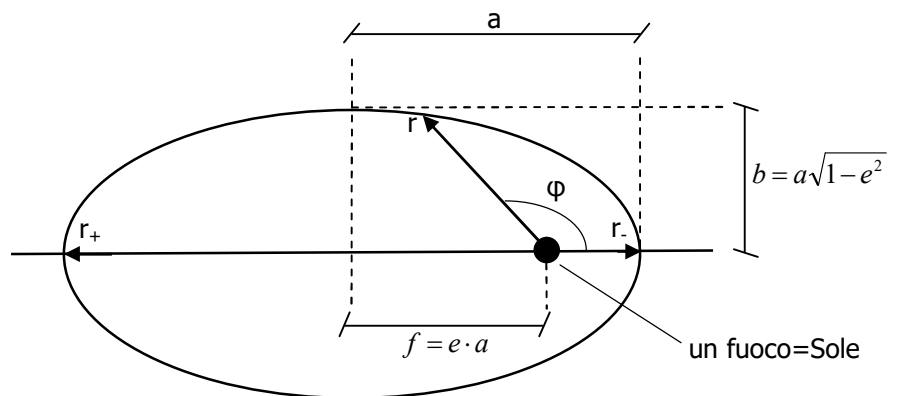
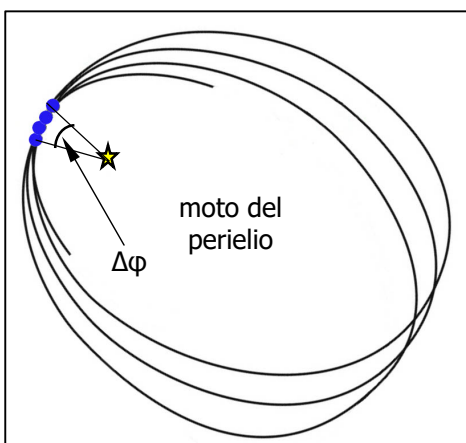


Fig. 4.4: La precessione del perielio di Mercurio.

Per i pianeti ed in particolare per Mercurio, nei secoli, si nota che il perielio si sposta.

Questo è un fenomeno della Relatività Generale. In r_+ e r_- , ovviamente si ha che $\frac{dr}{d\phi} = 0$.

Sappiamo poi già che (vedi la (4.18)):

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2}; \quad (4.29)$$

quest'ultima, in r_+ e r_- , diventa: $\frac{1}{r_{\pm}^2} - \frac{1}{J^2 B(r_{\pm})} = -\frac{E}{J^2}$, ossia: $\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{J^2 B(r_+)} = -\frac{E}{J^2}$ e

$$\frac{1}{r_-^2} - \frac{1}{J^2 B(r_-)} = -\frac{E}{J^2}, \text{ da cui:}$$

$$E = \frac{\frac{r_+^2}{B(r_+)} - \frac{r_-^2}{B(r_-)}}{r_+^2 - r_-^2} \text{ e } J^2 = \frac{\frac{1}{B(r_+)} - \frac{1}{B(r_-)}}{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}} \quad (4.30)$$

Si ha dunque, sempre per la (4.29), che: $\varphi(r) = \varphi(r_-) + \int_{r_-}^r \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left[\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}}$, da cui,

per le (4.30), si ha:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \int_{r_-}^r \left[\frac{r_-^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2} A^{1/2}(r) r^{-2} dr \quad (4.31)$$

La variazione totale di φ è: $\Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)|$. In assenza di precessione si avrebbe:

$2|\pi| = 2\pi$, in quanto, con riferimento alla Fig. 4.4, se, come d'uso, attribuiamo $\varphi=0$ nella posizione di r_- , allora r_+ si trova a $\varphi=\pi$. La precessione dell'orbita vale: $\Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi$. Ricordiamo ora gli sviluppi di Robertson prima esposti:

$$A(r) = 1 + 2\frac{GM}{r} + \dots, \quad B(r) = 1 - 2\frac{GM}{r} + \dots \quad (4.32)$$

$$(\text{e } A^{-1}(r) = 1 - 2\frac{GM}{r} + \dots, \quad B^{-1}(r) = 1 + 2\frac{GM}{r} + \dots) \quad (4.33)$$

Abbiamo bisogno di uno sviluppo al 2° ordine per B^{-1} , altrimenti nella (4.31) B non dà nessun contributo $\propto \frac{1}{r^2}$. Per $B^{-1}(r)$ abbiamo allora (per Taylor, al 2° ordine):

$$B^{-1}(r) \cong (1 - 2\frac{GM}{r} + \dots)^{-1} \cong 1 + 2\frac{GM}{r} + 4\frac{G^2 M^2}{r^2} + \dots \quad (4.34)$$

Con tali sviluppi, il radicando nella (4.31), ossia la:

$$R = \frac{r_-^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2} \text{ può ridursi ad una forma quadratica in } \frac{1}{r};$$

si può comunque notare che tale quantità R si annulla per $r = r_{\pm}$, quindi:

$$R = \frac{r_-^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2} = C \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right), \text{ dal momento che}$$

$$\text{l'espressione generica } C \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \quad (4.35)$$

si annulla proprio per $r = r_{\pm}$. C può essere determinata eseguendo il $\lim_{r \rightarrow \infty}$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_-^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2} = \frac{r_-^2 [1 - B^{-1}(r_-)] - r_+^2 [1 - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} C \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) = C \left(\frac{1}{r_-} \right) \left(-\frac{1}{r_+} \right) = \frac{-C}{r_- r_+}, \text{ da cui: } C = \frac{r_+^2 [1 - B^{-1}(r_+)] - r_-^2 [1 - B^{-1}(r_-)]}{r_+ r_- [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]}; \text{ ora, in}$$

tale espressione di C, usiamo la (4.34) (anche perché con uno sviluppo di B^{-1} di ordine minore, come nella (4.33), avremmo il banale risultato di $C=1$); si ottiene:

$$C \cong 1 - 2MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right); \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \text{infatti: } C &= \frac{r_+^2 [1 - B^{-1}(r_+)] - r_-^2 [1 - B^{-1}(r_-)]}{r_+ r_- [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} = \frac{r_+^2 \left(-\frac{2GM}{r_+} - \frac{4G^2 M^2}{r_+^2} \right) - r_-^2 \left(-\frac{2GM}{r_-} - \frac{4G^2 M^2}{r_-^2} \right)}{r_+ r_- \left(\frac{2GM}{r_+} - \frac{2GM}{r_-} + \frac{4G^2 M^2}{r_+^2} - \frac{4G^2 M^2}{r_-^2} \right)} = \\ &= \frac{(r_- - r_+)}{(r_- - r_+) + 2GM \left(\frac{r_-}{r_+} - \frac{r_+}{r_-} \right)} = \frac{(r_- - r_+)}{(r_- - r_+) + \frac{2GM}{r_- r_+} (r_-^2 - r_+^2)} = \frac{1}{1 + 2GM \frac{(r_- + r_+)}{r_- r_+}} = \frac{1}{1 + 2GM \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)} \cong \\ &\cong 1 - 2GM \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right). \end{aligned}$$

Inserendo ora tale C nella (4.35) e poi inserendo quanto ottenuto nella (4.31), si ha:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) \cong \dots \cong \left[1 + MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \int_{r_-}^r \frac{\left[1 + \frac{GM}{r} \right] dr}{r^2 \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{1/2}}; \quad (4.37)$$

$$\text{definiamo ora: } \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \sin \Psi; \quad (4.38)$$

si ottiene: $(r = r_- \rightarrow \Psi = -\pi/2 \quad \text{ed} \quad r = r_+ \rightarrow \Psi = \pi/2)$; inoltre, basta ricavare dr in funzione di $d\Psi$ dalla (4.38):

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = d\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \sin \Psi\right] \rightarrow -\frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos \Psi d\Psi \rightarrow$$

$$\rightarrow dr = \frac{-r^2}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos \Psi d\Psi, \text{ e sostituire quanto ottenuto nell'integrale in dr (4.37):}$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(r_-) &\cong \left[1 + MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \int_{r_-}^r \frac{\left[1 + \frac{GM}{r} \right]}{r^2 \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{1/2}} dr = \\ &= \left[1 + MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{\left[1 + \frac{GM}{r} \right]}{r^2 \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{1/2}} \left(-\frac{r^2}{2} \right) \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos \Psi d\Psi; \end{aligned} \quad (4.39)$$

per snellire la formula, poniamo ora: $a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$ e $b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$, da cui:

$$\frac{1}{r_+ r_-} = (a^2 - b^2) \text{ e inoltre la (4.38) diviene: } \frac{1}{r} = a + b \sin \Psi. \text{ Dunque, la (4.39) diviene:}$$

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) \cong -b(1 + 2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1 + GM(a + b \sin \Psi)]}{\left\{ \frac{1}{r_-} - (a + b \sin \Psi) \right\} \left\{ (a + b \sin \Psi) - \frac{1}{r_+} \right\}^{1/2}} \cos \Psi d\Psi =$$

$$\begin{aligned}
&= -b(1+2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1+GM(a+b\sin\Psi)]}{\left[-\frac{1}{r_-r_+} - (a+b\sin\Psi)^2 + (a+b\sin\Psi)\left(\frac{1}{r_-} + \frac{1}{r_+}\right)\right]^{1/2}} \cos\Psi d\Psi = \\
&= -b(1+2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1+GM(a+b\sin\Psi)]}{[-(a^2-b^2) - (a+b\sin\Psi)^2 + 2a(a+b\sin\Psi)]^{1/2}} \cos\Psi d\Psi = \\
&= -b(1+2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1+GM(a+b\sin\Psi)]}{[b^2(1-\sin^2\Psi)]^{1/2}} \cos\Psi d\Psi = -(1+2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} [1+GM(a+b\sin\Psi)] d\Psi = \\
&= -(1+2aMG) \left[\int_{-\pi/2}^{\Psi} (1+aGM) d\Psi + \int_{-\pi/2}^{\Psi} bGM \sin\Psi d\Psi \right] = \\
&= -(1+2aMG) \left[(1+aGM) \left| \Psi \right|_{-\pi/2}^{\Psi} + bGM \left| -\cos\Psi \right|_{-\pi/2}^{\Psi} \right] = -(1+2aMG) \left[(1+aGM) \left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) - bGM \cos\Psi \right] = \\
&= -(1+2aMG)(1+aGM) \left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) + bGM(1+2aMG) \cos\Psi = - \left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) (1+3aMG+2a^2M^2G^2) + \\
&+ (bGM+2abM^2G^2) \cos\Psi . \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Adesso, ricordiamo che siamo ancora in convenzione $c=1$ e dove leggiamo $\frac{GM}{r}$ in realtà sarà poi, dopo il ripristino finale, $\frac{GM}{rc^2}$, dunque parliamo di una quantità piccola ed ancor

più piccola sarà la stessa quantità al quadrato, ossia: $\frac{G^2M^2}{r^2c^4}$, quindi, nella (4.40) trascureremo i termini con M^2G^2 , che, in realtà, per quanto appena detto, saranno alla fine del tipo $\frac{M^2G^2}{c^4}$, una volta rimossa la convenzione $c=1$; dunque, la (4.40) diventa:

$$\begin{aligned}
\varphi(r) - \varphi(r_-) &\cong - \left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) (1+3aMG) + bGM \cos\Psi \text{ e ripristinando i valori di } a \text{ e } b, \text{ si ottiene infine:} \\
&= - \left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) (1+3aMG) + bGM \cos\Psi
\end{aligned}$$

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) \cong - \left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) MG \right] + \frac{1}{2} GM \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos\Psi .$$

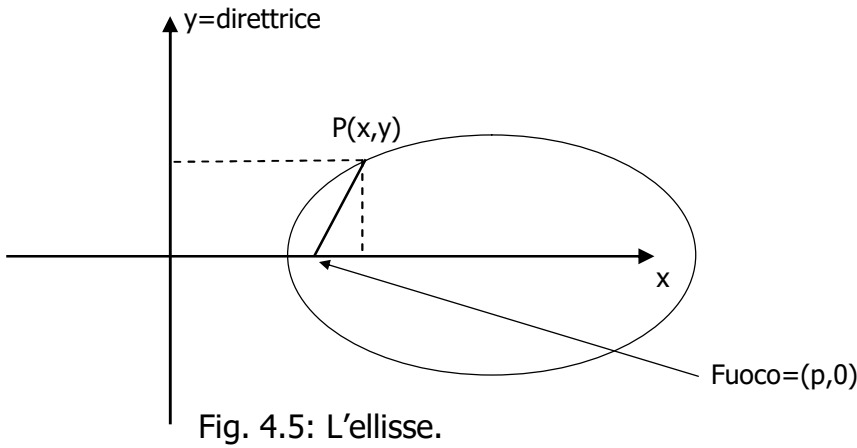
Ora, come già ricordammo più sopra, si ha che: $r=r_+ \rightarrow \Psi = \pi/2$, perciò:

$$\begin{aligned}
|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| &\cong \left| - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) MG \right] + \frac{1}{2} GM \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos \frac{\pi}{2} \right| = \pi \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) MG \right] = \\
&= \pi [1+3aMG] \text{ e infine: } \Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi = \left(\frac{6\pi MG}{L} \right) [\text{rad/rev}] , \text{ dove:}
\end{aligned}$$

$L = \frac{1}{a} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right]^{-1}$ (L=semilato retto). Ricordando ora la nostra normalizzazione iniziale ($c=1$), si ha: $\Delta\varphi = \left(\frac{6\pi MG}{Lc^2} \right)$; per Mercurio $L = 55,3 \cdot 10^9 m$, da cui:

$\Delta\varphi \cong 5,03 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,1039''$, poiché $1'' \approx 4,84 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$. Ora, siccome in un secolo Mercurio compie 415 rivoluzioni, si ha $\Delta\varphi_{\text{secolo}} = 43,1185''$, in ottimo accordo con i dati sperimentali, visto che i primi rilievi su Mercurio risalgono al 1765 e Clemence, nel 1943, calcolò: $\Delta\varphi = 43,11'' \pm 0,45''$.

(**): alcune considerazioni sull'ellisse:



Si ha, per la definizione stessa di ellisse, che: $d(P,F)=ed(P,d)$, dove e è l'eccentricità e d è la direttrice. Dunque: $(x-p)^2 + y^2 = e^2 x^2$, da cui $(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$; con facili

calcoli otteniamo che, per $0 < e < 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a = pe/(1-e^2)$ e $b = a\sqrt{1-e^2}$, ma

sappiamo anche che $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (dalla definizione di ellisse), quindi, per confronto: $a \cdot e = c$. Considerando poi anche l'altro fuoco, si ha che: $d(P,F) + d(P,F') = \text{cost} = 2a$; infatti: $d(P,F) = ed(P,d)$ e $d(P,F') = ed(P,d')$ e $d(P,F) + d(P,F') = e[d(P,d) + d(P,d')] = \text{costante}$, ovviamente (per simmetria). Si ha inoltre: $r_{\pm} = (1 \pm e)a$, poiché, osservando la Fig. 4.4 ed essendo c la distanza tra il centro dell'ellisse ed un fuoco, si ha che: $r_+ = a + c = a + ea = (1 + e)a$ e $r_- = a - c = a - ea = (1 - e)a$ e definendo L come semilato retto

$(\frac{1}{L} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}))$, si ha, sostituendo in quest'ultima le espressioni appena fornite per r_+ ed r_- : $L = (1 - e^2)a$.

Par. 4.7: Onde gravitazionali dalle Equazioni di Einstein.

Ponendoci nella Weak Field Approximation, esprimiamo il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ come la somma del tensore di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ (di uno spazio non curvo) e di una perturbazione $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad (4.41)$$

Ricordiamo poi il tensore di Ricci ed i simboli di Christoffel:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \quad (4.42)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right); \quad (4.43)$$

si ha dunque: ($\eta \rightarrow \text{const}$)

$$R_{\mu\nu} \cong \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + O(h^2) \quad \text{e} \quad (4.44)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) + O(h^2) \quad (4.45)$$

$(\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu} = h_{\nu}^{\lambda}, \quad \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}})$ e combinando le due:

$$R_{\mu\nu} \cong R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda) \quad (4.46)$$

(Operatore d'Alembertiano $\Box^2 = \nabla^2(*) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2}$); infatti, per la (4.44), si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\lambda}) + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\mu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\nu} (\eta^{\lambda\rho} h_{\mu\lambda}) \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu}) + \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\mu}) - \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} h_{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\nu} h_\mu^\rho \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} h_\nu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} h_\mu^\lambda - \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} h_{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\rho} h_\mu^\rho + \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} h_\mu^\lambda + \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\eta^{11} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} h_{\mu\nu} + \eta^{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} h_{\mu\nu} + \eta^{33} \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} h_{\mu\nu} + \eta^{00} \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[(+1) \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} h_{\mu\nu} + (+1) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} h_{\mu\nu} + (+1) \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} h_{\mu\nu} + (-1) \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} h_{\mu\nu} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} h_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \left(\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right) \quad , \text{ ossia appunto la (4.46).} \end{aligned}$$

E per le Equazioni di Einstein:

$$[R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\lambda^\lambda) = -\frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}]$$

$$\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad (4.47)$$

Poniamoci ora, per comodità, in un sistema di coordinate armoniche:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 ; \quad (4.48)$$

infatti, nel trattare l'equazione della geodetica, ci si imbatte nella seguente identità che esprime la connessione affine: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$. Infatti, un paracadutista in caduta libera

non ha un pavimento su cui il suo corpo può gravare, dunque lui, tra sé e sé, non avverte accelerazione di gravità, e si sente come sospeso nel vuoto e si accorge che sta cadendo solo se guarda gli altri oggetti attorno che si muovono. Per una particella in caduta libera, dunque, vi è ovviamente un sistema di riferimento in cui $\vec{a} = 0$, ossia:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate euclidee}) \quad (4.49)$$

con $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$. Possiamo però vedere la (4.49) nel seguente modo:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri per $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ e teniamo conto del fatto che:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda \text{ si avrà:}$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \text{ (caduta libera in coordinate curvilinee)} \quad (4.50)$$

(equazione della geodetica, dove geodetica, qui sulla Terra, è la rotta minima tra una località e l'altra) con $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ appunto.

Proseguendo il discorso, per trovare l'equazione di trasformazione della connessione affine, riscriviamo la stessa in un altro sistema di riferimento: $\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, da cui:

$$\begin{aligned} \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right] = \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} ; \text{ differenziamo ora } \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\lambda : \\ \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} , \text{ da cui:} \\ \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} , \end{aligned} \quad (4.51)$$

che è appunto l'equazione di trasformazione della connessione affine.

Se adesso quest'ultima la contraiamo con $g'^{\mu\nu}$ e la poniamo a zero, otteniamo:

$$g'^{\mu\nu} \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma'^{\lambda} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho - g'^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0 , \text{ che altro non è che appunto la (4.48), cui ci si può sempre ricondurre calcolando un nuovo sistema di riferimento } x'^\lambda , \text{ tramite appunto la precedente equazione: } \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho - g'^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0 .$$

$$\text{La (4.48) e la (4.45) danno: } g'^{\mu\nu} \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \quad \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) + O(h^2)$$

$$g'^{\mu\nu} \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[g'^{\mu\nu} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \right] = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[\left(\frac{\partial h_{\rho}^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\rho}^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu}^\mu}{\partial x^\rho} \right) \right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial h_{\rho}^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\rho}^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu}^\mu}{\partial x^\rho} = 0 \rightarrow 2 \frac{\partial h_{\rho}^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu}^\mu}{\partial x^\rho} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} h_{\rho}^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\rho} h_{\mu}^\mu \text{ e ribattezzando } \rho \text{ con } \nu:$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h_{\nu}^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h_{\mu}^\mu \quad (4.52)$$

$$\text{che nella (4.47) fornisce: } \square^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad (4.53)$$

La soluzione, verificabile per sostituzione diretta, è il potenziale ritardato:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int d^3\vec{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (4.54)$$

In ogni caso, semplificando, per radiazioni provenienti dall'infinito: ($T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} = 0$)

$$\square^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (4.55)$$

ossia: $0 = \nabla^2 h_{\mu\nu} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2}$ (Equazione delle Onde) , (4.56)

la cui soluzione, notoriamente, è appunto un'onda:

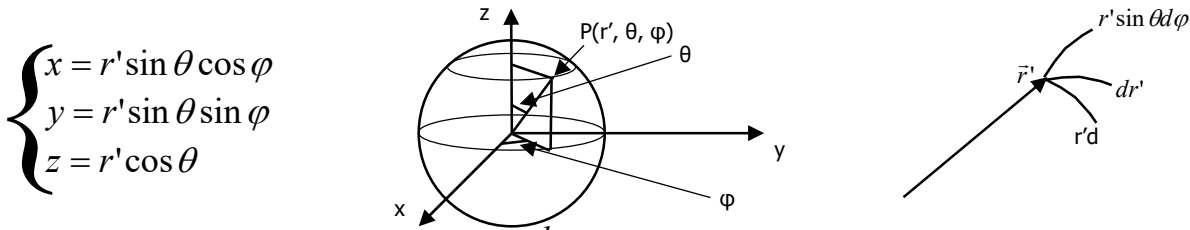
$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda} + e_{\mu\nu}^* e^{-ik_\lambda x^\lambda} ; \quad (4.57)$$

$e_{\mu\nu}$ è il tensore di polarizzazione.

Capitolo 5: Deduzione delle Equazioni Cosmologiche di Friedmann dalle Equazioni del C.G. di Einstein. Metrica di Robertson-Walker.

La metrica di Robertson-Walker-deduzione intuitiva:

Consideriamo una superficie sferica di raggio r' (costante); la superficie sferica è bidimensionale e tuttavia si trova in un sistema di riferimento cartesiano a tre dimensioni (xyz) , un po' come noi che, stando alla relatività, siamo esseri con un corpo tridimensionale, ma immersi in uno spazio-tempo quadridimensionale. Adesso, un elemento di lunghezza infinitesimo dl sulla superficie sferica , in coordinate sferiche, notoriamente, vale: $dl^2 = (r' d\theta)^2 + (rd\varphi)^2$, ossia un piccolo quadrato, giacente sulla superficie sferica, con il lato Sud-Nord spazzato da r' ($r' d\theta$) ed il lato Est-Ovest spazzato da r , che è la proiezione di r' sul piano xy, e spazzando $d\varphi$, fornisce appunto il contributo $(rd\varphi)^2$. ($r=r' \times \sin\theta$ da cui: $dr=r' \times \cos\theta \times d\theta$, da cui ancora: $r' d\theta=dr/\cos\theta$)



allora: $dl^2 = (r' d\theta)^2 + (rd\varphi)^2 = \left(\frac{dr}{\cos\theta}\right)^2 + (rd\varphi)^2$, ma essendo che:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{r'^2 - r^2}}{r'} = \sqrt{1 - (r^2 / r'^2)} , \text{ segue che:}$$

$$dl^2 = (r' d\theta)^2 + (rd\varphi)^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - (r^2 / r'^2)}}\right)^2 + (rd\varphi)^2$$

Denominando ora $K=1/r'^2$, segue che: $dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 + (rd\varphi)^2$. Estendendo ora tale equazione alle tre dimensioni, si ha:

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 + (rd\varphi)^2 + (r \sin\theta d\varphi)^2 . \text{ Per ultimo, effettuiamo l'ulteriore estensione al caso}$$

$$\text{quadridimensionale: } dl^2 = (cdt)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 - (rd\varphi)^2 - (r \sin\theta d\varphi)^2 . \quad (5.1)$$

Introduciamo ora le coordinate comoventi: $\vec{R} = a(t) \cdot \vec{r}$ ($R=a(t)r$ e $dR=a(t)dr$), con $a(t)$ che è il Fattore di Scala. Allora, la (5.1) diventa:

$$dl^2 = (cdt)^2 - \left(\frac{dR}{a(t) \sqrt{1 - K \left(\frac{R}{a(t)}\right)^2}}\right)^2 - \left(\frac{R}{a(t)} d\varphi\right)^2 - \left(\frac{R}{a(t)} \sin\theta d\varphi\right)^2 \text{ ossia:}$$

$$dl^2 = (cdt)^2 - \frac{1}{a^2(t)} \left[\left(\frac{dR}{\sqrt{1-kR^2}} \right)^2 + (Rd\varphi)^2 + (R \sin \theta d\varphi)^2 \right], \quad (5.2)$$

con $k = \frac{K}{a^2(t)}$.

La (5.2) rappresenta la Metrica di Robertson-Walker.

Deduzione formale della Metrica di Robertson-Walker:

-Campi gravitazionali a simmetria sferica e dipendenti dal tempo:

Se la simmetria è sferica, $d\tau^2$ dipenderà dagli invarianti rotazionali ed inoltre i coefficienti saranno dipendenti dal tempo; dunque, gli ingredienti saranno: $t, dt, r, d\ell = r dr$. Infatti, a livello di lunghezza tridimensionale, in coordinate sferiche si ha:

$$dl^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \text{ e quindi:}$$

$d\tau^2 = C(r,t)dt^2 - D(r,t)dr^2 - 2E(r,t)drdt - F(r,t)r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ ed abbiamo, per completezza, contemplato anche il termine misto in $drdt$. Ora, poniamo $r' = rF^{1/2}(r,t)$ e poi sopprimiamo gli accenti, ottenendo:

$$d\tau^2 = C(r,t)dt^2 - D(r,t)dr^2 - 2E(r,t)drdt - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (5.3)$$

abbiamo soppresso F. Ora, per sopprimere E, poniamo:

$$dt' = \eta(r,t)[C(r,t)dt - E(r,t)dr] \quad (5.4)$$

e per rendere il 2° membro un differenziale esatto, avvaliamoci della Condizione di Schwartz:

$$\frac{\partial}{\partial r}[\eta(r,t)C(r,t)] = -\frac{\partial}{\partial t}[\eta(r,t)E(r,t)]. \text{ Sostituendo ora la (5.4) nella (5.3) otteniamo:}$$

$$d\tau^2 = \eta^{-2}C^{-1}dt'^2 - (D + C^{-1}E^2)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \text{ ossia, risopprimendo l'accento:}$$

$$d\tau^2 = B(r,t)dt'^2 - A(r,t)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (5.5)$$

siamo così ritornati alla forma standard del cap. 4, ma con i coefficienti dipendenti dal tempo. E lì già si osserva che per coordinate ortogonali quasi minkowskiane (quasi $\eta_{\alpha\beta}$): $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ e confrontando quest'ultima con la (5.5), si evince che: $g_{rr} = A$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$, $g_{tt} = -B$ e siccome $g_{\mu\nu}$ è ortogonale, si ha che: $g^{rr} = A^{-1}$, $g^{\theta\theta} = r^{-2}$, $g^{\varphi\varphi} = r^{-2} \sin^{-2} \theta$, $g^{tt} = -B^{-1}$.

Sapendo poi che: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho})$, emerge che le sole quantità non nulle sono:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2A} \frac{dA}{dr} = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{A}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{B'}{2A}, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta, \quad \Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{2A} \frac{dA}{dt} = \frac{\dot{A}}{2A}, \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{B'}{2B}, \quad \Gamma_{rr}^t = \frac{A}{2B}, \quad \Gamma_{tt}^t = \frac{\dot{B}}{2B},$$

che sono tutte le quantità già presenti al cap. 4, più altre, visto che ora contano anche le derivate rispetto al tempo. L'accento denota $\frac{d}{dr}$, mentre il punto denota $\frac{d}{dt}$.

Calcoliamo ora il tensore di Ricci ($\lambda = \nu$ in

$$R_{\mu\nu}^\lambda = (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_k - (\Gamma_{\mu k}^\lambda)_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda):$$

$R_{\mu k} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{k\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu k}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}$ e ricordiamo che $\frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^k}$ è simmetrico su μ e k , anche per eventuale verifica diretta; dunque, in totale, troviamo che:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{A''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A'}{Ar} - \frac{\ddot{A}}{2B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4B^2} + \frac{\dot{A}^2}{4AB} \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB} \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta \cdot R_{\theta\theta}, \quad R_{r\theta} = R_{r\varphi} = R_{\theta\varphi} = R_{\theta t} = R_{\varphi t} = 0 \\ R_{tr} &= -\frac{\dot{A}}{Ar}, \\ R_{tt} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'A'}{4A^2} - \frac{B'}{Ar} + \frac{B'^2}{4AB} + \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Osservazioni: nello spazio vuoto $R_{\mu\nu} = 0$, sicché per la (5.6) $\dot{A} = 0$, ossia $A = \text{const}$, ossia:

$A = (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}$, come nella metrica di Schwarzschild. Inoltre, sempre al cap. 4, dove diamo la dimostrazione rigorosa della metrica di Schwarzschild, otteniamo che $AB = \text{const}$, da cui:

$(AB)' = 0$. Ora, dando a B una generica forma $B = f(t)(1 - \frac{2GM}{r})$ e definendo un $t' = \int^t f^{1/2}(t) dt$,

segue che: $\frac{dt'}{dt} = f^{1/2}(t) \rightarrow dt^2 = (dt')^2 f^{-1}(t)$, che inserita nella espressione di B fornisce:

$B = f(t)(1 - \frac{2GM}{r}) = \frac{(dt')^2}{dt^2} (1 - \frac{2GM}{r})$ e così, nella metrica, il termine $(1 - \frac{2GM}{r}) dt^2$ diventa:

$(1 - \frac{2GM}{r}) dt'^2 = B dt'^2$, ossia $B = (1 - \frac{2GM}{r})$, sempre come nella metrica di Schwarzschild.

Abbiamo quindi provato il Teorema di Birkhoff, secondo cui, nel vuoto, il campo è statico; ed ecco perché in una cavità ($r=0$, $M=0$) si ha che $A=B=1$ e lo spazio è minkowskiano, con l'applicabilità della Teoria di Newton.

Il Tempo Proprio $d\tau$ di una particella e le coordinate comoventi.

Se una particella è ferma in (O', x', y', z') , ossia se la stessa si muove appunto con O' , ossia se O' è il suo sistema di riferimento "proprio", allora: $dx' = dy' = dz' = 0$ e:

$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0 + 0 + 0 - c^2 dt^2 = -c^2 dt'^2$, da cui:

$$dt' = d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (\text{tempo proprio, invariante, in}$$

quanto tale è $\frac{ds}{c}$). Dunque, quando si eseguono calcoli riguardanti una particella, viene spontaneo

utilizzare per essa appunto il suo tempo proprio:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (5.7)$$

In forma tensoriale, visto che per la (5.7) l'unica componente di $d\tau$ è quella temporale, si ha:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow d\tau^2 = -g_{tt} dt^2 \rightarrow g_{tt} = -1 \quad \text{e} \quad dx^i = 0.$$

Essendo poi la particella in caduta libera, vige l'equazione della geodetica, dunque:

$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 = \Gamma_{tt}^i$. Adesso, per l'espressione della
 connessione affine: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right)$ si ha: $0 = \Gamma_{tt}^i = \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^\rho} \right)$, ma:
 $\frac{\partial g_{tt}}{\partial x^\rho} = \frac{\partial(-1)}{\partial x^\rho} = 0$, da cui: $0 = \Gamma_{tt}^i = \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} \right) = g^{i\rho} \frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} = 0$, ma visti i valori dei vari g^{xy}
 precedentemente calcolati, quelli diversi da zero fanno sì che: $g^{ij} \frac{\partial g_{jt}}{\partial t} = 0$, da cui, infine:

$\frac{\partial g_{jt}}{\partial t} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 0$. Adesso resettiamo gli orologi di ciascuna particella nel seguente modo:

$t' = t + f(x)$, $x = x'$, da cui:

$$\begin{aligned}
 d\tau^2 &= -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -g_{ij} dx^i dx^j - g_{tt} dt dt - g_{it} dx^i dt - g_{jt} dx^j dt = -g_{ij} dx^i dx^j - g_{tt} dt dt - \\
 &- g_{it} \left(\frac{dt}{dx^i} \right) \left(\frac{dt}{dx^j} \right) dx^i dx^j - g_{it} dx^i \left(\frac{dt}{dx^j} \right) dx^j - g_{jt} \left(\frac{dt}{dx^i} \right) dx^i dx^j - g_{jt} \left(\frac{dt}{dx^i} \right) dx^i dt' - g_{tt} \left(\frac{dt}{dx^j} \right) dx^j dt' - \\
 &- g_{it} dx^i dt' - g_{jt} dx^j dt' = dx^i dx^j \left[-g_{ij} - g_{it} \left(\frac{df}{dx^i} \right) \left(\frac{df}{dx^j} \right) + g_{it} \left(\frac{df}{dx^j} \right) + g_{jt} \left(\frac{df}{dx^i} \right) \right] + dt'^2 (-g_{tt}) + \\
 &+ dx^i dt' \left[-g_{it} - g_{tt} \left(\frac{df}{dx^i} \right) \right] + dx^j dt' \left[-g_{jt} - g_{tt} \left(\frac{df}{dx^j} \right) \right] = -g'_{ij} dx^i dx^j - dt'^2 g'_{tt} - dx^i dt' g'_{it} - g'_{jt} dt' dx^j .
 \end{aligned}$$

con: $g'_{tt} = g_{tt} = -1$, $g'_{ij} = g_{ij} - \left(\frac{df}{dx^i} \right) \left(\frac{df}{dx^j} \right) - g_{it} \left(\frac{df}{dx^j} \right) - g_{jt} \left(\frac{df}{dx^i} \right)$, $g'_{it} = \left(\frac{df}{dx^i} \right) + g_{it}$,

$$\boxed{g'_{ij} = g_{ij} + \frac{df}{dx^j}} ; \quad (5.8)$$

Per eliminare g'_{ij} bisogna fare in modo che $g_{ij} = -\frac{df}{dx^j}$; può succedere ciò nel seguente caso:

-dal momento che per metriche sfericamente simmetriche (vedere formule precedenti), si ha:

$$d\tau^2 = C(r,t) dt^2 - D(r,t) dr^2 - 2E(r,t) dr dt - F(r,t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \text{ e qui l'unico } g_{ij} \text{ è}$$

il $g_{rr} = 2E$, quindi, per la (5.8) si ha: $f = -2 \int^r E(r) dr$; ribadendo poi che $g_{tt} = -1$, si ha:

$$d\tau^2 = dt^2 - U(r,t) dr^2 - V(r,t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.9)$$

Da quest'ultima, per confronto con la $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, si evince che:

$$g_{rr} = U, \quad g_{\theta\theta} = V, \quad g_{\varphi\varphi} = V \sin^2 \theta, \quad g_{tt} = -1 \text{ e siccome } g_{\mu\nu} \text{ è ortogonale, si ha che: } g^{rr} = U^{-1}, \\
 g^{\theta\theta} = V^{-1}, \quad g^{\varphi\varphi} = (V \sin^2 \theta)^{-1}, \quad g^{tt} = -1.$$

Inoltre, similmente a quanto già fatto qualche pagina addietro, valutiamo che:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{rr}^r &= \frac{U'}{2U}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{V'}{2U}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{V'}{2U} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{\dot{U}}{2U}, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{V'}{2V}, \quad \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{\dot{V}}{2V}, \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{rr}^t = \frac{\dot{U}}{2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{\dot{V}}{2}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^t = \frac{\dot{V}}{2} \sin^2 \theta,
 \end{aligned}$$

E, sempre similmente a quanto già fatto qualche pagina addietro, valutiamo anche che:

$$\begin{aligned}
 R_{rr} &= \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} - \frac{\ddot{A}}{2B} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} \\
 R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{V''}{2U} - \frac{V'U'}{4U^2} - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4U}
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} \\
R_{tr} &= \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} \\
R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta \cdot R_{\theta\theta} \quad , \quad R_{r\theta} = R_{r\varphi} = R_{\theta\varphi} = R_{\theta t} = R_{\varphi t} = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Verso la metrica di Robertson-Walker:

Ricordiamo ora le 10 Equazioni del Campo Gravitazionale di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5.11)$$

e ritorniamo un attimo, per comodità, alla convenzione $c=1$, da cui:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad , \quad \text{che ci dicono che la curvatura } (\propto R_{\mu\nu}, R) \text{ dello spazio-tempo è uguale alla presenza di materia-energia } (\propto T_{\mu\nu}) \text{ nello stesso!}$$

Contraendo ora con $g^{\mu\nu}$, si ha: $R - 2R = -8\pi G T_{\mu}^{\mu}$,

(poiché $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, essendo in convenzione di Einstein)

e dunque: $R = 8\pi G T_{\mu}^{\mu}$, da cui:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda}) = -8\pi G S_{\mu\nu} \quad (\text{altra forma delle equazioni di Einstein}) \quad (5.12)$$

e ricordiamo altresì l'espressione del Tensore Momento-Energia $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= p g^{\mu\nu} + (p + \rho) U^{\mu} U^{\nu} \rightarrow \\
T_{\mu\nu} &= p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} \quad ,
\end{aligned} \quad (5.13)$$

($c=1$) , dove $U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ e, dunque, per un fluido in caduta libera (velocità nulla, rispetto a se stesso): $U^i = U_i = 0$ e $U^t = c = 1$, $U_t = g_{tt} U^t = -1$ e, per finire: $U^{\beta} U_{\beta} = -1$, poiché essendo che: $d\tau^2 = -g_{\mu}^{\nu} dx^{\mu} dx_{\nu}$, si ha: $d\tau^2 = -g_{\beta}^{\beta} dx^{\beta} dx_{\beta} \rightarrow U^{\beta} U_{\beta} = U^t U_t + U^i U_i = 0 - 1 = -1$, ossia appunto: $U^{\beta} U_{\beta} = -1$.

Dunque, per la (5.12) si ha: $S_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda})$ e per la (5.13): $T_{\lambda}^{\lambda} = p g_{\lambda}^{\lambda} + (p + \rho) U^{\lambda} U_{\lambda}$ e allora:

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu} &= (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda}) = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} p g_{\lambda}^{\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (p + \rho) U^{\lambda} U_{\lambda} = \\
&= p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} - \frac{4}{2} g_{\mu\nu} p - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (p + \rho) U^t U_t = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} - 2 g_{\mu\nu} p + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} p + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \rho = \\
&= S_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\rho - p) g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} \quad .
\end{aligned} \quad (5.14)$$

$$(g_{\lambda}^{\lambda} = \delta_{\lambda}^{\lambda} = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 + \delta_4^4 = 4)$$

Adesso, ricordando che più su dimostrammo che: $g_{tt} = -1$, $g_{ii} = 0$ e $g_{ij} = g_{ji}$, si ha, per la (5.14):

$$S_{tt} = \frac{1}{2} (\rho - p) g_{tt} + (p + \rho) U_t U_t = \frac{1}{2} (\rho + 3p) \quad , \quad S_{it} = 0 \quad , \quad S_{ij} = \frac{1}{2} (\rho - p) g_{ij} \rightarrow S_{rr} = \frac{1}{2} (\rho - p) U \quad ,$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{1}{2} (\rho - p) V \quad , \quad S_{\varphi\varphi} = S_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad .$$

Utilizziamo ora le (5.10) nella (5.12):

$$\frac{1}{U} \left[\frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} \right] = -4\pi G(\rho - p) \quad (5.15)$$

$$-\frac{1}{V} + \frac{1}{U} \left(\frac{V''}{2V} - \frac{V'U'}{4UV} \right) - \frac{\ddot{V}}{2V} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4UV} = -4\pi G(\rho - p) \quad (5.16)$$

$$\frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} = -4\pi G(\rho + 3p) \quad (5.17)$$

$$\frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = 0 \quad (5.18)$$

Avvicinandoci ora sempre più alla applicazione all'universo ed alla caduta libera, consideriamo ρ e p indipendenti dalla posizione e cerchiamo per le (5.15)---(5.18) delle soluzioni a variabili separabili del tipo: $U = R^2(t) \cdot f(r)$ e $V = S^2(t) \cdot g(r)$; ora, la (5.18) vuole che:

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{R}}{R}; \text{ scegliamo dunque: } S=R. \text{ Ridefiniamo ora } r: \bar{r} = \sqrt{g(r)} \rightarrow g = \bar{r}^2 \text{ ed } f \rightarrow \bar{f}(\bar{r}) \rightarrow$$

$$U = R^2(t) \cdot f(r) \text{ e } V = R^2(t) \cdot r^2; \quad (5.19)$$

in tal modo, la (5.15) diventa:

$$-\frac{f'}{rf^2} - 2\dot{R}^2 - \ddot{R}R = -4\pi GR^2(\rho - p) \quad (5.20)$$

e la (5.16) diventa:

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{fr^2} - \frac{f'}{2f^2r} - 2\dot{R}^2 - \ddot{R}R = -4\pi GR^2(\rho - p) \quad (5.21)$$

Adesso, dalla (5.20) si ottiene: $-2\dot{R}^2 - \ddot{R}R = -4\pi GR^2(\rho - p) + \frac{f'}{rf^2}$, mentre dalla (5.21) si ha:

$$-2\dot{R}^2 - \ddot{R}R = -4\pi GR^2(\rho - p) + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{fr^2} + \frac{f'}{2f^2r}, \text{ da cui, per confronto tra le ultime due, si ottiene:}$$

$$-4\pi GR^2(\rho - p) + \frac{f'}{rf^2} = -4\pi GR^2(\rho - p) + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{fr^2} + \frac{f'}{2f^2r}, \quad (5.22)$$

$$\text{ossia: } -\frac{f'}{rf^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{fr^2} - \frac{f'}{2f^2r}. \quad (5.23)$$

Osserviamo adesso che entrambi i membri della (5.23) erano nella (5.22) sommati insieme alla quantità $-4\pi GR^2(\rho - p)$, che è costante per ipotesi (l'ipotesi di costanza di ρ e p è stata fatta alcune righe sopra, dopo la (5.18)). Allora anche i due membri della (5.23) saranno costanti e tale costante denominiamola $-2k$, ossia:

$$-\frac{f'}{rf^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{fr^2} - \frac{f'}{2f^2r} = -2k. \text{ Si nota, a questo punto, che l'unica soluzione è: } f(r) = \frac{1}{(1-kr^2)},$$

come si può verificare facilmente per sostituzione. Allora:

$$U = R^2(t) \cdot f(r) = \frac{R^2(t)}{(1-kr^2)} \text{ e } V = r^2 R^2(t). \quad (5.24)$$

Infine, andando a ripescare la (5.9), si ha: $d\tau^2 = dt^2 - U(r,t)dr^2 - V(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) =$

$$= dt^2 - \frac{R^2(t)}{(1-kr^2)} dr^2 - r^2 R^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{(1-kr^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right] \quad (5.25)$$

(Metrica di Robertson-Walker)

Sostituendo ora le (5.24) nella (5.17), si ottiene:

$$3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R , \quad (5.26)$$

mentre le (5.20) e (5.21) forniscono: $\ddot{R}R + 2\dot{R}^2 = 4\pi G(\rho - p)R^2 - \frac{f'}{rf^2} = 4\pi G(\rho - p)R^2 - 2k$,

$$\text{ossia: } \ddot{R}R + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)R^2 \quad (5.27)$$

Adesso, eliminando $\ddot{R}$ dalle (5.26) e (5.27), si ottiene:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \quad (5.28)$$

Le (5.26) e (5.28), che riscriviamo, sono le EQUAZIONI COSMOLOGICHE DI FRIEDMANN:

$$\begin{cases} 3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R \\ \dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \end{cases} \quad (5.29)$$

Rimuovendo la convenzione $c=1$, si ottiene:

$$\begin{cases} 3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3\frac{p}{c^2})R \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \end{cases} \quad (5.30)$$

e con un riaggiustamento, se vogliamo, otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\frac{p}{c^2}) \\ (\frac{\dot{R}}{R})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} \end{cases} \quad (5.31)$$

che sono esattamente le stesse calcolabili anche a partire dalla teoria classica di Newton.

Equazione del fluido:

-premessa: il tensore momento-energia in funzione del determinante g:

Ricordiamo l'espressione per la derivata di un vettore:

$$V_{;\mu}^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} V^{\lambda} , \quad (5.32)$$

$$\text{con: } \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} , \quad (5.33)$$

in quanto, avendo la connessione affine due indici uguali, ed essendo che gli indici variano da 1 a 4 (o da 0 a 3), allora gli ultimi due termini tra parentesi sono la stessa cosa (con ρ e μ scambiati) e dunque si elidono; (si sarebbe potuto fare lo stesso ragionamento tra il primo ed il terzo, e sopravviveva il secondo...).

$$\text{Notiamo ora che: } \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln g ; \quad (5.34)$$

$$\text{infatti, } g_{\rho\mu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \text{ e } g^{\rho\mu} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \text{ (esaminando il caso pi\`u semplice di matrice 2x2)}$$

e per le formule di inversione di una matrice, si ha: $g^{11} = g_{22}/g$, $g^{12} = g^{21} = -g_{12}/g = -g_{21}/g$,

$$g^{22} = g_{11}/g ; \quad |g_{\rho\mu}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} [g_{11}g_{22} - (g_{12})^2] = \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\lambda} g_{22} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\lambda} g_{11} - 2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\lambda} = g[g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\lambda} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\lambda} + 2g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\lambda}] =$$

$$= gg^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda} ; \text{ allora, per la (5.34), la (5.33) diviene:}$$

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln g = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{g} \text{ e quindi la (5.32) diventa:}$$

$$V_{;\mu}^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{g} V^\mu .$$

Passando adesso alla derivata di un tensore di rango 2:

$$T_{;\lambda}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda k}^\mu T^{k\nu} + \Gamma_{\lambda k}^\nu T^{\mu k} , \quad (\text{generica}) \text{ e con } \lambda=\mu : \quad (5.35)$$

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} . \quad (5.36)$$

Andando ora a ripescare il tensore momento-energia dalle (5.13), si ha:

$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu$ ed applicando allo stesso la (5.36), si ha:

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\nu\lambda} = [pg^{\mu\nu}]_{;\mu} + [(p + \rho)U^\mu U^\nu]_{;\mu} \quad (5.37)$$

$$\text{ossia: } T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\sqrt{g} (p + \rho) U^\mu U^\nu] + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu (p + \rho) U^\nu U^\lambda \quad (5.38)$$

Infatti, il primo termine tra parentesi quadre nella (5.37) dà un solo contributo, poiché il secondo contributo è nullo $\boxed{((g^{\mu\nu})_{;\nu} = 0)}$; infatti, come esempio, consideriamo la (5.35) sulla derivata di un

tensore di rango 2, nella seguente nota versione alternativa: $T_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} T_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho T_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho T_{\rho\mu}$; ora, la

stessa applicata a $g_{\mu\nu}$ fornisce: $g_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}$, ma si è dimostrato che:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} , \text{ da cui: } g_{\mu\nu;\lambda} = 0 . \text{ E, similmente, anche negli altri casi, tipo appunto } g^{\mu\nu} ,$$

si ha: $g^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$.

Ora, essendo la massa energia conservata, si ha, per la (5.38):

$$0 = T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\sqrt{g} (p + \rho) U^\mu U^\nu] + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu (p + \rho) U^\nu U^\lambda \text{ e ponendo } \mu=\nu=t \text{ ed essendo:}$$

$$U^t = 1, \quad U^i = 0, \quad \Gamma_{tt}^\mu = \Gamma_{t\lambda}^\mu = 0, \quad g^{tt} = -1, \quad |g_{\rho\mu}| = g = g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi} |g_{tt}| = R^6(t) r^4 (1 - kr^2)^{-1} \sin^2 \theta ,$$

(rif. pagine precedenti), si ha: $0 = T_{;t}^t = \frac{\partial p}{\partial t} g^{tt} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{g} (p + \rho) U^t U^t] + \Gamma_{t\lambda}^t (p + \rho) U^t U^\lambda$, ossia:

$$-\frac{\partial p}{\partial t} g^{tt} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{g} (p + \rho)] , \text{ ossia:}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{R^6(t) r^4 (1 - kr^2)^{-1} \sin \theta}} \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{R^6(t) r^4 (1 - kr^2)^{-1} \sin \theta} (p + \rho)] = \frac{1}{\sqrt{R^6(t)}} \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{R^6(t)} (p + \rho)] ,$$

ossia ancora: $R^3(t) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [R^3(t) p(t) + R^3(t) \rho(t)]$, da cui:

$$\begin{aligned}
R^3 \dot{p} &= 3R^2 \dot{R}(p + \rho) + R^3(\dot{p} + \dot{\rho}) \rightarrow 3R^2 \dot{R}p + 3R^2 \dot{R}\rho + R^3 \dot{\rho} = 0 \rightarrow \\
3R^2 \frac{dR}{dt} p + 3R^2 \frac{dR}{dt} \rho + R^3 \frac{d\rho}{dt} &= 0 \text{ ora, dividendo tutto per } \frac{dR}{dt}: \\
3R^2 \rho + R^3 \frac{d\rho}{dR} &= -3R^2 p \rightarrow \frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3R^2 p. \quad (\text{equazione del fluido}) \quad (5.39)
\end{aligned}$$

L'equazione del fluido ci è nota in quest'altra forma: $\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{R}}{R} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)$, ma essa altro non è che la (5.39); infatti, nella (5.39) iniziamo con l'eliminare la convenzione $c=1$, da cui: $\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3R^2 \frac{p}{c^2}$

Inoltre, sviluppiamo la derivata in quest'ultima: $R^3 \frac{d\rho}{dR} + 3\rho R^2 = -3R^2 \frac{p}{c^2}$; moltiplichiamo ora tutto per $\frac{dR}{dt}$ ($= \dot{R}$), si ha: $R^3 \frac{d\rho}{dt} + 3\rho \dot{R}R^2 = -3\dot{R}R^2 \frac{p}{c^2}$, ossia: $R^3 \dot{\rho} + 3\rho \dot{R}R^2 = -3\dot{R}R^2 \frac{p}{c^2}$, da cui, infine: $\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{R}}{R} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)$ appunto.

Appendici:

App. 1: La Teoria Della Relatività Ristretta

Indice dell'App. 1:

- Indice dell'App. 1.
- App. 1-Introduzione.
- App. 1-Capitolo 1: Concetti introduttivi fondamentali.
- App. 1-Par. 1.1 Trasformazioni di Galilei.
- App. 1-Par. 1.2: Trasformazioni (relativistiche) di Lorentz.
- App. 1-Par. 1.3: La contrazione delle lunghezze, o di Lorentz.
- App. 1-Par. 1.4: Dilatazione del tempo (Paradosso dei Gemelli).
- App. 1-Par. 1.5: Il quadrivettore posizione.
- App. 1-Par. 1.6: Legge Relativistica di Trasformazione delle Velocità.
- App. 1-Par. 1.7: Il Tempo Proprio $d\tau$ di una particella.
- App. 1-Capitolo 2: La relatività delle energie.
- App. 1-Par. 2.1: Il quadrivettore momento-energia (o momento lineare).
- App. 1-Par. 2.2: Il quadrivettore velocità.
- App. 1-Par. 2.3: La quadriforza.
- App. 1-Par. 2.4: $E_0 = m_0 c^2$.
- App. 1-Par. 2.5: Energia cinetica relativistica.
- App. 1-Capitolo 3: Fenomeni relativistici.
- App. 1-Par. 3.1: Tempo e gravità: la gravità rallenta il tempo!
- App. 1-Par. 3.2: Volume dei solidi in moto.
- App. 1-Par. 3.3: L'equazione delle onde, o di D'Alembert, vale in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.
- App. 1-Par. 3.4: L'esperimento di Fizeau.
- App. 1-Par. 3.5: Effetto Doppler Relativistico (longitudinale).
- App. 1-Par. 3.6: Il Paradosso dei Gemelli spiegato con l'Effetto Doppler Relativistico!
- App. 1-Par. 3.7: L'Esperimento di Michelson e Morley.
- App. 1-Capitolo 4: L'Elettrodinamica relativistica.
- App. 1-Par. 4.1: La forza magnetica è niente altro che una (relativistica) forza elettrica di Coulomb(!)
- App. 1-Par. 4.2: Il quadrivettore densità di corrente.
- App. 1-Par. 4.3: Il tensore del campo elettromagnetico.
- App. 1-SUBAPPENDICI:
- App. 1-Subapp. 1: Trasformazioni di Lorentz consecutive.
- App. 1-Subapp. 2: Effetto Doppler (relativistico) Trasversale.
- App. 1-Subapp. 3: Le trasformazioni della quadrivelocità.
- App. 1-Subapp. 4: Le trasformazioni della quadriforza.
- App. 1-Subapp. 5: Il quadrivettore accelerazione e le trasformazioni delle accelerazioni.

App. 1-Introduzione:

Il tempo non è niente altro che il nome che viene dato ad una relazione matematica di rapporto tra due spazi differenti; quando dico che per andare da casa al lavoro ho impiegato il tempo di mezz'ora, dico semplicemente che il percorrimiento dello spazio che separa casa mia dall'azienda in cui lavoro è corrisposto allo spazio di mezza circonferenza orologio percorsa dalla punta della lancetta dei minuti.

La velocità della luce ($c=299.792,458$ km/s) è un limite superiore di velocità non per mistero inspiegabile o per principio, ma bensì perché un corpo non può muoversi a casaccio ed a proprio piacimento, nell'Universo in cui è in caduta libera a velocità c , in quanto lo stesso è vincolato a tutto l'Universo circostante, come se quest'ultimo fosse una tela di ragno che, quando la preda cerca di muoversi, condiziona il movimento della stessa, e tanto più quanto i movimenti vogliono essere ampi ($v \sim c$), cioè, per restare all'esempio della tela di ragno, se la mosca intrappolata vuole solo muovere un'ala, può farlo quasi incondizionatamente ($v \ll c$), mentre se vuole proprio compiere delle volate da una parte all'altra della tela ($v \sim c$), la tela si fa sentire (massa che tende all'infinito ecc). Oppure è come essere in un autobus e correre all'interno ad una velocità (rispetto a chi è a terra) superiore a quella dell'autobus stesso; tenderesti ad uscire dall'autobus, ma uscire dall'Universo non ha senso, dunque diventi poi tu parte dell'autobus, che si protende, se tenti di uscirne, di fatto restando inesorabilmente intrappolato nell'autobus stesso. Poter possedere la velocità della luce e non possedere massa a riposo sono poi due concetti equivalenti. Il fotone, infatti, ha una massa a riposo nulla e viaggia appunto alla velocità della luce. Non solo; lo stesso risulta avere sempre la stessa velocità (c) agli occhi di tutti gli osservatori inerziali. L'osservatore, nel compiere misure di velocità, non può che avvalersi dello strumento più veloce che conosca, ossia altra luce; e già qui, una prima spiegazione della costanza di c , trova spazio. Inoltre, il fotone risulta essere "inaccelerabile" ed "indecelerabile" (costanza di c) per il semplice fatto che accelerare un oggetto significa sicuramente poter pienamente interagire con esso, ossia poterlo afferrare e poterlo scagliare più forte. Si vuole qui mettere in discussione la capacità, di un sistema materiale, di poter "afferrare" realmente un fotone; mi spiego meglio con un esempio: se catturo un insetto con un retino e poi poso il retino, non posso ancora sostenere di aver bloccato il veloce volo dell'insetto, in quanto lo stesso potrebbe continuare a volare altrettanto velocemente pure nel retino, dimostrandoci di non essere "afferrabile" in senso assoluto. Tornando a noi, il fotone non può essere bloccato, in senso assoluto, dalla materia, e dunque neanche accelerato; il fotone resta confinato nella materia, sotto forma di calore, o in orbita intorno ad un elettrone, o in qualsiasi altra forma che desideriate, un po' come l'onda incidente e l'onda riflessa,

tipicamente propagantisi, risultano però intrappolate nell'onda stazionaria che viene creata dalle stesse quando, ad esempio, si dà un colpo sulla superficie libera dell'acqua in un catino!

La teoria di Einstein si fonda comunque formalmente su due principi:

-Principio di Relatività: *le leggi fisiche assumono la stessa forma in tutti i sistemi inerziali* (cioè in moto relativo a velocità costante); non avendo infatti senso il moto assoluto rispetto ad un etere immobile che non esiste (vedi App.1-Par. 3.7) tutti i sistemi di riferimento sono laboratori alla pari per verificarvi le leggi della fisica e non esistono dunque sistemi di riferimento privilegiati (tranne che, a mio avviso, quello del centro di massa dell'Universo).

In ogni caso, l'esperimento di Michelson e Morley (App.1-Par. 3.7) segnò la fine dell'etere e spalancò le porte alla TRR.

-Principio di Costanza della Velocità della Luce: *la velocità della luce nel vuoto ha in ogni sistema di riferimento inerziale sempre il valore $c=300.000$ km/s.*

Non importa dunque se la insegui a 299.000 km/s o se fuggi da essa sempre con tale velocità; la luce nel vuoto sfuggerà o ti rincorrerà sempre a 300.000 km/s! ($c=299.792,458$ km/s)

Nell'opinione di chi scrive, c'è nella TRR una forma di contraddizione; la velocità della luce appare infatti "assoluta", non "relativa", parlandosi qui di "relatività". Il fatto è che le velocità tra i vari oggetti nell'Universo sono relative appunto tra loro, ma esiste una velocità assoluta (o quasi) c con cui tutti gli oggetti nell'Universo cadono verso il centro di massa dello stesso; da cui l'assolutezza di c . E si spiega anche come mai gli oggetti in quiete risultano possedere energia m_0c^2 (App.1-Par. 2.4), energia che Einstein conferì appunto alla massa in quiete, senza purtroppo dirci che tale massa invece non è mai in quiete, poiché cade con velocità c verso il centro di massa dell'Universo, guarda caso.

Se giunge alle orecchie di un uomo comune il fatto che la luce ha velocità uguale per "tutti" gli osservatori inerziali, quand'anche con determinati moti relativi tra loro, la cosa può cadere lì. Se però giunge alle orecchie di un uomo particolare, come Einstein, le conseguenze che questi può intuire sono sconvolgenti. Questo piccolo esperimento che segue, condotto con un orologio a luce a bordo di un'astronave, dimostra che il fatto che la velocità della luce è c per "tutti" implica che il tempo sia relativo, da cui il Paradosso dei Gemelli (App.1-Par. 1.4) ecc:

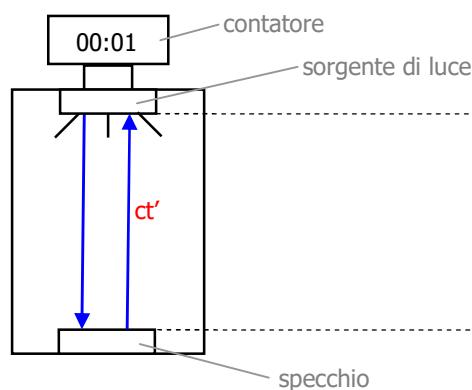


Fig. A1: Orologio a luce in quiete.

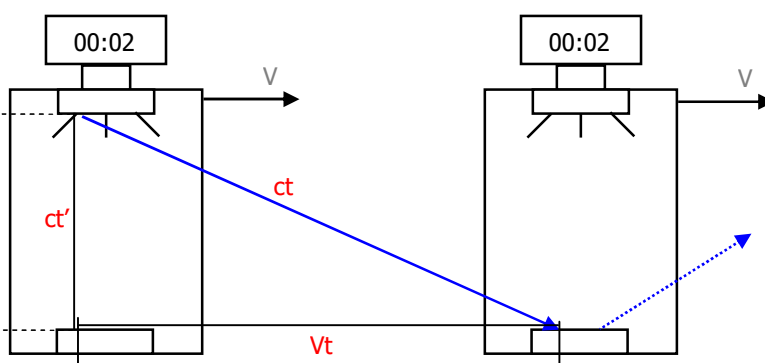


Fig. A2: Orologio a luce in movimento a velocità V .

Come si vede dalla figura A1, ogni volta che la luce (frecce blu) compie il tragitto dalla sorgente allo specchio e ritorno, l'orologio a luce segna, ad esempio, un secondo, oppure un certo tempo t' . Il tragitto in blu schematizzato in figura A1 è visto da chi è in quiete rispetto ad esso, cioè con chi è sull'astronave con l'orologio stesso. Chi invece è sulla Terra e osserva l'orologio in viaggio sull'astronave, vedrà la luce compiere tragitti obliqui e più lunghi, come in figura A2, in quanto, mentre la luce scende, lo specchio si sposta, e mentre risale, la sorgente si sposta ancora. Ora, parlandosi qui di luce, il comportamento della stessa, mentre scende, non è come quello di una valigia che cade dalla cappelliera di un vagone ferroviario, che è vista cadere verticalmente dal passeggero e in traiettoria parabolica dall'osservatore fermo sulla banchina della stazione, impiegando per entrambi lo stesso tempo di caduta, in quanto nel secondo caso (parabolico) la velocità di caduta risulta maggiore; qui si parla appunto di luce, dunque la sua velocità deve essere la stessa per tutti, e cioè c ; ma, se così è, allora chi osserva il tragitto obliquo più lungo deve concludere che il tempo impiegato dalla luce per compiere un ciclo di discesa e risalita deve essere più lungo. Dunque, pur parlandosi dello stesso orologio e dello stesso evento, i due osservatori, sulla durata, giungono a risultati diversi, e dunque alla relatività del tempo ed a tutte le sue conseguenze.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo di figura A2, si ha:

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 + V^2 t'^2, \text{ da cui: } t' = t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \text{ e cioè, in generale: } t' < t \text{ e } t' \text{ tende a zero per } V \text{ che tende a } c! \text{ Ricordo}$$

che t' è il tempo dell'astronauta in viaggio con l'orologio a luce, mentre t è il tempo trascorso sulla Terra. Se il fenomeno è vero per la cosa più veloce che esiste (la luce), figuriamoci per gli orologi tradizionali a lancette e per quelli biologici (esseri viventi)!

Negli anni settanta, utilizzando i sensibilissimi orologi atomici, è stata dimostrata la dilatazione del tempo, sulla Terra, tra due orologi atomici inizialmente sincronizzati, dopo che uno dei due ha compiuto un volo aereo, subendo una leggerissima, ma ben rilevata, dilatazione del tempo.

E' comunque possibile vedere un punto che si muove a velocità doppia di quella della luce effettuando con un laser una spazzata di 90° in un secondo sulla superficie della Luna, ma ciò non rappresenta comunque una trasmissione di informazione a velocità superiore a quella della luce; dunque, la relatività non viene violata:

$$\omega = \frac{\pi/2}{1s} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} , \quad D_{\text{TERRA-LUNA}} = d \cong 3,8 \cdot 10^8 \text{ m} , \quad v_{\text{Periferica}} \cong \omega d \cong 6 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cong 2c!$$

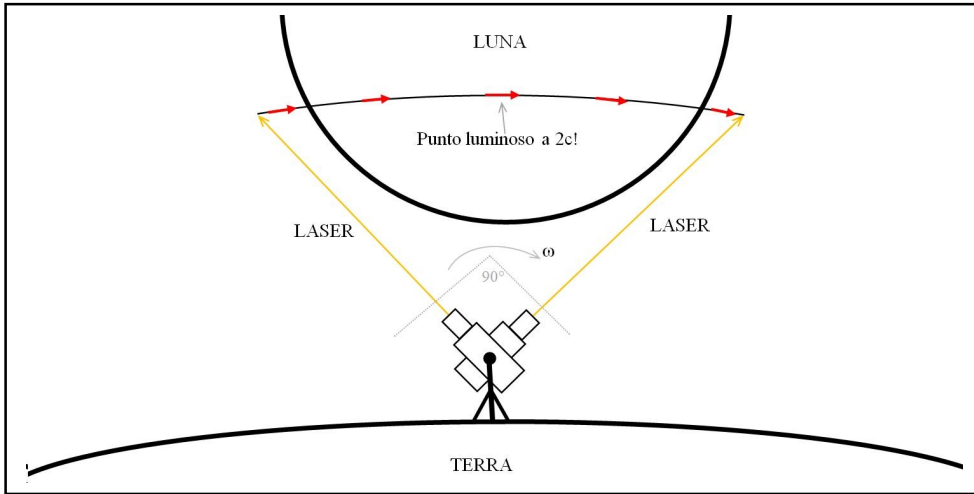


Fig. A.3: Punto luminoso a velocità $2c!$

-L'orologio a luce rovesciato

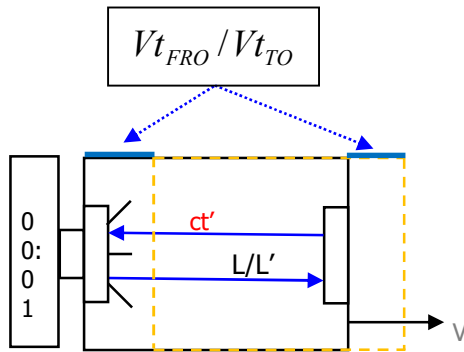


Fig. A.4: Orologio a luce rovesciato.

Se rovesciamo l'orologio a luce di Fig. A.1 come in Fig. A.4, è ovvio che la dilatazione del tempo deve comunque sussistere; a tal proposito, osserviamo che noi non riteniamo che il percorso compiuto dalla luce sia sempre L per tutti gli osservatori, ma sarà L per chi è a bordo dell'astronave (e vede quindi l'orologio fermo) ed L' per chi è sulla Terra (e vede l'orologio muoversi). Vedremo che $L' < L$ (Contrazione di Lorentz).

Allora, gli osservatori sulla Terra calcolano per il loro tempo di andata e ritorno della luce (e sul loro orologio, fermo a

terra): $t = t_T = \frac{2L}{c}$, mentre sempre chi è a terra e guarda, da lontano, attraverso l'oblò dell'astronave in moto, vedrà un orologio lungo L' (che ancora non sappiamo quanto vale) e valuterà un tempo di andata della luce (da sinistra a destra) pari a t_{TO} ed uno di ritorno (da destra a sinistra) pari a t_{FRO} . Ma mentre la luce compie il primo percorso di

andata per percorrere L' , per chi è a terra lo specchio si sarà allontanato dalla sorgente di una quantità pari a Vt_{TO} e invece, durante il ritorno alla sorgente della luce per ripercorrere L' , la sorgente si sarà avvicinata allo specchio di una quantità pari a Vt_{FRO} . Dunque, all'andata il percorso S_{TO} sarà più lungo ed al ritorno S_{FRO} sarà più corto. Si ha allora:

$S_{TO} = L' + Vt_{TO}$ e $S_{FRO} = L' - Vt_{FRO}$, ma trattandosi di luce, essa deve avere sempre velocità c per tutti, dunque si deve anche avere che: $S_{TO} = ct_{TO}$ e $S_{FRO} = ct_{FRO}$, ossia:

$$ct_{TO} = L' + Vt_{TO} \quad \text{e} \quad (A)$$

$$ct_{FRO} = L' - Vt_{FRO} \quad , \text{ nonché:} \quad (B)$$

$$t_{TO} + t_{FRO} = t' \quad (C)$$

Bene, la (A) dà: $t_{TO} = \frac{L'}{c(1 - \frac{V}{c})}$, mentre la (B) fornisce: $t_{FRO} = \frac{L'}{c(1 + \frac{V}{c})}$ e infine, per la (C):

$$t_{TO} + t_{FRO} = t' = \frac{L'}{c(1 - \frac{V}{c})} + \frac{L'}{c(1 + \frac{V}{c})} = \frac{2L'}{c(1 - \frac{V^2}{c^2})} = \frac{2L'}{c\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}}.$$

Riscriviamola:
$$t' = \frac{2L'}{c\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} \quad (D)$$

se adesso poniamo:
$$L = \frac{L'}{\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} \quad (E)$$

si ottiene:
$$t' = \frac{2L}{c\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} = \frac{t}{\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}}, \text{ ossia: } t' = \frac{t}{\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}}$$

che è una reinterpretazione (*) della equazione che ottenemmo con l'orologio a luce ordinario, a patto di aver

riconosciuto la Contrazione di Lorentz espressa dalla (E), ossia: $L' = L\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}$ che ci dice che l'orologio

sull'astronave è più corto.

(*): reinterpretazione nel senso che qui t' è il tempo dell'astronave valutato da Terra, che è effettivamente più corto di t , poiché effettivamente, nel Paradosso dei Gemelli, al ricongiungimento, il gemello a terra, molto invecchiato (t grande) constata un t' del gemello astronauta che è molto più breve.

App. 1-Capitolo 1: Concetti introduttivi fondamentali.

App. 1-Par. 1.1: Trasformazioni di Galilei.

Le stesse forniscono semplicemente le relazioni tra coordinate spaziali (e tempo), per due sistemi di riferimento in moto relativo, ma nell'ambito della fisica classica, dove cioè la velocità della luce c non è un limite superiore.

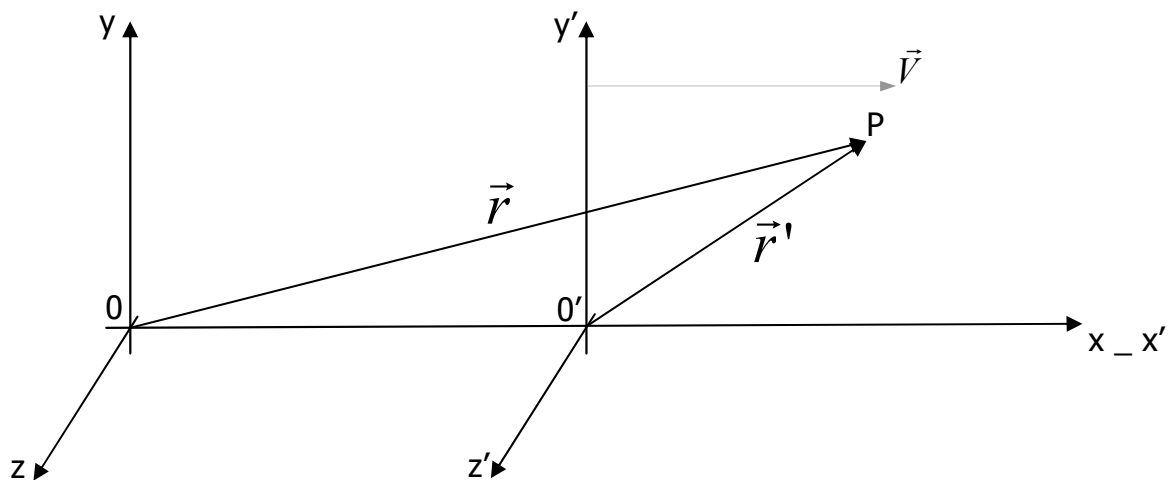


Fig. A1.1: Sistemi di riferimento in moto relativo.

Si ha ovviamente che:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{OO'} = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad (A1.1)$$

da cui, per le componenti ($t=t'$):

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$

e per le inverse, si ha, ovviamente:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (\text{A1.3})$$

Le (A1.2) ed (A1.3) sono le Trasformazioni di Galilei.

Derivando la (A1.1), si ottiene poi: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ che vale come teorema di addizione delle velocità della fisica classica.

App. 1-Par. 1.2: Trasformazioni (relativistiche) di Lorentz.

Premetto che le Trasformazioni di Lorentz nascono prima della Teoria della Relatività (su cui la stessa si fonda) ed in un contesto tutto elettromagnetico.

Le stesse sono dunque l'equivalente relativistico di quelle di Galilei e valgono dunque nel momento in cui si ammette che la velocità della luce è un limite massimo di velocità nell'Universo e che vale c per ($\sim$)ogni osservatore.

-PRIMA DEDUZIONE:

supponendo un moto relativo lungo x , correggiamo le componenti x delle Trasformazioni di Galilei tramite un coefficiente k , come segue:

$$x' = k(x - Vt) \quad (\text{A1.4})$$

$$x = k(x' + Vt') \quad (\text{A1.5})$$

Ora, per un fotone si ha, ovviamente:

$ct' = k(c - V)t$ e $ct = k(c + V)t'$, in quanto la luce ha la stessa velocità c nei due sistemi di riferimento, da cui, moltiplicando membro a membro:

$$c^2 tt' = k^2 tt' c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right), \text{ da cui:}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{A1.6})$$

Inoltre, dalla (A1.5) si ha: $t' = \frac{1}{V} \left(\frac{x}{k} - x' \right)$ ed usando in quest'ultima la (A1.4), si ha:

$$t' = \frac{1}{V} \left[\frac{x}{k} - k(x - Vt) \right] = \frac{1}{kV} x - \frac{kx}{V} + kt = k \left[t - \frac{x}{V} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \right] = k \left[t - \frac{V}{c^2} x \right] \quad (\text{A1.7})$$

in quanto, per la (A1.6), si ha che: $\left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{V^2}{c^2}$.

Con lo stesso procedimento che ci ha condotti alla (A1.7) si deduce poi anche l'espressione per t .

In conclusione, ecco le Trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \frac{(x - Vt)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{\left(t - \frac{V}{c^2} x \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (\text{A1.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(x' + Vt')}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{(t' + \frac{V}{c^2} x')}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right. \quad (\text{A1.9})$$

-SECONDA DEDUZIONE:

Sappiamo che $c = \text{cost}$ in tutti i sistemi di riferimento. Ora, con riferimento alla Fig. A1.1, quando $0=0'$ e $t=t'$, dall'origine viene emessa luce per onde sferiche ed in modo isotropico e si può dunque scrivere che:

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad \text{e} \quad c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

in quanto la luce ha la stessa velocità c nei due sistemi di riferimento. Dunque:

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad \text{e per raggi propagantisi lungo } x \text{ (} y=y' \text{ e } z=z' \text{):}$$

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2. \quad \text{Poniamo ora } (i = \sqrt{-1}): \quad ix = \xi, \quad ix' = \xi', \quad ct = \eta \quad \text{e} \quad ct' = \eta'; \text{ si ha:}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \xi'^2 + \eta'^2, \text{ la cui soluzione è:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta \\ \eta' = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{array} \right. \quad (\text{A1.10})$$

ed in forma differenziale:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi' = d\xi \cos \theta - d\eta \sin \theta \\ d\eta' = d\xi \sin \theta + d\eta \cos \theta \end{array} \right. \quad (\text{A1.11})$$

Notiamo ora che rispetto all'origine "0", $\frac{dx}{dt} = 0$, in quanto il sistema di riferimento $(0, x, y, z)$ è fermo rispetto a se

stesso. Invece, $\frac{dx'}{dt'} = -V$, in quanto il sistema $(0', x', y', z')$ si muove con velocità V rispetto a "0" e di conseguenza:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\xi'}{d\eta'} = -i \frac{V}{c}, \text{ ma dal rapporto tra le (A1.11) si ha che:}$$

$$\frac{d\xi'}{d\eta'} = \frac{d\xi \cos \theta - d\eta \sin \theta}{d\xi \sin \theta + d\eta \cos \theta} = \frac{\frac{d\xi}{d\eta} \cos \theta - \sin \theta}{\frac{d\xi}{d\eta} \sin \theta + \cos \theta} = \frac{0 - \sin \theta}{0 + \cos \theta} = -\tan \theta \quad \text{e dunque: } \tan \theta = i \frac{V}{c} = i\beta$$

ma sappiamo dalla trigonometria che: $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ e:

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{e dunque le (A1.10) diventano:}$$

$$\xi' = \frac{\xi - i\eta\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{e} \quad \eta' = \frac{i\xi\beta + \eta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{ossia:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{(x - Vt)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{(t - \frac{\beta}{c} x)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right.$$

e cioè ancora le (A1.8). In modo analogo si giunge poi alle (A1.9).

App. 1-Par. 1.3: La contrazione delle lunghezze, o di Lorentz.

L'equazione (E) più sopra già costituisce dimostrazione. Gli oggetti in movimento a velocità confrontabili con quella della luce risultano più corti, agli occhi dell'osservatore in quiete. Se quest'ultimo compie delle misurazioni per determinare la lunghezza dello sfuggente corpo in moto, il metodo più efficace che ha è quello di utilizzare delle sorgenti di luce (la cosa più veloce che esiste), illuminando la prua e la poppa del corpo in moto, al fine di determinarne le rispettive posizioni, momento per momento. Solo che la luce che usa ha velocità costante, nonché limitata, ed il risultato sarà quello di un corpo più corto. Realtà o apparenza misurativa? Convinciamoci sin da subito che la realtà (che osservo) e l'apparenza misurativa sono la stessa cosa, come non può che essere! In ogni caso, visto che per chi viaggia passa un tempo minore (dilatazione del tempo), allora, a parità di $v \sim c$, egli riterrà anche di aver percorso una distanza minore. Sia l la lunghezza di un segmento nel sistema O di quiete:

$|x_B - x_A| = l$. In O' (in moto), per le Trasf. di Lorentz:

$$l' = |x'_B(t') - x'_A(t')| = \frac{|(x_B - vt_B) - (x_A - vt_A)|}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{|x_B - x_A|}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}} = l', \text{ in quanto nel sistema } O \text{ la misura del}$$

segmento ha senso se i due estremi vengono rilevati "simultaneamente" ($t_A = t_B$).

Col tendere di v verso c , $\beta = v/c$ tenderà ad 1 e il radicale tenderà a zero, e con esso anche l ! Dunque, la misura l rilevata in O sarà pari a quella l' rilevata in O' per una quantità minore di 1, cioè l'osservatore immobile (O) vedrà un oggetto più corto.

App. 1-Par. 1.4: Dilatazione del tempo (Paradosso dei Gemelli).

Sembra strano, ma anche il tempo può essere ed è relativo. Ovviamente, ogni osservatore, nel suo, vede il tempo scorrere sempre allo stesso ritmo; non è che se uno viaggia a velocità prossime a quelle della luce sente il suo cuore rallentare. E' poi il confronto tra i due osservatori di due sistemi che sono stati in moto relativo che mostra la differenza nel come i due tempi sono scorsi.

Dunque, per le Trasf. di Lorentz, in O' (sistema in movimento): $\Delta t' = t'_B - t'_A$, mentre in O (sistema di quiete):

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{t'_B + x'_B \beta/c - t'_A - x'_A \beta/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ ma, per ipotesi, } x'_A = x'_B, \text{ poiché nel sistema } O' (O', x', y', z') \text{ l'orologio}$$

è immobile, in quanto viaggia col sistema O' stesso, dunque:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Col tendere di v verso c , $\beta = v/c$ tenderà ad 1 e il radicale tenderà a zero, e con esso anche $\Delta t'$!

Due gemelli si separano perché uno dei due parte per un viaggio spaziale di un mese a velocità vicine a quelle della luce; ritornato sulla Terra trova il suo gemello invecchiato di trent'anni! (Paradosso dei Gemelli)

A circa 260.000 km/s si ha il dimezzamento, cioè il radicale varrà $1/2$ e i due tempi scorreranno uno la metà dell'altro.

Si veda poi anche la dimostrazione della dilatazione del tempo con l'orologio a luce (in Introduzione) e quella in chiave di Effetto Doppler Relativistico (App.1-Par. 3.6).

App. 1-Par. 1.5: Il quadrivettore posizione.

Invece di scrivere i vettori posizione con le classiche tre componenti x , y e z , scriviamoli in forma matematicamente quadridimensionale, aggiungendo anche il tempo; ciò ci tornerà molto utile. Preciso però che, nell'opinione (motivata) di chi scrive, il nostro Universo è e resta a tre dimensioni e l'aggiunta di una quarta dimensione è un fatto puramente matematico; sfido infatti chiunque ad indicarmi col dito indice la quarta dimensione di un qualsivoglia oggetto presunto quadridimensionale. Nella TRR di oggi, si parla invece di una effettiva quarta dimensione!

Bene, allora: $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, che equivale a dire anche: (x, y, z, ct) .

Con tale nuova terminologia, le Trasformazioni di Lorentz divengono:

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma x_1 - \beta \gamma x_4 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = -\beta \gamma x_1 + \gamma x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \gamma x'_1 + \beta \gamma x'_4 \\ x_2 = x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ x_4 = \beta \gamma x'_1 + \gamma x'_4 \end{cases} \quad (A1.12)$$

con $\beta = V/c$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Si può verificare che la distanza spazio-temporale tra due punti è invariante per Trasformazioni di Lorentz, cioè è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali:

$$(\Delta x)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2 = (\Delta x')^2 = (\Delta x'_1)^2 + (\Delta x'_2)^2 + (\Delta x'_3)^2 - (\Delta x'_4)^2 \quad (A1.13)$$

(Questa espressione è una sorta di Teorema di Pitagora in quattro dimensioni).

Per la dimostrazione di ciò, si utilizzino, nella (A1.13), le Trasformazioni di Lorentz qui sopra, con i Δx_i in luogo degli x_i , e si verifichi appunto l'egualianza.

In altre parole, lunghezza tridimensionale e tempo sono relativi, mentre la loro composizione quadridimensionale è assoluta. Ecco perché si è detto che la definizione delle grandezze fisiche tramite quattro componenti ci sarebbe tornata utile. Si possono dunque applicare le Trasformazioni di Lorentz a tutti i quadrivettori, nella forma delle (A1.12).

In forma matriciale, le Trasformazioni di Lorentz possono essere così scritte:

(si ricordi il prodotto matriciale, con le componenti della riga della prima matrice moltiplicate per le rispettive componenti della colonna della seconda matrice, sommando poi tali prodotti per ottenere la componente della matrice prodotto appunto)

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A1.14)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \quad (A1.15)$$

mentre in forma tensoriale:

(si utilizza la convenzione di Einstein, cioè, se in un termine un indice è ripetuto, si considera sottintesa la sommatoria su quell'indice)

$$x'_i = \alpha_i^k x_k \quad (i,k=1,2,3,4) \text{ a secondo membro, } k \text{ è ripetuto, quindi si somma su di esso} \quad (A1.16)$$

$$x_k = \alpha_k^i x'_i \quad (i,k=1,2,3,4) \quad (A1.17)$$

App. 1-Par. 1.6: Legge Relativistica di Trasformazione delle Velocità.

Se sto camminando alla velocità di 5 km/h in un vagone ferroviario che, a sua volta, viaggia alla velocità di 100 km/h rispetto alla banchina, avrò, rispetto alla banchina, una velocità totale di 105 km/h. Questa è fisica classica. Quando però le due velocità iniziano ad essere confrontabili con quelle della luce, la semplice composizione per somma algebrica non vale più, ed iniziano a vigere le equazioni che stiamo per scrivere; anche perché, se no, qualche somma algebrica semplice rischierebbe di farci comparire una velocità totale superiore a c , cosa impossibile.

Dunque, abbiamo per definizione che:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = dx/dt \\ v_y = dy/dt \\ v_z = dz/dt \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = dx'/dt' \\ v'_y = dy'/dt' \\ v'_z = dz'/dt' \end{array} \right.$$

Differenziando ora le Trasformazioni di Lorentz, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{(dx' + V dt')}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \frac{(dt' + \frac{V}{c^2} dx')}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right.$$

da cui:

$$\begin{cases} v_x = dx/dt = \frac{(dx' + V dt')}{(dt' + \frac{V}{c^2} dx')} \\ v_y = dy/dt = \frac{dy' \sqrt{1-\beta^2}}{(dt' + \frac{V}{c^2} dx')} \\ v_z = dz/dt = \frac{dz' \sqrt{1-\beta^2}}{(dt' + \frac{V}{c^2} dx')} \end{cases}$$

Se ora divido numeratore e denominatore di queste ultime per dt' , si ha:

$$\begin{cases} v_x = \frac{(v'_x + V)}{(1 + \frac{V v'_x}{c^2})} \\ v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{(1 + \frac{V v'_x}{c^2})} \\ v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{(1 + \frac{V v'_x}{c^2})} \end{cases} \quad (A1.18) \text{ e analogamente: } \begin{cases} v'_x = \frac{(v_x - V)}{(1 - \frac{V v_x}{c^2})} \\ v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{(1 - \frac{V v_x}{c^2})} \\ v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{(1 - \frac{V v_x}{c^2})} \end{cases}$$

Per $V/c \ll 1$ e $v'_x/c \ll 1$ ci si riconduce al caso classico (galileiano) di somma algebrica.

Per rifarsi un attimo al caso del vagone ferroviario in cui una persona cammina all'interno, se si pone $\underline{v}' = (v'_x, 0, 0, c)$ e $\underline{v} = (v_x, 0, 0, c)$, dalle (A1.18) si ha che:

$$v_x = \frac{(v'_x + V)}{(1 + \frac{V v'_x}{c^2})} \quad (A1.19)$$

e se $v'_x = V = c$, allora $v_x = c$, e non $2c$! Dunque, se il treno si muove di suo a velocità c ed io all'interno di esso corro a velocità c , io, rispetto alla banchina, avrò una velocità risultante pari a c e non a $2c$!

La (A1.19) rappresenta il Teorema Relativistico di Addizione delle Velocità.

Altro esempio: due missili che viaggiano ciascuno a velocità $c/2$ si incrociano; a che velocità v_x si incrociano dunque?

$$v_x = \frac{(c/2 + c/2)}{(1 + \frac{c^2}{4c^2})} = \frac{c}{5/4} = \frac{4}{5}c < c !$$

App. 1-Par. 1.7: Il Tempo Proprio $d\tau$ di una particella.

Se una particella è ferma in (O', x', y', z') , ossia se la stessa si muove appunto con O' , ossia se O' è il suo sistema di riferimento "proprio", allora: $dx' = dy' = dz' = 0$ e:

$$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0 + 0 + 0 - c^2 dt^2 = -c^2 dt'^2, \text{ da cui:}$$

$$dt' = d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (\text{tempo proprio, invariante, in quanto}$$

tale è $\frac{ds}{c}$). Dunque, quando si eseguono calcoli riguardanti una particella, viene spontaneo utilizzare per essa appunto il

suo tempo proprio:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma}.$$

App. 1-Capitolo 2: La relatività delle energie.

App. 1-Par. 2.1: Il quadrivettore momento-energia (o momento lineare).

Sappiamo dalla fisica classica che il momento lineare, o quantità di moto, è dato dal prodotto della massa per la velocità. Ora, nel caso relativistico, per quanto visto finora, definiremo innanzitutto un quadrivettore e poi la velocità intesa come dx/dt avrà come dt il tempo proprio $d\tau$, che è caratteristico appunto della particella in esame, per la quale si va a definire il quadrivettore:

$$\underline{p} = (m_0 \frac{dx_1}{d\tau}, m_0 \frac{dx_2}{d\tau}, m_0 \frac{dx_3}{d\tau}, m_0 \frac{dx_4}{d\tau}) = (\frac{m_0}{1/\gamma} \frac{dx_1}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma} \frac{dx_2}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma} \frac{dx_3}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma} \frac{dx_4}{dt}) =$$
$$= (m \frac{dx_1}{dt}, m \frac{dx_2}{dt}, m \frac{dx_3}{dt}, m \frac{dx_4}{dt}) = (m\vec{v}, mc) = (\vec{p}, mc) = \underline{p}$$

dove $\vec{v}$ è il vettore (tridimensionale) velocità, $\vec{p}$ è il momento lineare tridimensionale,

$$mc = m \frac{dx_4}{dt} \text{ è la componente quadridimensionale, } d\tau = \frac{dt}{\gamma} \text{ è il tempo proprio e } m = \frac{m_0}{1/\gamma} = \gamma m_0 \text{ è la massa}$$

dinamica, che coincide con la massa a riposo m_0 solo se $v=0$. Si inizia quindi ad introdurre già il concetto di massa relativa, che cresce con la velocità, divenendo infinita per $v=c$.

Come già accennato in precedenza, i moduli dei quadrivettori sono "assoluti", cioè invarianti per trasformazioni di

Lorentz; infatti: $|\underline{p}|^2 = |\vec{p}|^2 - p_4^2 = m^2 v^2 - m^2 c^2 = -m^2 (c^2 - v^2) = -\frac{m_0^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})} (c^2 - v^2) = -m_0^2 c^2 = \text{costante, cioè}$

non funzione di v . Riscriviamo un attimo l'equazione qui sopra : $m^2 v^2 - m^2 c^2 = -m_0^2 c^2$ ossia:

$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$, ma mc^2 , con m che è la massa dinamica (vecchia denominazione), è l'energia totale E della particella, in quanto nella massa dinamica è già inclusa sia la massa a riposo che l'incremento di massa dovuto all'energia conferita alla particella. Moltiplicando dunque entrambi i membri per c^2 otteniamo: $m^2 c^4 = (m^2 v^2) c^2 + m_0^2 c^4$, ossia: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ (energia totale)

Questa è l'espressione, per l'energia, più generale che abbiamo e vale appunto per una particella anche relativistica.

In Relatività esiste dunque un Universo (matematicamente quadridimensionale) descritto da quadrivettori, dove le grandezze non variano così arbitrariamente con la velocità e dove dunque le leggi della natura preservano una certa coerenza, indipendentemente dallo stato di moto. Dunque, una particella di massa m_0 possiede energia totale:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

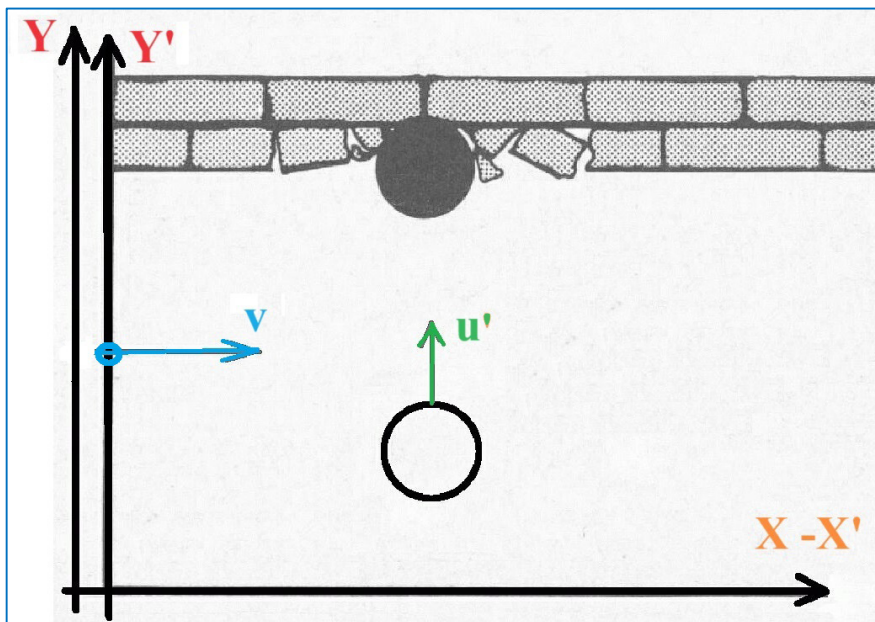
e a "riposo" ($v = 0$ e dunque $\gamma = 1$) energia di "riposo":

$$E_0 = m_0 c^2$$

Con questa possiamo già ritenere dimostrata la famosa formula di Einstein sull'energia di una massa in quiete.

La più corta dimostrazione di $E_0 = m_0 c^2$.

La massa è relativa



Palla di cannone.

Con riferimento alla figura, il sistema X'-Y' è quello a bordo di un'astronave che si muove lungo X alla velocità relativistica v ; all'interno dell'astronave viene sparato un colpo di cannone lungo Y', verso la parete superiore, ad una modesta velocità $u' \ll c$. Il danno alla parete è dato sia dalla velocità $u' = \frac{dY'}{dt'}$ della palla che dalla sua massa m' ; in una sola

espressione, esso è dato dall'impulso: $p' = m'u'$.

Per chi resta a Terra (sistema X-Y), la palla viaggia a velocità relativistica v in orizzontale (lungo X) ed ha però anche una modesta velocità verticale $u = \frac{dY}{dt}$, ma lungo Y non vi è moto relativo tra i due sistemi, da cui $dY' = dY$, mentre il tempo varia, per il fenomeno della dilatazione del tempo e dal sistema X-Y si vede rallentato ciò che succede a bordo del sistema X'-Y'. Allora, la palla di cannone, per X-Y, avrà, come detto, una velocità (*):

$$u = \frac{dY}{dt} = \frac{dY'}{dt' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dY'}{dt'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = u' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < u' \text{ ed un impulso:}$$

$$p_{(?) } = mu = mu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < p' \quad \text{e qui però la fisica verrebbe violata (Principio di Relatività), poiché si avrebbe a che}$$

fare con un impulso minore di quello a bordo, con la conseguenza che la parete di mattoni risulterebbe danneggiata minormente o danneggiata per nulla; si avrebbero cioè due visioni diverse di uno stesso risultato. Per forza di cose allora, dovendo il danno alla parete essere lo stesso per entrambi gli osservatori, la massa m risultante all'osservatore del sistema X-Y deve essere maggiore e, nella fattispecie, si avrà:

$$m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (A)$$

$$\text{da cui, finalmente: } p = mu = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} u' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m'u' = p' \text{ ed il danno alla parete resta preservato.}$$

Dunque, l'aver fornito energia cinetica alla palla di cannone (lungo X) ha comportato il fatto che la sua massa è cambiata, con un conseguente impatto anche sul calcolo dei danni che la palla va a fare lungo Y. E già questo ci permette di decretare l'equivalenza tra massa ed energia (fornisco una E che si tramuta in un Δm ).

Adesso, sappiamo che il legame tra energia e massa è del tipo:

$$E = kmv^2 \quad ([k] \cdot [m] = [kg]); \quad (B)$$

infatti, ad esempio per l'energia cinetica classica, si ha: $E = \frac{1}{2}mv^2$ e così via.

Adesso, la somministrazione di energia alla palla di cannone ha comportato una sua variazione di energia cinetica ΔE e una sua variazione di massa pari a:

$$\Delta m = m - m' = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m' = m' \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (C)$$

e sapendo che è stata l'energia fornita (per il moto lungo X) a causare Δm (unico attore attivo), allora, per la (B) e per la (C), si deve avere:

$$\Delta E_{\text{relativistica}} = k \cdot \Delta m \cdot v^2 = km'v^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = km'c^2 \left[\frac{v^2}{c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \right]. \quad (D)$$

Adesso, visto che la palla di cannone è ferma (su X') nell'astronave, mentre si muove lungo X con velocità v per il sistema sulla Terra, allora, in caso di velocità v bassa ($v \ll c$, non relativistica), per ΔE si deve avere:

$$\Delta E_{\text{classica}} = \Delta E_k = E_{k-\text{per_la_Terra}} - E_{k-\text{in_astronave}} = \frac{1}{2}m'v^2 - \frac{1}{2}m'0^2 = \frac{1}{2}m'v^2 \quad (E)$$

Consideriamo ora il fattore $\left[\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\right]$ della (D) e, nell'ipotesi classica ($v \ll c \rightarrow v^2/c^2 \ll 1$) effettuiamo

Sviluppo in serie di Taylor nella variabile $\frac{v^2}{c^2}$ e nell'intorno dello zero ($v^2/c^2 \sim 0$):

$$(f(x) = 1/\sqrt{1-x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots, \text{ da cui: } \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \cong \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \quad \text{e: } \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \cong \frac{1}{2}\frac{v^4}{c^4}$$

e dunque la (D) diventa:

$$\Delta E_{(v \ll c)} = km'c^2 \left[\frac{v^2}{c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \right] \cong km'c^2 \frac{1}{2} \frac{v^4}{c^4} = km' \frac{1}{2} \frac{v^4}{c^2} \quad (F)$$

ed essendo noi, per ipotesi, in questo particolare calcolo, nel regime di $v \ll c$, allora la (F) mi deve andare a coincidere

con la (E), da cui: $km' \frac{1}{2} \frac{v^4}{c^2} = \frac{1}{2} m' v^2$, ossia: $k = \frac{c^2}{v^2}$ ed infine, ritornando alla (D) relativistica:

$$\begin{aligned} \Delta E_{relativistica} &= km'c^2 \left[\frac{v^2}{c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \right] = \frac{c^2}{v^2} m'c^2 \left[\frac{v^2}{c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \right] = \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m'c^2 = \\ &= \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} = E - E_0 \end{aligned} \quad (G)$$

e allora la (G) ($\Delta E_{cinetica-relativistica} = E - E_0$) è interpretabile dicendo che per $v=0$ la palla di cannone ha comunque una energia a riposo $E_0 = m'c^2$, che poi crescerà con il moto (come del resto fa la sua massa), diventando

$$E = \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ grazie appunto alla somministrazione di energia cinetica (quella data dalla (G)). Fine della}$$

dimostrazione!

(*): parliamo di una velocità $u = u' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, mentre le Trasformazioni delle Velocità dicono che:

$$\left\{ \begin{aligned} v'_x &= \frac{(v_x - V)}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} \\ v'_y &= \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} \\ v'_z &= \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} \end{aligned} \right.$$

ma prendendo la seconda con $V=v_x$ (poiché, per il sistema X-Y, gli oggetti a bordo di X'-Y' hanno tutti velocità v_x pari alla velocità V di tutta l'astronave), si ha:

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta^2)} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ che è appunto}$$

l'equazione da noi usata, ossia: $u' = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

App. 1-Par. 2.2: Il quadrivettore velocità.

Lo definiamo ovviamente come segue: $\underline{v} = \frac{dx}{d\tau}$, dove si usa il tempo proprio $d\tau$ per motivi già esposti. Numeratore e denominatore sono entrambi invarianti, e dunque anche $\underline{v}$ lo è. Si ha:

$$\underline{v} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau} \right) = \left(\gamma \frac{dx_1}{dt}, \gamma \frac{dx_2}{dt}, \gamma \frac{dx_3}{dt}, \gamma \frac{dx_4}{dt} \right) = (\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, \gamma c) = (\gamma \vec{v}, \gamma c),$$

$$\text{e dunque, per il modulo di tale quadrivettore: } |\underline{v}|^2 = \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2 \text{ (costante!)}. \quad (\text{A2.1})$$

App. 1-Par. 2.3: La quadriforza.

Così come in fisica classica la forza è data dalla derivata della quantità di moto nel tempo, in relatività definiamo la quadriforza come derivata del quadrivettore momento-energia nel tempo (tempo proprio):

$$\underline{F} = \frac{dp}{d\tau} = (F_1, F_2, F_3, F_4) = (\vec{F}, F_4) = \left(\frac{d}{d\tau} \vec{p}, \frac{d}{d\tau} (m_0 \gamma c) \right) = \left(\gamma \frac{d}{dt} (m_0 \vec{v}), \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma c) \right); \quad (\text{A2.2})$$

$$\text{si ha dunque che: } \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v}) = \gamma \cdot \vec{f} = \vec{F}, \quad (\text{A2.3})$$

$$\left(\frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v}) = \vec{f} \text{ è la forza "classica" e a maggior ragione quando } \gamma = 1 \right)$$

$$\text{da cui: } \gamma \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) = \frac{\vec{F}}{m_0} = \frac{d}{d\tau} (\gamma \vec{v}), \text{ cioè, in componenti:}$$

$$\gamma \frac{d}{dt} (\gamma v_i) = \frac{F_i}{m_0} = \frac{d}{d\tau} (\gamma v_i) \quad (i=x,y,z) \quad (\text{A2.4})$$

$$\text{e poi, riguardo la quarta componente: } \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma c) = F_4 \quad (\text{A2.5})$$

$$\text{e quindi: } \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c) = \frac{F_4}{m_0} = \frac{d}{d\tau} (\gamma c). \quad (\text{A2.6})$$

Differenziamo ora la (A2.1), cioè la seguente equazione:

$$|\underline{v}|^2 = \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = \gamma^2 v_x^2 + \gamma^2 v_y^2 + \gamma^2 v_z^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2, \text{ ottenendo:}$$

$$0 = \left(\frac{d}{d\tau} (\gamma v_x) \right)^2 + \frac{d}{d\tau} (\gamma v_y)^2 + \frac{d}{d\tau} (\gamma v_z)^2 - \frac{d}{d\tau} (\gamma c)^2 = (2\gamma v_x \frac{d}{d\tau} (\gamma v_x) + 2\gamma v_y \frac{d}{d\tau} (\gamma v_y) + 2\gamma v_z \frac{d}{d\tau} (\gamma v_z) - 2\gamma c \frac{d}{d\tau} (\gamma c))$$

$$\text{cioè: } 0 = (\gamma v_x \frac{d}{d\tau} (\gamma v_x) + \gamma v_y \frac{d}{d\tau} (\gamma v_y) + \gamma v_z \frac{d}{d\tau} (\gamma v_z) - \gamma c \frac{d}{d\tau} (\gamma c)), \text{ ossia, per la (A2.4) e la (A2.6):}$$

$$0 = (\gamma v_x \frac{F_x}{m_0} + \gamma v_y \frac{F_y}{m_0} + \gamma v_z \frac{F_z}{m_0} - \gamma c \frac{F_4}{m_0}) \text{ e per la (2.3) } (\gamma \cdot \vec{f} = \vec{F}):$$

$$0 = (\gamma v_x \frac{f_x}{m_0} + \gamma v_y \frac{f_y}{m_0} + \gamma v_z \frac{f_z}{m_0} - \gamma c \frac{F_4}{m_0}), \text{ cioè:}$$

$$F_4 = \frac{\gamma}{c} (\vec{f} \cdot \vec{v}). \quad (\text{A2.7})$$

Tornando ora alla (A2.2), si ha finalmente la quadriforza, o Forza di Minkowski:

$$\underline{F} = \frac{dp}{d\tau} = (\gamma \vec{f}, \frac{\gamma}{c} (\vec{f} \cdot \vec{v})) \quad (\text{A2.8})$$

Per le equazioni di trasformazione di tale quadriforza, si veda il Subappendice 1.4.

App. 1-Par. 2.4: $E_0 = m_0 c^2$.

Per la (A2.5) si ha che: $\gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c) = F_4$, mentre per la (A2.7) si ha: $F_4 = \frac{\gamma}{c}(\vec{f} \cdot \vec{v})$. Dunque:

$$\gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c) = \frac{\gamma}{c}(\vec{f} \cdot \vec{v}), \text{ ossia: } \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2) = \vec{f} \cdot \vec{v}, \text{ ossia ancora:}$$

$$d(m_0 \gamma c^2) = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = dL = dE \quad (\text{A2.9})$$

La (A2.9) è esattamente l'espressione dell'energia in fisica classica se $\gamma = 1$; l'integrazione della (A2.9) con costante

d'integrazione uguale a zero fornisce: $E = \gamma m_0 c^2$ (A2.10)

In realtà la (A2.10) vale solo per energie guadagnate (come negli acceleratori di particelle), mentre per energie cedute (Universo collassante o Fisica Atomica degli elettroni che scendono di livello) vale la seguente:

$$E = \frac{1}{\gamma} m_0 c^2 \text{ (Rubino) (per una convincente dimostrazione della stessa, si vada al link:}$$

<https://vixra.org/pdf/2202.0010v1.pdf>). Dunque, una particella di massa m_0 possiede energia totale:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{A2.11})$$

$$\text{e a "riposo" (} v = 0 \text{ e dunque } \gamma = 1 \text{) energia di "riposo": } E_0 = m_0 c^2 \quad (\text{A2.12})$$

App. 1-Par. 2.5: Energia cinetica relativistica.

La differenza tra la (A2.11) e la (A2.12) fornisce ovviamente la pura energia cinetica di una particella:

$$E_K = E - E_0 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (\text{A2.13})$$

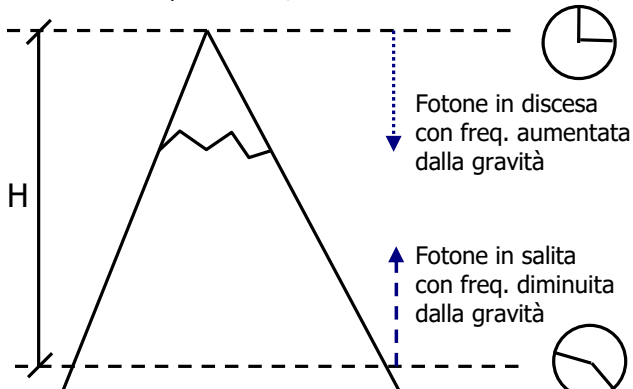
Sviluppando ora in Serie di Taylor l'espressione per $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, si ha, per $v \ll c$ ($\beta \ll 1$):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots, \text{ cioè: } (\gamma - 1) \cong \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \text{ e per la (A2.13):}$$

$$E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (v \ll c) \text{ e cioè la nota espressione classica (di Newton) per l'energia cinetica!}$$

App. 1-Capitolo 3: Fenomeni relativistici.**App. 1-Par. 3.1: Tempo e gravità: la gravità rallenta il tempo!**

Anche la gravità rallenta il tempo! In montagna il tempo scorre più velocemente che a valle. Ovviamente, sulla Terra, la differenza è impercettibile, ma su una stella di neutroni, o in un buco nero, l'effetto è intensissimo.



$$\Delta E = m_0 g H \text{ (delta energia del salto di quota)}$$

$$\Delta E = h \Delta \nu \text{ (delta energia del calo di freq. di un fotone)}$$

$$\text{Dalle due: } \Delta \nu = m_0 g H / h.$$

Per un fotone, $E = h \nu$, ma in relatività: $E = m_0 c^2$, da cui, per un fotone: $m_0 = h \nu / c^2$ e dunque, per $\Delta \nu$:

$\Delta \nu = \nu g H / c^2$ ed essendo il tempo l'inverso della frequenza, si ha: $\Delta \nu / \nu = \Delta t / t$ e dunque:

$$\Delta t = \frac{g H}{c^2} t. \text{ Dunque, su un tempo } t, \text{ si ha un rallentamento } \Delta t \text{ dato dalla gravità!}$$

Fig. A3.1: Montagna, gravità e tempo.

Sappiamo che la velocità di fuga di un corpo celeste di massa M e raggio R vale: $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Se su quel corpo un

oggetto viene lanciato verticalmente alla velocità di fuga, esso uscirà dal campo gravitazionale del corpo celeste ed andrà verso l'infinito, senza più ricadere.

Un buco nero è un corpo così compresso (M grande ed R piccolo) che la velocità di fuga sulla sua superficie raggiunge il valore della velocità della luce e dunque neanche la luce vi sfugge, da cui il nome di buco nero; inoltre, per quanto detto sopra, si può affermare che in un buco nero il tempo è pressoché fermo!

App. 1-Par. 3.2: Volume dei solidi in moto.

I solidi in moto risultano ruotati.

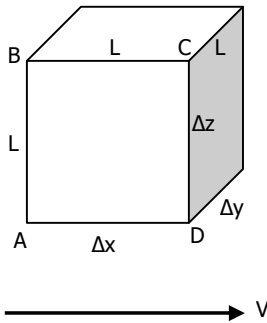


Fig. A3.2: Corpo visto in quiete.

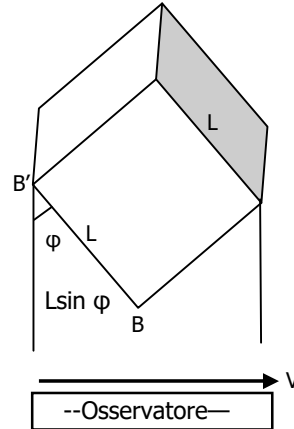


Fig. A3.3: Corpo visto in moto.

$V = \Delta x \Delta y \Delta z$ (volume del solido per un osservatore solidale allo stesso)

$V' = \Delta x' \Delta y' \Delta z' = \Delta x \sqrt{1 - \beta^2} \Delta y \Delta z = V \sqrt{1 - \beta^2}$ (volume del solido per un osservatore che vede il solido in movimento a velocità V lungo x).

Ovviamente, per le Trasformazioni di Lorentz, essendo il moto lungo x , solo Δx subisce contrazione. Tuttavia, l'osservatore in quiete vede il punto B in ritardo rispetto ad A , in quanto B è più distante di A ed il ritardo vale L/c , ovviamente. Come ulteriore conseguenza, B appare spostato indietro di un tratto pari a $(L/c)V = \beta L$.

Si ha: $L \sin \phi = \beta L$, da cui: $\sin \phi = \beta$ e $\phi = \arcsin \beta$.

In definitiva, il corpo appare dunque ruotato! Ed una sfera invece continua ad apparire come tale.

App. 1-Par. 3.3: L'equazione delle onde, o di D'Alembert, vale in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

Le onde elettromagnetiche nel vuoto, e dunque anche la luce, si propagano, come noto, seguendo l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 = \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \square \phi$$

Ora notiamo preliminarmente che, per le Trasformazioni di Lorentz, si ha (derivando le stesse):

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma V, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma \frac{V}{c^2}, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \dots = 0$$

Per l'analisi matematica, si ha, in O' : $\phi = \phi(\vec{r}', t')$, e dunque:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x'} + (-V)\gamma \frac{\partial \phi}{\partial t'}; \text{ inoltre:}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{V^2}{c^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - \frac{2V}{c^2 - V^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'}$$
 e similmente, per le altre coordinate:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -V\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t'} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left(V^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - 2V\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}$$

da cui, per sostituzione nell'equazione delle onde, si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \quad \text{c.v.d.}$$

App. 1-Par. 3.4: L'esperimento di Fizeau.

Nel 1849, molto prima della formulazione della Teoria della Relatività Ristretta da parte di Einstein (1905), il fisico francese A.H.L. Fizeau condusse degli studi sulla velocità della luce nell'acqua e nei fluidi in movimento.

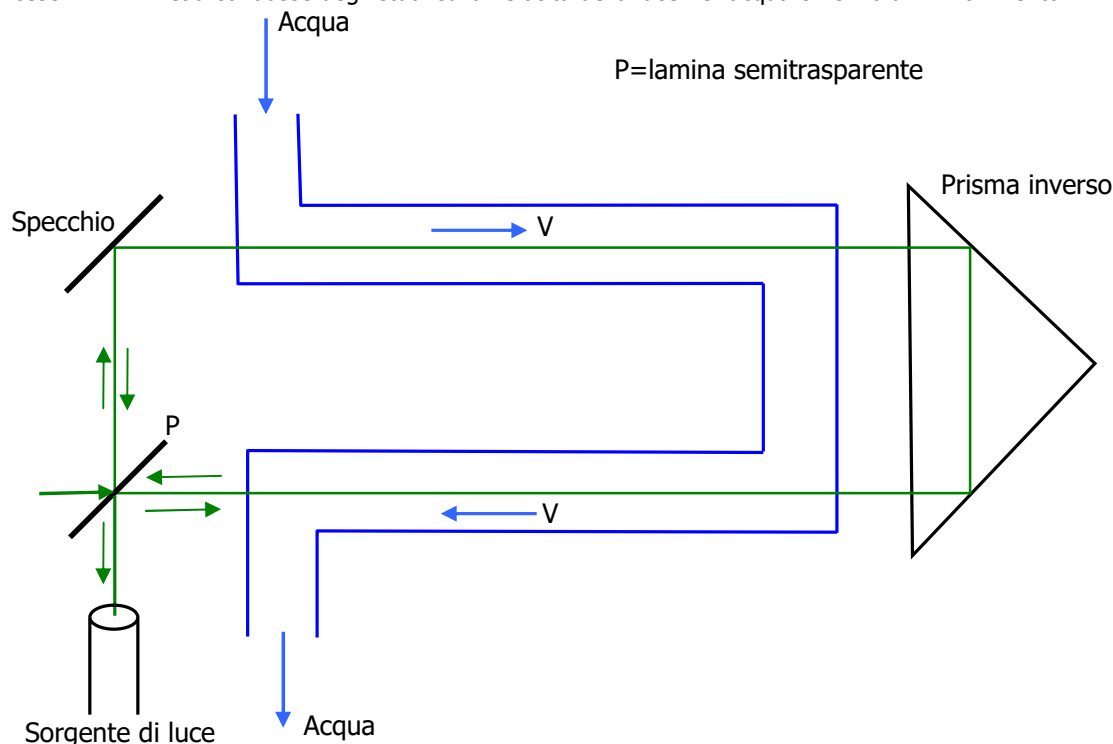


Fig. A3.4: Esperimento di Fizeau.

Nell'acqua in quiete la luce ha velocità $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,33} \cong 225.000 \text{ km/s}$, dove $n=1,33$ è l'indice di rifrazione

dell'acqua. Se ora l'acqua, o comunque il fluido nel quale si va a misurare la velocità della luce, scorre a sua volta con velocità V , allora, secondo i risultati di Fizeau, la velocità complessiva della luce nel fluido in scorrimento è:

$$v = \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (\text{A3.1})$$

in totale disaccordo con la fisica classica, secondo cui si dovrebbe avere più semplicemente: $v = \frac{c}{n} + V$.

Anni dopo, la TRR ha dato una spiegazione teorica della (A3.1). Infatti, per il Teorema di Addizione delle Velocità espresso dalla (A1.19), si può scrivere che:

$$v = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{Vc}{nc^2}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{V}{nc}\right)}; \text{ ora, moltiplicando numeratore e denominatore per } \left(1 - \frac{V}{nc}\right), \text{ si ha:}$$

$$v = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{V}{nc}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{nc}\right)}{1 - \left(\frac{V}{nc}\right)^2} = \frac{\frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{V^2}{nc}}}{1 - \cancel{\left(\frac{V}{nc}\right)^2}}, \text{ ma le quantità } \frac{V^2}{nc} \text{ a numeratore e } \left(\frac{V}{nc}\right)^2 \text{ a}$$

denominatore sono ciascuna trascurabile ($\ll 1$) rispetto agli altri addendi e possono essere appunto trascurate, da cui

$$\text{l'asserto: } v = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

App. 1-Par. 3.5: Effetto Doppler Relativistico (longitudinale).

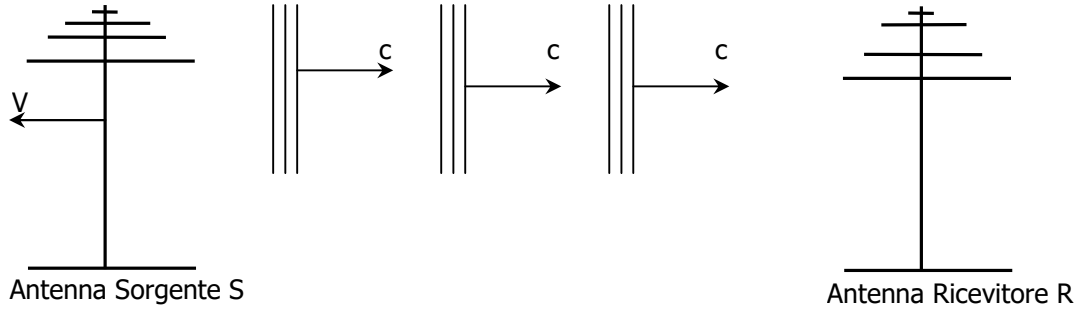


Fig. A3.5: Effetto Doppler longitudinale (esempio di sorgente S in allontanamento da R con velocità V (β)).

L'antenna sorgente invia a quella ricevente segnali elettromagnetici di periodo T_S ;

Per il fenomeno della dilatazione del tempo l'antenna ricevente li riceverà con un periodo T'_S tale che:

$$T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ inoltre, l'allontanamento di S determinerà un } \Delta T'_S \text{ tra un fronte d'onda e l'altro pari a:}$$

$$\Delta T'_S = \frac{VT'_S}{c} = \frac{V}{c} \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ dunque, si avrà in totale per } T_R:$$

$$T_R = T'_S + \Delta T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} + \beta \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T_S}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 + \beta) = \frac{T_S}{\sqrt{(1-\beta)\sqrt{1+\beta}}} (1 + \beta) =$$

$$= \frac{T_S}{\sqrt{(1-\beta)}} \sqrt{(1+\beta)} = T_S \frac{\sqrt{(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta)}} = T_R$$

$$\text{che riscriviamo: } T_R = T_S \frac{\sqrt{(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta)}}; \text{ (S ed R in allontanamento)} \quad (\text{A3.2})$$

lo stesso vale se è il ricevitore ad allontanarsi. Se poi S ed R sono in avvicinamento, per gli stessi ragionamenti, vale la seguente:

$$T_R = T_S \frac{\sqrt{(1-\beta)}}{\sqrt{(1+\beta)}} \text{ (S ed R in avvicinamento).} \quad (\text{A3.3})$$

Per una trattazione più generale dell'argomento, si veda il Subappendice 1.2.

App. 1-Par. 3.6: Il Paradosso dei Gemelli spiegato con l'Effetto Doppler Relativistico!

Supponiamo che uno dei due gemelli parta per un viaggio spaziale a velocità pari a $3/5 c = 180.000 \text{ km/s}$, in allontanamento dalla Terra per 25 min (misurati sulla Terra) e poi inverta la rotta e ritorni sulla Terra alla stessa velocità, impiegando dunque altri 25 min. Si trascurino ovviamente, per semplicità, le fasi di accelerazione e decelerazione.

Ora, per dimostrare che la dilatazione del tempo agisce anche sulla frequenza cardiaca del gemello in viaggio (ma sempre agli occhi del gemello sulla Terra, nonché al reincontro dei gemelli a fine viaggio), supponiamo, per semplicità, che entrambi i gemelli abbiano un battito cardiaco al secondo e che il gemello sulla Terra trasmetta un impulso radio (dunque a velocità c) ogni secondo, cioè ogni suo battito cardiaco, verso l'astronave, per tenere informato il fratello gemello in viaggio sulla propria frequenza cardiaca. Ricordiamo che per il gemello "vecchio" (old) che resta sulla Terra il viaggio dura, per ipotesi, $25+25=50 \text{ min}$ (3000 battiti cardiaci), mentre, se la dilatazione del tempo è vera, per il gemello giovane (young) la durata sarà di ($V=3/5 c$, cioè $\beta=3/5$):

$$T_{\text{young}} = T_{\text{old}} \sqrt{(1-\beta^2)} = T_{\text{old}} \sqrt{(1-\frac{V^2}{c^2})} = 50 \text{ min} \sqrt{(1-\frac{9c^2}{25c^2})} = 40 \text{ min} (=2400 \text{ battiti cardiaci})$$

Invece, sotto un'analisi Doppler del fenomeno, possiamo dire che, per la (A3.2), il gemello sulla Terra (old) trasmette i suoi battiti cardiaci ogni secondo, ma dal gemello in viaggio essi verranno ricevuti, nella fase di andata, ogni due secondi; infatti, durante l'andata ("to"):

$$T_{\text{young}}(to) = T_{\text{old}}(to) \frac{\sqrt{(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta)}} = 1s \frac{\sqrt{1+(3/5)}}{\sqrt{1-(3/5)}} = 2s \text{ e dunque, durante l'andata, il gemello in viaggio, il cui tempo}$$

di andata è di $20 \text{ min} = 1200s = 1200 \text{ battiti}$, ha ricevuto dal fratello sulla Terra un battito ogni 2s, cioè solo 600 battiti.

Dunque, il gemello in volo, durante i suoi 20 min(=1200s) di andata, ha constatato su se stesso ovviamente 1200 battiti e ne ha ricevuti però solo 600 del fratello sulla Terra.

Dopo 20 min del gemello in volo, la rotta si inverte ed inizia il ritorno verso la Terra, di altri 20 min (sempre secondo il tempo del gemello in volo). In questi altri 20 min di ritorno ("from"), però, il gemello sulla Terra trasmette sempre ogni secondo, ma quello in volo ora riceve ogni mezzo secondo; infatti, ora, per la (A3.3):

$$T_{young}(from) = T_{old}(from) \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} = 1s \frac{\sqrt{1-(3/5)}}{\sqrt{1+(3/5)}} = 0,5s, \text{ dunque, durante questi suoi altri 20 min=1200s=}$$

=1200 battiti su se stesso, il gemello in volo riceve ben 2400 battiti dal fratello dalla Terra.

Dunque, il gemello in volo, durante gli altri suoi 20 min(=1200s) di ritorno, ha constatato su se stesso ovviamente altri 1200 battiti e ne ha ricevuti però ben 2400 dal fratello dalla Terra.

Riassumiamo:

in totale, durante il suo intero viaggio di 20+20=40 min, il gemello in volo ha contato ovviamente 1200+1200=2400 battiti cardiaci su se stesso e ben 600+2400=3000 battiti cardiaci dal fratello gemello rimasto sulla Terra.

Deve per forza ritenersi più giovane!!!

App. 1-Par. 3.7: L'Esperimento di Michelson e Morley.

S – specchio semiriflettente
S₁, S₂ - specchi

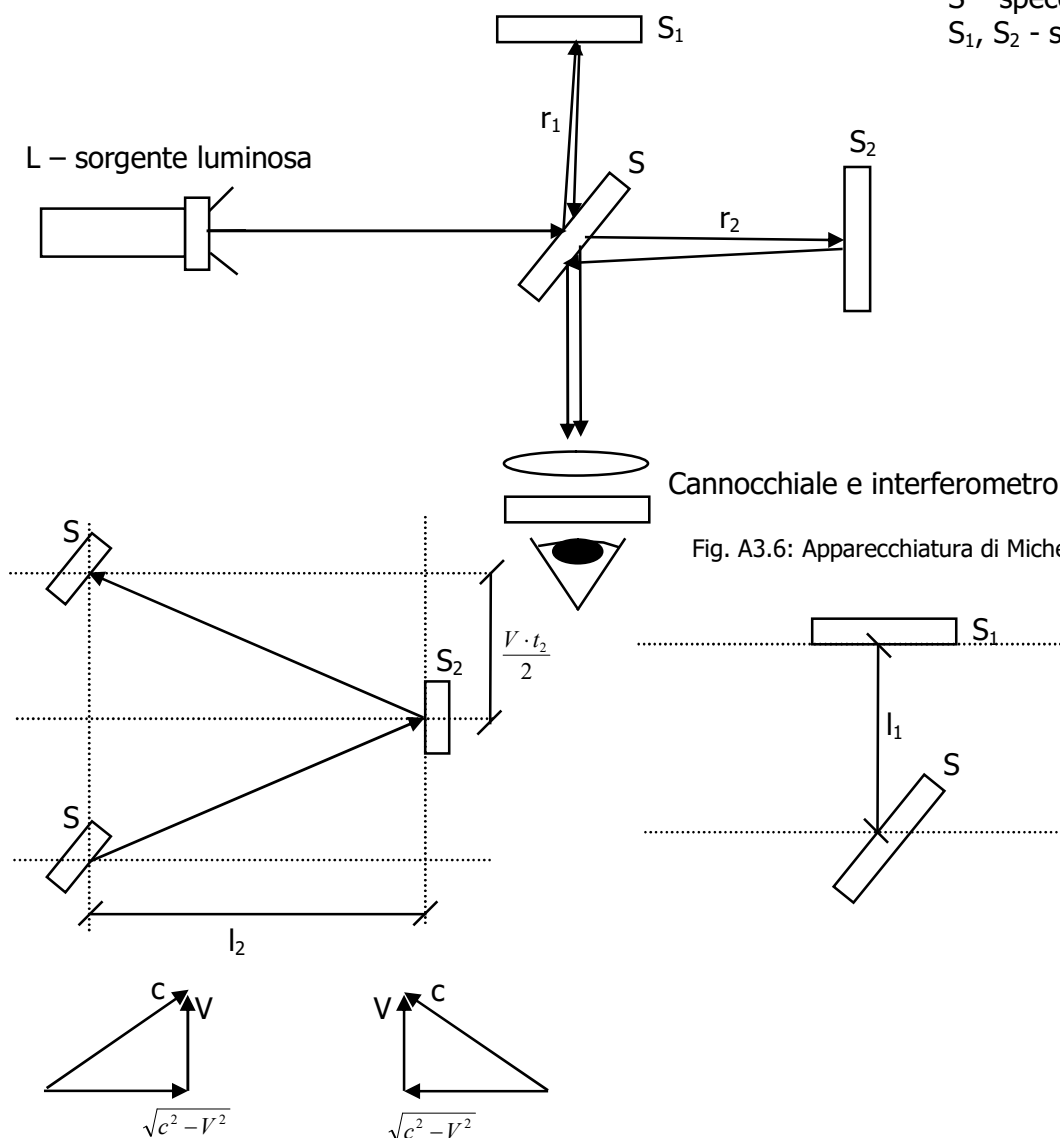


Fig. A3.6: Apparecchiatura di Michelson (interferometro).

Fig. A3.7: Percorsi luminosi e rispettive velocità.

Prima di Einstein si pensava che le onde elettromagnetiche, e dunque anche la luce, dovessero necessariamente propagarsi in un mezzo, così come avviene per le onde sonore nell'aria. Si suppose dunque che lo spazio fosse permeato da un gas invisibile e leggerissimo, detto etere. La Terra ruota intorno al Sole con una velocità V di circa 30 km/s, dunque si muoverebbe nell'etere con tale velocità e la luce emessa da una sorgente luminosa solidale con la Terra stessa dovrebbe dunque avere, in generale, una velocità diversa da c (c±V lungo la direzione di moto della Terra e $\sqrt{c^2 - V^2}$ trasversalmente).

Nel 1886 si iniziò a preparare l'esperimento, che doveva dimostrare il movimento della Terra nell'etere. A Cleveland venne bloccato il traffico durante l'esperimento, per evitare vibrazioni; l'apparecchiatura fu posta su una lastra di pietra galleggiante in un pozzo di mercurio, per effettuare la rotazione dell'apparecchiatura di 90° senza vibrazioni. Ora, con l_1 lungo il moto della Terra, per il cammino di andata e ritorno compiuto dalla luce, si ha:

$$t_1 = \frac{l_1}{c+V} + \frac{l_1}{c-V} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{(1-V^2/c^2)} \text{ e per il moto trasversale lungo } l_2:$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}}$$

Facendo giungere i due raggi su un interferometro per farli appunto interferire, gli stessi giungerebbero con un Δt pari a:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} - \frac{l_1}{(1-V^2/c^2)} \right) \cong \frac{2}{c} [l_2(1+V^2/2c^2) - l_1(1+V^2/c^2)]$$

in quanto si ha che $V/c \cong 10^{-4}$, $V^2/c^2 \cong 10^{-8}$ e $(1+x)^k \cong 1+kx$.

La lunghezza d'onda della luce utilizzata era $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7} m$ e sappiamo che a λ corrisponde l'angolo giro 2π ; possiamo dunque scrivere la seguente proporzione che coinvolge l'angolo di sfasamento δ tra i due raggi e la differenza di cammino $c\Delta t$:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c\Delta t}{\delta}, \text{ da cui: } \delta = \frac{2\pi c\Delta t}{\lambda}.$$

Fissando la lunghezza di un braccio e regolando quella dell'altro tramite una vite micrometrica, si può rendere $c\Delta t$ dell'ordine di λ , realizzando il fenomeno di interferenza voluto.

Ora, senza variare la geometria dell'apparecchiatura, la si ruoti di 90°; i ruoli di l_1 ed l_2 si invertiranno e si avrà:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} - \frac{l_2}{(1-V^2/c^2)} \right) \cong \frac{2}{c} [l_1(1+V^2/2c^2) - l_2(1+V^2/c^2)]$$

e inoltre si avrebbe: $\frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{\delta - \delta'}{2\pi} = \frac{c\Delta t - c\Delta t'}{\lambda} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \frac{V^2}{c^2} = \frac{22m}{5,5 \cdot 10^{-7} m} 10^{-8} \cong 0,4$, cioè, con la rotazione

dell'interferometro si dovrebbe osservare uno spostamento delle frange di interferenza pari a 0,4 volte la distanza λ fra due massimi successivi.

In realtà, nulla di tutto ciò fu osservato, nonostante la sensibilità degli strumenti fosse tale che si potesse avere anche

$$\frac{\Delta\delta}{2\pi} = 0,01 !$$

Michelson si dichiarò dunque deluso dall'esperimento, visto che non venne dimostrato il movimento della Terra nell'etere. La questione venne risolta nel 1905 da un impiegato dell'Ufficio Brevetti di Berna, un certo Albert Einstein, che suggerì di cessare di cercare di dimostrare il moto della Terra nell'etere, per il semplice fatto che l'etere non esiste!

App. 1-Capitolo 4: L'Elettrodinamica relativistica.

App. 1-Par. 4.1: La forza magnetica è niente altro che una (relativistica) forza elettrica di Coulomb(!)

A tal proposito, immaginiamo la seguente situazione, dove vi è un conduttore, ovviamente composto da nuclei positivi e da elettroni, e poi un raggio catodico (di elettroni) che scorre parallelo al conduttore:

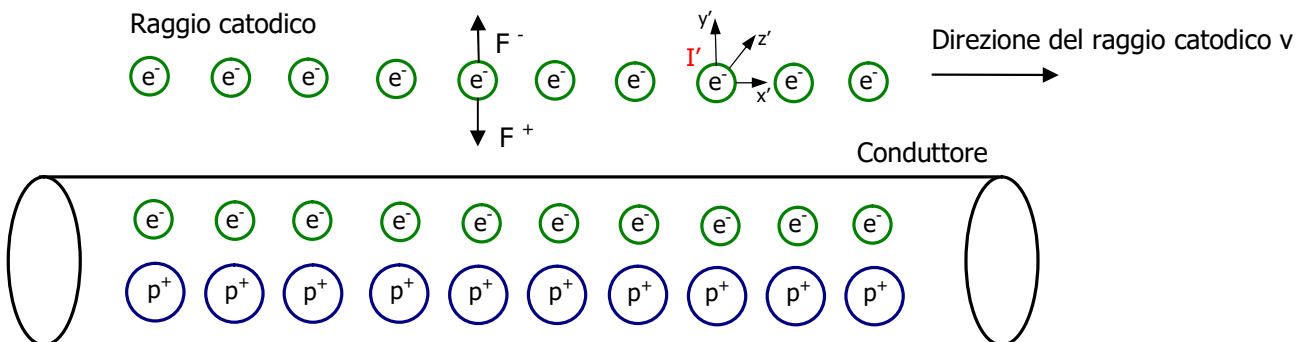


Fig. A4.1: Conduttore non percorso da corrente, visto dal sistema di riferimento $\vec{I}'$ (x' , y' , z') di quiete del raggio catodico.

Sappiamo dal magnetismo che il raggio catodico non sarà deflesso verso il conduttore perché in quest'ultimo non scorre nessuna corrente che possa determinare ciò. Questa è l'interpretazione del fenomeno in chiave magnetica; in chiave

elettrica, possiamo dire che ogni singolo elettrone del raggio è respinto dagli elettroni del conduttore con una forza F^- identica a quella F^+ con cui è attratto dai nuclei positivi del conduttore.

Passiamo ora alla situazione in cui nel conduttore scorra invece una corrente con gli e^- a velocità u :

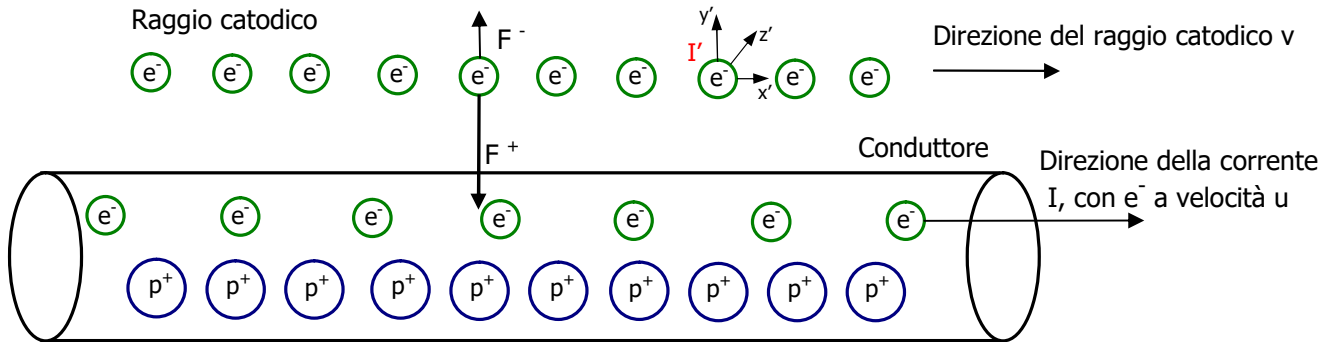


Fig. A4.2: Conduttore percorso da corrente (con gli e^- a velocità u), visto dal sistema di riferimento I' (x' , y' , z') di quiete del raggio catodico.

In quest'ultimo caso, sappiamo dal magnetismo che il raggio di elettroni deve deflettere verso il conduttore, in quanto siamo nel noto caso di correnti parallele e di verso concorde, che devono dunque attrarsi. Questa è l'interpretazione del fenomeno in chiave magnetica; in chiave elettrica, possiamo dire che dal momento che gli elettroni nel conduttore inseguono, per così dire, quelli del fascio, i primi, visti dal sistema di quiete del fascio (I'), avranno una velocità minore rispetto a quella che risultano avere i nuclei positivi, che invece sono fermi nel conduttore. Risulterà, perciò, che gli spazi immaginabili tra gli elettroni del conduttore subiranno una contrazione relativistica di Lorentz meno accentuata, rispetto ai nuclei positivi, e dunque ne risulterà una densità di carica negativa minore della densità di carica positiva, e dunque gli elettroni del fascio verranno elettricamente attratti dal conduttore. Ecco la lettura in chiave elettrica del campo magnetico. Ora, è vero che la velocità della corrente elettrica in un conduttore è molto bassa (mm/s o anche meno) rispetto alla relativistica velocità della luce c , ma è anche vero che gli elettroni sono miliardi di miliardi ..., e dunque un piccolo effetto di contrazione su così tanti interspazi determina l'apparire della forza magnetica.

Ora, però, vediamo se la matematica ci dà quantitativamente ragione su quanto asserito, dimostrandoci che la forza magnetica è una forza elettrica anch'essa, ma vista in chiave relativistica. Consideriamo allora una situazione semplificata in cui un elettrone e^- , di carica q , viaggi, con velocità v , parallelo ad una corrente di nuclei con carica Q^+ (a velocità u):

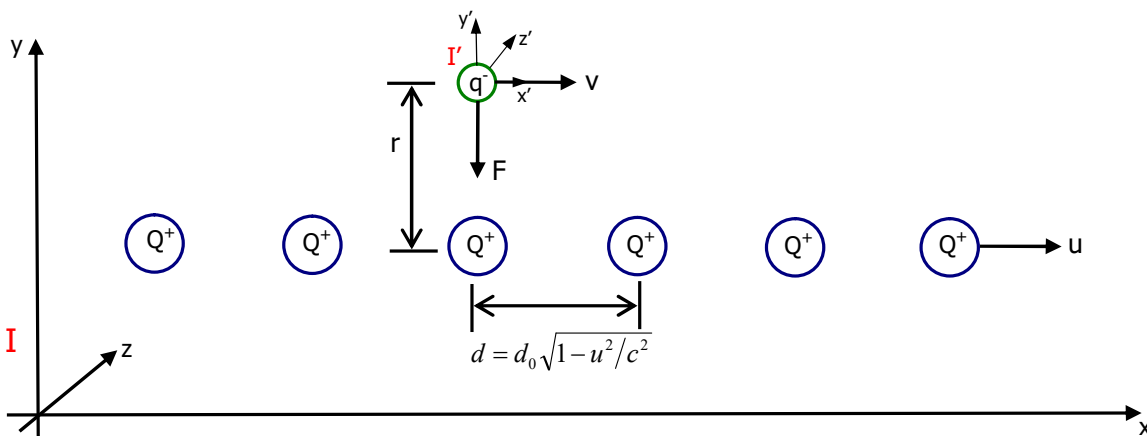


Fig. A4.3: Corrente di cariche positive (a velocità u) ed elettrone a velocità v nel sistema di quiete del lettore I .

a) Valutazione di F in chiave elettromagnetica, nel sistema I :

Ricordiamo innanzitutto che se ho N cariche Q , in linea, a distanza d una dall'altra (come in figura A4.3), allora la densità di carica lineare λ sarà:

$$\lambda = N \cdot Q / N \cdot d = Q/d \quad .$$

Ora, sempre con riferimento alla Fig. A4.3, nel sistema I , per l'elettromagnetismo l'elettrone sarà sottoposto alla forza di Lorentz $F_l = q(E + v \times B)$ che si compone di una componente originariamente già elettrica e di una magnetica:

$$F_{el} = E \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda}{2\pi r} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} \right) q \quad \text{dovuta all'attrazione elettrostatica di una distribuzione lineare di cariche } Q,$$

$$\text{e: } B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \mu_0 \frac{Q/t}{2\pi r} = \mu_0 \frac{Q/(d/u)}{2\pi r} = \mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \quad (\text{Biot e Savart}).$$

$$\text{Dunque: } F_l = q \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} - v\mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \right) = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \mu_0 uv \right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (\text{A4.1})$$

dove il segno meno indica che la forza magnetica è repulsiva, in tale caso, visti i segni reali delle due correnti, e dove la distanza d_0 di quiete risulta contratta a d , per Lorentz, nel sistema **I** in cui le cariche Q hanno velocità u ($d = d_0 \sqrt{1-u^2/c^2}$).

b) Valutazione di F in chiave elettrica, nel sistema **I'** di quiete di q :

nel sistema **I'** la carica q è ferma e dunque non costituisce nessuna corrente elettrica, e dunque sarà presente solo una forza elettrica di Coulomb verso le cariche Q :

$$F'_{el} = E' \cdot q = \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\lambda'}{2\pi r'} \right) q = \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d'}{2\pi r'} \right) q = q \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r'} \right) \frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}, \quad (\text{A4.2})$$

dove u' è la velocità della distribuzione di cariche Q nel sistema **I'**, che si compone di u e v tramite il noto teorema relativistico di addizione delle velocità:

$$u' = (u - v) / (1 - uv/c^2), \quad (\text{A4.3})$$

e d_0 , questa volta, si contrae appunto secondo u' : $d' = d_0 \sqrt{1-u'^2/c^2}$.

Notiamo ora che, con un po' di algebra, vale la seguente relazione (vedi la (A4.3)):

$$1 - u'^2/c^2 = \frac{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - uv/c^2)^2}, \text{ che sostituita nel radicale della (A3.2) fornisce:}$$

$$F'_{el} = E' \cdot q = \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\lambda'}{2\pi r'} \right) q = \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d'}{2\pi r'} \right) q = q \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (\text{A4.4})$$

Vogliamo ora confrontare la (A4.1) con la (A4.4), ma ancora non possiamo, perché una fa riferimento ad **I** e l'altra ad **I'**; rapportiamo allora F'_{el} della (A4.4) in **I** anch'essa e, per fare ciò, osserviamo che, per la definizione stessa di forza, in **I'**:

$$F'_{el} (in_I') = \frac{\Delta p_{I'}}{\Delta t_{I'}} = \frac{\Delta p_I}{\Delta t_I \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{F_{el} (in_I)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \text{ con } \Delta p_{I'} = \Delta p_I \text{ in quanto } \Delta p \text{ si estende lungo } y, \text{ e non}$$

lungo la direzione del moto relativo, dunque per le T . di Lorentz non subisce variazione, mentre Δt ovviamente sì.

Si ha allora:

$$\begin{aligned} F_{el} (in_I) &= F'_{el} (in_I') \sqrt{1-v^2/c^2} = q \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}} \sqrt{1-v^2/c^2} = \\ &= q \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = F_{el} (in_I) \end{aligned} \quad (\text{A4.5})$$

Ora, dunque, possiamo confrontare la (A4.1) con la (A4.5), in quanto ora entrambe fanno riferimento al sistema **I**. Riscriviamole una sopra l'altra:

$$\begin{aligned} F_l (in_I) &= q \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} - v\mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \right) = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \mu_0 uv \right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ F_{el} (in_I) &= q \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1-uv/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{uv}{\varepsilon_0 c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}$$

Possiamo dunque dire che le due equazioni sono identiche se è verificata la seguente identità: $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, e la stessa è nota sin dal 1856. Essendo dunque identiche le due equazioni, la forza magnetica risulta ricondotta ad una forza elettrica di Coulomb, e dunque è compiuta l'unificazione dei campi elettrico e magnetico!!

Oppure, più semplicemente:

qual è la formula simbolo della "Teoria" della Relatività? Sicuramente, la maggior parte risponderà $E=mc^2$. Questa equazione, però, nella sua forma, è un po' quella dell'energia cinetica di Newton ($(1/2)mv^2$) e non rappresenta proprio una novità. Invece, la più rappresentativa, ossia quella che davvero, inequivocabilmente, ti dice che si sta parlando di relatività, è la seguente:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ ossia, meglio ancora, la sola radice } \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \text{ o, ancor più semplicemente: } \boxed{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Quando si vede tale espressione, si capisce che si sta parlando di Relatività!

E tale quantità era già nascosta nell'elettromagnetismo del 700 e dell'800.

Qui, però, semplificando un tantino i ragionamenti, si abbia una distribuzione lineare di cariche positive n (n cariche al metro) ed una singola carica q a distanza d , come in figura A4.4:

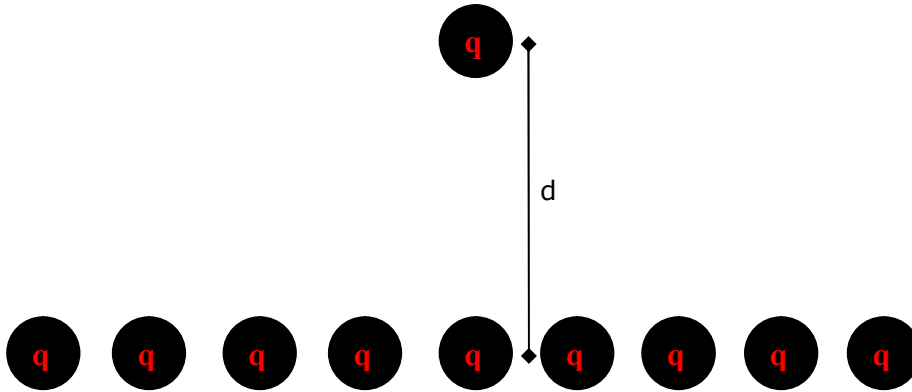
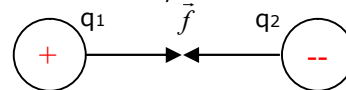


Fig. A4.4.

Se la densità lineare di carica è λ [C/m], allora, dalla Legge di Coulomb del 1785, ossia dalla:

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{r} \quad (\text{Coulomb-1785})$$



discende il campo elettrico E generato da tale distribuzione lineare di carica e la conseguente forza F di repulsione sulla carica singola q :

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} \quad (\text{per Coulomb-1785}), \text{ dove } \lambda = nq.$$

E, in tale situazione, tutte le cariche appaiono inizialmente ferme.

Se ora io, osservatore, immagino di viaggiare a velocità v verso destra, allora vedrò delle cariche muoversi indietro, verso sinistra, ossia delle correnti elettriche, e sappiamo dal magnetismo dell'ottocento che correnti di verso concorde si attraggono (due fili elettrici percorsi da correnti di verso concorde si attraggono; un po' quello che succede nei motori elettrici ogni giorno).

Allora, la carica singola la vedremo non solo respinta elettricamente, ma anche attratta magneticamente, verso la distribuzione di cariche.

Per la Forza di Lorentz totale risultante, si avrà $(\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{t}, \text{ per Biot-Savart-1820})$:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv \hat{n}, \text{ ma essendo, dalla definizione di corrente elettrica, che:}$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(n\Delta x)}{\Delta t} = \frac{q(nv\Delta t)}{\Delta t} = qnv = \lambda v \quad (\Delta x = v\Delta t \text{ è lo spazio percorso}), \text{ allora:}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q \lambda v^2}{2\pi d} \hat{n}.$$

Ricordiamo ora la arcinota equazione che fornisce la velocità delle onde elettromagnetiche c nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299.792.458 \text{ m/s} \quad (1856), \text{ da cui: } \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}, \text{ e si avrà, per la forza risultante sulla carica}$$

$$\text{singola: } \vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q \lambda v^2}{2\pi d} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{q \lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{v^2}{c^2} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n}, \text{ ossia:}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n} \quad ; \text{ è spuntata l'espressione simbolo della Relatività! }$$

Si noti che $\vec{F}' \neq \vec{F}$, ossia l'osservatore fermo e quello in moto vedono due situazioni differenti...c'è qualcosa che non va. Non va bene. Per far tornare i conti, le distanze tra una carica e l'altra devono apparire differenti ai due osservatori, ossia la distanza dovrà risultare una grandezza relativa all'osservatore....e lo stesso per il tempo.

Comparirà una $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ relativistica nell'espressione nuova per λ ed una $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ relativistica nella valutazione dei

tempi in gioco, che annulleranno appunto la nuova espressione $(1 - \frac{v^2}{c^2})$ appena comparsa. Si noti che qui l'equazione

più recente che abbiamo usato nel ragionamento risale al 1856, quando Albert Einstein non era ancora nato!

Ma la verità qual è? Sono spazio e tempo che devono diventare relativi per compensare l'effetto di comparsa della forza magnetica, oppure è la forza magnetica, che come forza a sé stante, non esiste, ma bensì è un delta di forza elettrica dovuto al fatto che spazio e tempo sono relativi? La visione giusta è la seconda, anche se formalmente, o matematicamente, poco cambia.

App. 1-Par. 4.2: Il quadrivettore densità di corrente.

Si hanno ovviamente le seguenti equazioni sulla densità di carica:

$$\rho_0 = \frac{dQ}{dt_0}, \quad \rho = \frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{\sqrt{1 - \beta^2} dt_0} = \gamma \rho_0$$

Si noti poi che vale la seguente equazione che testimonia anche l'invarianza della carica elettrica: $\rho_0 dt_0 = \rho d\tau$.

Sappiamo poi dalla fisica che la densità di corrente vale $\vec{j} = \rho \vec{v}$.

Viene allora spontaneo definire il quadrivettore densità di corrente nel seguente modo:

$\underline{j} = (\vec{j}, \rho c) = (\gamma \rho_0 \vec{v}, \gamma \rho_0 c)$; si noti la similitudine con il quadrivettore momento-energia:

$\underline{p} = (\vec{p}, mc) = (\gamma m_0 \vec{v}, \gamma m_0 c)$. Si ha poi:

$|\underline{j}|^2 = |\vec{j}|^2 - j_4^2 = -\rho_0^2 c^2$ e inoltre, potendo applicare le Trasformazioni di Lorentz ad un quadrivettore, come detto allo

App.1-Par. 1.5 – eq. (A1.12), si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} j'_1 = j_1 - \beta j_4 \\ j'_2 = j_2 \\ j'_3 = j_3 \\ j'_4 = -\beta j_1 + j_4 \end{array} \right. \quad \text{oppure anche:} \quad \left\{ \begin{array}{l} j'_x = \gamma(j_x - \rho V) \\ j'_y = j_y \\ j'_z = j_z \\ \rho' = \gamma(\rho - \frac{V}{c^2} j_x) \end{array} \right. \quad (\text{A4.6})$$

con $\beta = V/c$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Adesso, al fine di mostrare con i quadrivettori e in modo più compatto quanto esposto all' App.1-Par. 4.2, consideriamo un filo percorso da corrente stazionaria I in un riferimento k e sia I diretta lungo x ; se in tale sistema si pone una carica q con velocità v lungo x , si ottiene un movimento di q ad opera del solo campo B , poiché $E=0$, in quanto, in media, vi sono in un conduttore tante cariche positive quante sono quelle negative. Se però ci poniamo ora in un sistema k' che si muove con velocità $V=v$ rispetto a k , in k' q è ferma ed in teoria dovrebbe scomparire la forza magnetica; ma ciò è contrario al Principio di Relatività (vedi Introduzione). Deve quindi comparire in k' un campo elettrico; infatti:

$\underline{j} = \underline{j}_+ + \underline{j}_- \quad , \quad \underline{j}_+ = (\vec{j}_+, c\rho_+) = (0, nqc) \quad [n] = [\text{numero di } q \text{ coinvolte}/m^3] \text{ e}$

$\underline{j}_- = (\vec{j}_-, c\rho_-) = (-nqv, -nqc) \quad , \text{ il primo termine qui è negativo perché il verso di } v \text{ è opposto a quello convenzionale di } I \text{ (in quanto qui } q < 0) \text{ ed il secondo termine anche è negativo, sempre perché qui } q < 0.$

Per le Trasformazioni di Lorentz (A1.12) si ha allora ($v=V$):

$$j'_{+x} = -\gamma qV \quad j'_{-x} = \gamma(-nqv + nqV)$$

$$\rho'_+ = \gamma q \quad \rho'_- = \gamma(-nq + nq \frac{vV}{c^2})$$

ed essendo ora $\rho'_+ \neq -\rho'_-$, deve comparire un campo elettrico.

App. 1-Par. 4.3: Il tensore del campo elettromagnetico.

Premessa sui tensori:

Un vettore è un tensore di rango 1.

Per noi, poi, è sufficiente dire che ottengo un tensore di rango 2 quando eseguo il prodotto delle componenti di due vettori c e b:

$$c(c_i) = (c_1, c_2, c_3, c_4), \quad b(b_k) = (b_1, b_2, b_3, b_4) \rightarrow A_{ik} = c_i b_k$$

Con le (A1.16) e (A1.17) abbiamo visto come esprimere le Trasformazioni di Lorentz:

$$c_i = \alpha_i^l c'_l \quad (i, l=1,2,3,4) \quad \text{e} \quad b_k = \alpha_k^m b'_m \quad (k, m=1,2,3,4) \quad \text{e dunque:}$$

$$A_{ik} = c_i b_k = \alpha_i^l \alpha_k^m c'_l b'_m = \boxed{\alpha_i^l \alpha_k^m A'_{lm}} = A_{ik} \quad (\text{A4.7})$$

che è la legge di trasformazione di un tensore di rango 2.

Notiamo poi che si ottiene un tensore di rango 2 anche derivando le componenti di un vettore b rispetto alla coordinata x:

$$b_i = \alpha_i^l b'_l, \quad x'_m = \alpha_m^k x_k \gg \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} \rightarrow \alpha_m^k$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_k} = \frac{\partial b_i}{\partial x'_m} \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_m} (\alpha_i^l b'_l) \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} = \boxed{\alpha_i^l \alpha_m^k} \frac{\partial b'_l}{\partial x'_m}; \quad \text{dunque, tale derivata si trasforma come le componenti di un}$$

tensore 2, dunque è un tensore 2.

Premessa sull'elettromagnetismo:

sappiamo dall'elettromagnetismo che i campi elettrico e magnetico (vettore induzione B) possono essere espressi in funzione dei potenziali elettrodinamici φ ed $\vec{A}$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad (\text{A4.8})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A4.9})$$

$$\text{e conosciamo anche la Condizione di Lorenz: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (\text{A4.10})$$

$$\text{nonché l'Eq. di Continuità: } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\text{A4.11})$$

Sempre dall'elettromagnetismo sappiamo inoltre che:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} = \square \varphi \quad \text{e} \quad (\text{A4.12})$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} = \square \vec{A} \quad (\text{A4.13})$$

e ricordiamo che già definimmo il quadrivettore densità di corrente j:

$$\underline{j} = (\vec{j}, c\rho) = (j_x, j_y, j_z, c\rho) \quad (j_i = v_i \rho).$$

Viene ora spontaneo definire il Quadrivettore Potenziale o Quadripotenziale $\underline{\Phi}$:

$\underline{\Phi} = (A_x, A_y, A_z, \frac{\varphi}{c})$; infatti, così facendo, le (A4.12) e (A4.13) si possono così riassumere:

$\square \Phi_k = -\mu j_k$ e definendo la quadridivergenza $div_4 = \vec{\nabla}_4 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial(ct)} = (\vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial(ct)})$ si ha anche,

banalmente: $\vec{\nabla}_4 \underline{j} = 0$ per l'Equazione di Continuità (A4.11) e $\vec{\nabla}_4 \underline{\Phi} = 0$ per la Condizione di Lorenz (A4.10).

Ora, dalle (A4.8) e (A4.9) si ha:

$$B_x = B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \quad E_x = E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = c\left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4}\right) \text{ ecc; quindi E e B non sono}$$

esprimibili tramite due quadrivettori, ma sono esprimibili insieme tramite un quadritensore di rango 2, in quanto dimostrammo che la derivata di un vettore è un tensore 2:

$F_{ik} = c\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\right)$; scriviamo ora le componenti di F_{ik} in forma matriciale:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -E_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -E_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}, \text{ e con la (A4.7) abbiamo dimostrato che } F_{ik} \text{ si trasforma nel seguente}$$

$$\text{modo: } F'_{ik} = \alpha_i^l \alpha_k^m F'_{lm}.$$

(A4.14)

Si noti che F_{ik} è antisimmetrico, cioè $F_{ik} = -F_{ki}$.

Ovviamente, poi:

$$F'_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB'_z & -cB'_y & -E'_x \\ -cB'_z & 0 & cB'_x & -E'_y \\ cB'_y & -cB'_x & 0 & -E'_z \\ E'_x & E'_y & E'_z & 0 \end{pmatrix}$$

Ricordando ora che a secondo membro della (A4.14) è sottintesa la sommatoria su l ed m, che sono infatti ripetuti, e sviluppando appunto tale equazione, otteniamo le trasformazioni del campo elettromagnetico:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + VB'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - VB'_y) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z) \\ B_z = \gamma(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y) \end{array} \right.$$

nonché le sue inverse:

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - VB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + VB_y) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{V}{c^2} E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{V}{c^2} E_y) \end{array} \right.$$

App. 1-SUBAPPENDICI:

App. 1-Subapp. 1: Trasformazioni di Lorentz consecutive.

$\mathbf{k} \gg V \gg \mathbf{k}' \gg W \gg \mathbf{k}''$

Abbiamo tre sistemi di riferimento k , k' e k'' e V e W sono le rispettive velocità relative.

Con le seguenti notazioni: $\beta_1 = \frac{V}{c}$, $\beta_2 = \frac{W}{c}$, $\gamma_1 = 1/\sqrt{1-\beta_1^2}$, $\gamma_2 = 1/\sqrt{1-\beta_2^2}$, $U = \frac{V+W}{1+\frac{VW}{c^2}}$ e $\beta = \frac{U}{c}$

si ha, per le T. di Lorentz applicate consecutivamente:

$$x = \gamma_1(x' + Vt') \quad \text{con} \quad t = \gamma_1(t' + \frac{\beta_1}{c}x') \quad \text{e}$$

$$x' = \gamma_2(x'' + Wt'') \quad \text{con} \quad t' = \gamma_2(t'' + \frac{\beta_2}{c}x'') \quad \text{e, per sostituzione:}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1\gamma_2(x'' + Wt'' + Vt' + \beta_1\beta_2x'') = \gamma_1\gamma_2[(1 + \beta_1\beta_2)x'' + (V + W)t''] = \\ &= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2)(x'' + \frac{V+W}{1 + \beta_1\beta_2}t'') = x \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\text{e analogamente: } t = \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2)(t'' + \frac{1}{c^2} \frac{V+W}{(1 + \beta_1\beta_2)}x''); \quad (\text{A.1.2})$$

ora notiamo che si ha:

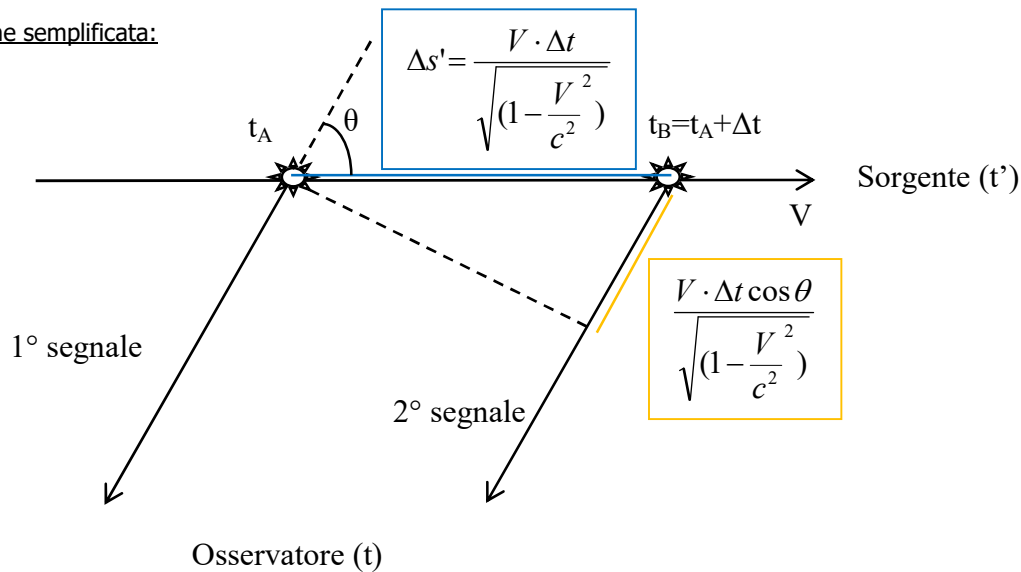
$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) &= 1/\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)/(1+\beta_1\beta_2)^2} = 1/\sqrt{[1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2)]/(1+\beta_1\beta_2)^2} = \\ &= 1/\sqrt{1 - [(\beta_1 + \beta_2)/(1 + \beta_1\beta_2)]^2} = 1/\sqrt{1 - U^2/c^2} = \gamma, \text{ e quindi le (A.1.1) e (A.1.2) si riscrivono così:} \end{aligned}$$

$$x = \gamma(x'' + Ut'') \quad \text{con} \quad t = \gamma(t'' + \frac{U}{c^2}x'') = \gamma(t'' + \frac{\beta}{c}x'') \quad , \text{ dunque, invece di compiere due T. di}$$

Lorentz (γ_1, V e γ_2, W), se ne compie solo una, ma utilizzando γ ed U .

App. 1- Subapp. 2: Effetto Doppler (relativistico) Trasversale.

Trattazione semplificata:



Tra l'istante t_A in cui viene emesso un segnale e l'istante t_B trascorre, per l'osservatore sulla Terra, il tempo Δt . Ora, per la sorgente in movimento corrisponde un tempo $\Delta t' = t'_B - t'_A$:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \text{ ed una distanza percorsa, tra A e B, pari a: } \Delta s' = \frac{V \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \text{ L'intervallo in cui l'osservatore}$$

fermo riceve i due segnali emessi in A e B è dato da $\Delta t'$ + il tempo impiegato dal segnale, a velocità c , per percorrere la

differenza di cammino in giallo, ossia: $\frac{V \cdot \Delta t \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$; in totale:

$$\Delta t_{obs} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V \cdot \Delta t \cos \theta}{c \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta\right) ; \text{ adesso, se } \Delta t \text{ è preso come il tempo tra due}$$

fronti d'onda, allora si ha: $f = \frac{1}{\Delta t}$ e, conseguentemente: $f_{obs} = \frac{1}{\Delta t_{obs}}$ e infine:

$$f_{obs} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta\right)} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{V_r}{c}\right)}, \text{ con } V_r \text{ come velocità radiale. Se l'angolo } \theta=0, \text{ allora } V=V_r \text{ e ci si riduce}$$

all'effetto Doppler longitudinale, già trattato precedentemente, ossia:

$$f_{obs} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V_r^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{V_r}{c}\right)} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V_r}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{V_r}{c}}} = f \sqrt{\frac{1 - \frac{V_r}{c}}{1 + \frac{V_r}{c}}}. \text{ Se invece } \theta=\pi/2, \text{ allora } \cos \theta=0 \text{ e si ha:}$$

$$f_{obs} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta\right)} = f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad \text{ossia la formula per l'Effetto Doppler Trasversale, dove la differenza in}$$

frequenza è data unicamente dalla dilatazione del tempo e non più da effetti di allontanamento/avvicinamento.

Trattazione particolareggiata:

Rappresentiamo un'onda elettromagnetica che si propaga, tramite il suo campo elettrico E :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}; \text{ tale campo si propaga lungo } r \text{ e sappiamo che } |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ e } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ per cui:}$$

$$|\vec{k}| \lambda = \omega T, \text{ cioè: } |\vec{k}| = \omega \frac{T}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = |\vec{k}|; \quad (A.2.1)$$

$\underline{I} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ è evidentemente un invariante, ma è anche esprimibile come il prodotto di due quadri-vettori (evidentemente invarianti): (4-vettore posizione e 4-vettore d'onda) $\underline{I} = -\underline{r}(\vec{r}, ct) \cdot \underline{k}(\vec{k}, \omega/c)$.

Ricordiamo ora che, per la (A.2.1), $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ e consideriamo un'onda luminosa che si propaga in un sistema $k'(V)$ sul

piano x', y' e formante un angolo θ' con x' ; le componenti di $\vec{k}'$ saranno:

$$k'_1 = k' \cos \theta' = (\omega'/c) \cos \theta', \quad k'_2 = k' \sin \theta' = (\omega'/c) \sin \theta', \quad k'_3 = 0 \quad \text{e} \quad k'_4 = (\omega'/c) = k'.$$

Per le T. di Lorentz, si ha, invece, in un sistema k :

$$k_1 = \gamma(k'_1 + \beta k'_4), \quad k_2 = k'_2, \quad k_3 = k'_3 \quad \text{e} \quad k_4 = \gamma(k'_4 + \beta k'_1); \text{ ora, poichè anche } k_3=0, \text{ anche nel sistema } k \text{ il}$$

raggio si propaga su x,y; quindi, si ha: $\underline{k} = (\frac{\omega}{c} \cos \theta, \frac{\omega}{c} \sin \theta, 0, \frac{\omega}{c})$; calcoliamo ora dunque ω e θ : a tal proposito,

dalla trasformazione di k'_4 si ha: $\frac{\omega}{c} = \gamma(\frac{\omega'}{c} + \beta \frac{\omega'}{c} \cos \theta')$ oppure:

$$\omega = \omega' \frac{(1 + \beta \cos \theta')}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega' \gamma (1 + \beta \cos \theta') \quad (\text{A.2.2})$$

mentre dalla trasformazione di k'_1 si ha: $\frac{\omega}{c} \cos \theta = \gamma(\frac{\omega'}{c} \cos \theta' + \beta \frac{\omega'}{c})$ e tenendo conto della (A.2.2), si ha:

$$\cos \theta = \frac{\omega'}{\omega} \gamma (\cos \theta' + \beta) = \frac{(\cos \theta' + \beta)}{(1 + \beta \cos \theta')} \quad (\text{A.2.3})$$

Notiamo poi ancora che la trasformazione di k'_2 e la (A.2.2) ci danno:

$$\sin \theta = \frac{\omega'}{\omega} \sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{(1 + \beta \cos \theta')} \sin \theta' = \frac{\sin \theta'}{\gamma (1 + \beta \cos \theta')} \quad (\text{A.2.4})$$

e dalle (A.2.3) e (A.2.4) si ha ancora: $\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}$, che è poi anche la (A.2.4) con θ' e θ scambiati e con $(-\beta)$ al posto di β ; il tutto per la relatività del moto.

Supponiamo ora una sorgente ω' in quiete in un sistema $k'(\theta')$; allora, dalla (A.2.3) si ha:

$$\cos \theta' = \frac{(\cos \theta - \beta)}{(1 - \beta \cos \theta)} \quad (\text{utile per determinare subito } \theta \text{ da } \theta') \quad ((\text{A.2.3}) \text{ con } \theta' \text{ e } \theta \text{ scambiati e con } (-\beta) \text{ al posto di } \beta),$$

da cui, con un po' di calcolo:

$$(1 + \beta \cos \theta') = \frac{(1 - \beta^2)}{1 - \beta \cos \theta} \quad \text{e la (A.2.2) diviene:}$$

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (\text{A.2.5})$$

Qui ω' è la ω della sorgente in moto e $\omega' \neq \omega$. Dunque, se nel sistema k si vede arrivare la radiazione sotto un angolo $\theta = \pi$, significa che la radiazione proviene da destra, dal sistema k' in allontanamento lungo l'asse x , e si può dunque parlare di Effetto Doppler Longitudinale (Par. 3.5) ed in tal caso $\cos \theta = \cos \pi = -1$ e dalla (A.2.5) con sorgente in

$$\text{allontanamento } (\theta = \pi) \text{ si ha: } \omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (\text{A.2.6})$$

>>> $T = T' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$, mentre col sistema k' in avvicinamento ($\theta=0$ >>> $\cos \theta=1$), si ha:

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (\text{A.2.7})$$

>>> $T = T' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$, proprio come nel Par. 3.5.

Curiosità: sviluppando in serie di β ($\beta < 1$), le (A.2.6) e (A.2.7) si ottiene: $\omega \cong \omega'(1 - \beta)$ e $\omega \cong \omega'(1 + \beta)$ da cui:

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega'} = \frac{\Delta \omega}{\omega'} = \mp \beta, \quad \text{formula molto usata in astrofisica e cosmologia per il red shift (si ricorda poi che } \omega = 2\pi\nu \text{ e } \lambda\nu = c).$$

Per passare dal caso di emettitore in moto a quello di osservatore in moto e viceversa, basta poi scambiare β con $-\beta$ (V con $-V$) e ω' con ω . In ogni caso, quando c'è avvicinamento (o allontanamento) le formule per l'Effetto Doppler Relativistico longitudinale sono le stesse indipendentemente da chi dei due si avvicina.

Se il sistema k si vede invece arrivare la radiazione con $\theta = \pi/2$, dall'alto, allora possiamo parlare di Effetto Doppler Relativistico TRASVERSALE; in tal caso non si ha allontanamento o avvicinamento, ma l'unico effetto di tipo Doppler è imputabile alla sola dilatazione del tempo; infatti, anche dalla (A.2.5), con $\theta = \pi/2$, si ha: $\omega = \omega' \sqrt{1 - \beta^2}$.

Sviluppando, con $\beta \ll 1$, si ha: $\omega \cong \omega' (1 - \frac{\beta^2}{2})$ (secondo grado in β , dunque un effetto meno visibile del

longitudinale). Tale effetto fu osservato per la prima volta da Ives nel 1938 e confermò in pieno la teoria. Inoltre, la diversità tra θ' e θ conferma anche il fenomeno dell'ABERRAZIONE della luce, secondo cui se sei in moto vedi la luce giungerti sotto un angolo diverso, un po' come quando in viaggio in macchina vedi la pioggia cadere in obliquo sul parabrezza. E dalle (A.2.3) e (A.2.4) si ha:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{(\cos \theta' + \beta)}.$$

App. 1- Subapp. 3: Le trasformazioni della quadrivelocità.

Abbiamo definito all' App.1-Par. 2.2 il quadrivettore velocità:

$$\underline{v} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau} \right) = \left(\gamma \frac{dx_1}{dt}, \gamma \frac{dx_2}{dt}, \gamma \frac{dx_3}{dt}, \gamma \frac{dx_4}{dt} \right) = (\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, \gamma c) = (\gamma \vec{v}, \gamma c) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Applicando le T. di Lorentz, si ha: $u'_1 = \Gamma(u_1 - \beta u_4)$, $u'_2 = u_2$, $u'_3 = u_3$, $u'_4 = \Gamma(u_4 - \beta u_1)$;

ora, si noti che Γ è definito dalla V del sistema $0'$ in moto (e $\beta = V/c$), mentre γ si riferisce alla velocità v che la particella ha in 0 , e γ' alla v' che la particella ha in $0'$. Sostituendo ora agli u i valori corrispondenti:

$$\gamma' v'_x = \Gamma(\gamma v_x - \gamma V), \quad \gamma' v'_y = \gamma v_y, \quad \gamma' v'_z = \gamma v_z, \quad \gamma' c = \Gamma(\gamma c - \gamma \beta v_x);$$

$$\text{e dall'ultima si ha: } \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{V}{c^2} v_x)}, \quad (\text{A.3.1})$$

che sostituita nelle prime tre: $v'_x = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma(v_x - V)$, $v'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} v_y$, $v'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} v_z$ dà la trasformazione delle velocità. Nel

caso delle trasformazioni inverse, in luogo della (A.3.1) si avrà: $\frac{\gamma}{\gamma'} = \Gamma(1 + \frac{V}{c^2} v_x)$.

Segue dalla (A.3.1) che se la particella è in quiete in 0 ($v=0 \Rightarrow \gamma = 1$), allora $\gamma' = \Gamma$, da cui $v' = -V$, cioè in $0'$ la particella ha velocità $-V$ (ovvio).

App. 1- Subapp. 4: Le trasformazioni della quadriforza.

All' App.1-Par. 2.3 abbiamo introdotto la Forza di Minkowski, o quadriforza:

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = (\gamma \vec{f}, \frac{\gamma}{c} (\vec{f} \cdot \vec{v})) = (F_1, F_2, F_3, F_4).$$

Per le T. di Lorentz: $F'_1 = \Gamma(F_1 - \beta F_4)$, $F'_2 = F_2$, $F'_3 = F_3$, $F'_4 = \Gamma(F_4 - \beta F_1)$.

Introducendo ora in tali equazioni di trasformazione le componenti della Forza di Minkowski, si ottiene:

$$\gamma' f'_x = \Gamma(\gamma f_x - \frac{\beta}{c} \gamma (\vec{f} \cdot \vec{v})), \quad \gamma' f'_y = \gamma f_y, \quad \gamma' f'_z = \gamma f_z, \quad \gamma' (\vec{f}' \cdot \vec{v}') = \Gamma(\gamma (\vec{f} \cdot \vec{v}) - V \gamma f_x), \quad \text{da cui:}$$

$$f'_x = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma(f_x - \frac{\beta}{c} (\vec{f} \cdot \vec{v})), \quad f'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} f_y, \quad f'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} f_z, \quad (\vec{f}' \cdot \vec{v}') = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma((\vec{f} \cdot \vec{v}) - V f_x), \quad \text{che, per la (A.3.1)}$$

divengono:

$$f'_x = \frac{(f_x - \frac{\beta}{c} (\vec{f} \cdot \vec{v}))}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad f'_y = \frac{f_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad f'_z = \frac{f_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad (\vec{f}' \cdot \vec{v}') = \frac{(\vec{f} \cdot \vec{v}) - V f_x}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

che sono le equazioni di trasformazione della quadriforza.

App. 1- Subapp. 5: Il quadrivettore accelerazione e le trasformazioni delle accelerazioni.

Ovviamente, il quadrivettore accelerazione è definibile come segue:

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{x}}{d\tau^2} = \left(\frac{d^2 x_1}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_2}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_3}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_4}{d\tau^2} \right) = \frac{dv}{d\tau} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Per le prime tre componenti (spaziali) si ha: ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$a_\alpha = \frac{d}{dt}(\gamma v_\alpha) \frac{dt}{d\tau} = \gamma v_\alpha \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2 \frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{\dot{v}_\alpha}{1-\beta^2} + \frac{v_\alpha (v\dot{v})}{c^2 (1-\beta^2)^2}, \text{ in quanto:}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \gamma^3 \beta \dot{\beta} = \frac{\gamma^3 v \dot{v}}{c^2}. \text{ Riguardo invece } a_4:$$

$$a_4 = \frac{d}{dt}(\gamma c) \frac{dt}{d\tau} = c \gamma \frac{d\gamma}{dt} = \frac{c}{2} \frac{d\gamma^2}{dt} = c \gamma^4 \beta \dot{\beta} = \frac{(v\dot{v})}{c(1-\beta^2)^2} \text{ e dunque:}$$

$$\underline{a} = \left(\gamma \frac{d}{dt}(\gamma v), \frac{c}{2} \frac{d\gamma^2}{dt} \right) = \left(\gamma^2 \dot{v} + \gamma^4 \beta \dot{\beta} v, \frac{(v\dot{v})}{(1-\beta^2)^2} \right); \text{ si noti che nel sistema in cui la particella è a riposo } (v=0, \beta=0)$$

si ha: $a_1^{(0)} = \dot{v}_x, a_2^{(0)} = \dot{v}_y, a_3^{(0)} = \dot{v}_z, a_4^{(0)} = 0$, cioè la parte spaziale di $\underline{a}$ coincide con quella tridimensionale ordinaria. Si ha inoltre: $|\underline{a}|^2 = \dot{v}^2 > 0$ ed essendo $|\underline{a}|^2$ un invariante, la disegualianza è sempre verificata e $\underline{a}$ è dunque di tipo spazio.

Per giungere ora alle equazioni di trasformazione dell'accelerazione, di consideri che:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \text{ e } \dot{v}' = \frac{dv'}{dt'}; \text{ inoltre, } v_x = v_x(t) \text{ e } v'_x = v'_x(t') \text{ (coerentemente). Denominiamo poi:}$$

$$\beta_x = \frac{v_x}{c} \text{ e } \beta'_x = \frac{v'_x}{c}; \text{ otteniamo allora dalle (A1.18) che:}$$

$$\frac{dv_x}{dv'_x} = \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta \beta'_x)^2}, \frac{dv_y}{dv'_y} = \frac{1 - \beta(\beta'_y \frac{dv'_x}{dv'_y} - \beta'_x)}{\gamma (1 + \beta \beta'_x)^2} \text{ e } \frac{dv_z}{dv'_z} = \frac{1 - \beta(\beta'_z \frac{dv'_x}{dv'_z} - \beta'_x)}{\gamma (1 + \beta \beta'_x)^2}.$$

Da queste si ha poi:

$$dv_x = \frac{dv'_x}{\gamma^2 (1 + \beta \beta'_x)^2}, dv_y = \frac{dv'_y - \beta(\beta'_y dv'_x - \beta'_x dv'_y)}{\gamma (1 + \beta \beta'_x)^2} \text{ e } dv_z = \frac{dv'_z - \beta(\beta'_z dv'_x - \beta'_x dv'_z)}{\gamma (1 + \beta \beta'_x)^2};$$

dividendo ora tali relazioni con la seguente nota relazione (delle T. di Lorentz) $dt = \gamma(dt' + \frac{\beta}{c} dx')$, si ha:

$$a_x = \frac{1}{\gamma^3 (1 + \beta \beta'_x)^3} a'_x, a_y = \frac{a'_y + \beta(\beta'_x a'_y - \beta'_y a'_x)}{\gamma^2 (1 + \beta \beta'_x)^3} \text{ e } a_z = \frac{a'_z + \beta(\beta'_x a'_z - \beta'_z a'_x)}{\gamma^2 (1 + \beta \beta'_x)^3}$$

che sono appunto le equazioni di trasformazione dell'accelerazione.

Notiamo, per ultimo, che tali equazioni contengono la velocità; quindi, se l'accelerazione tridimensionale è costante in un sistema di riferimento inerziale, varierà nel tempo in tutti gli altri!



THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY

A COMPLETE TREATISE WITH THE SPECIAL THEORY OF RELATIVITY

by *Leonardo Rubino*

May 1993 - November 2025

Abstract: A complete treatise of the Relativity, including the Special Theory of Relativity.

Contents:

- Contents.
- Introduction.
- Chapter 1: Preamble on Geometry.
 - Par. 1.1: Formalism, lengths of arcs and areas of curved surfaces.
 - Par. 1.2: Base differential Geometry.
 - Par. 1.3: Space differential Geometry.
- Chapter 2: The main quantities in the Theory of General Relativity.
 - Par. 2.1: Introductory concepts on General Relativity.
 - Par. 2.2: On the metric tensor and other main quantities.
 - Par. 2.3: On the Lorentz Transformation in the General Relativity.
 - Par. 2.4: The Energy-Momentum 4-vector and the Energy-Momentum Tensor.
 - Par. 2.5: Relativistic Hydrodynamics.
 - Par. 2.6: The geodesic Equation.
 - Par. 2.7: The relation between $g_{\mu\nu}$ and $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$.
 - Par. 2.8: The Newtonian limit.
 - Par. 2.9: The Riemann-Christoffel Curvature Tensor.
- Chapter 3: The Einstein's Equations of the Gravitational Field.
 - Par. 3.1: The ten Einstein's Equations of the Gravitational Field.
- Chapter 4: Classic tests of Einstein's theory.
 - Par. 4.1: The metric.
 - Par. 4.2: The Schwarzschild's Solution.
 - Par. 4.3: The general equations of motion.
 - Par. 4.4: The deflection of light by the Sun.
 - Par. 4.5: An alternative calculation of the deflection, with profiles of antagonism to GTR.
 - Par. 4.6: The precession of the perihelion of planets.
 - Par. 4.7: Gravitational waves from the Einstein's Equations.
- Chapter 5: Deduction of the Cosmological Equations of Friedmann from the Einstein's G.F. Equations. The Robertson-Walker Metric.
- APPENDIXES.
- Appendix 1: The Special Theory of Relativity.

Simplicity is the closest thing to intelligence.

Introduction.

The General Theory of Relatività (GTR) is an extension of the Special Theory of Relativity (or Restricted) (STR); it was necessary for Einstein to explain the Gravitation. The word gravity reminds the word acceleration; in fact, we will see in Par. 2.1 that where there is an acceleration, rotation and gravity with a reference system, the metric is not simple anymore as in STR. Moreover, the GTR explains gravity as a curvature of the space, or better of the space-time (mathematic space-time, in the opinion of the writer) caused by matter (and by the energy!) which is in such space-time. It's like when, for instance, you put a ball of lead on a mattress: around the sphere you have a funnel-like hollow and there, the mattress is curved. Then, we can say that in such an area where the mattress is curved is the gravitational field of the ball of lead. If now we throw a small ball over the mattress, and neglecting frictions, it will move uniformly on a straight line, over the flat side of the mattress until, as it approaches the curved hollow, it will fall towards the ball of

lead. Matter, in GTR, sees the space-time as a railway over which it can move; therefore, if this railway is curved, the trajectories followed by the matter will be curved.

Then, if the ball of lead is so heavy that it completely sinks into the mattress, then the funnel will become like a closed bag and we would call it a black hole, and from it nothing would come out, not even light. In the GTR the Equivalence Principle holds, according to which a gravitational field can be cancelled by an acceleration and so it is not possible to absolutely tell an acceleration from a gravitational field. In fact, let us consider the Einstein Elevator, in which a guy, standing stopped at a floor, rests with his weight on the floor of the elevator; if now we cut the cable holding the elevator, it will start a free falling in the terrestrial gravitational field and the guy inside will float as if in a space ship where there is no gravity, as he is falling with the elevator and with its floor and this floor will always fall under his feet. Therefore, an acceleration, that of the free falling, has cancelled the gravitational effect; and, at the same time, when the elevator is stopped, the guy inside it, instead of thinking that he was standing in a gravitational field (as he is resting on the floor of the elevator) could have thought that there weren't any gravitational fields, but that the elevator was accelerating upwards, so pushing the soles of his shoes.

Gravity slows down the time! On a mountain time elapses faster than down in the valley. Of course, on the Earth, the difference is imperceptible, but on a neutron star or in a black hole, that effect is very strong.

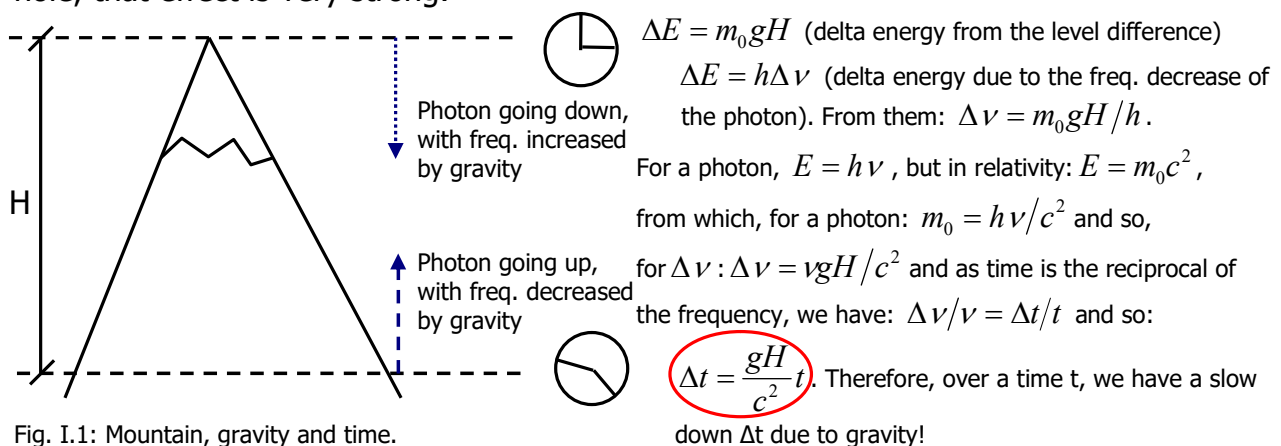


Fig. I.1: Mountain, gravity and time.

Now, let's move the source/detector device from the mountains to an elevator:

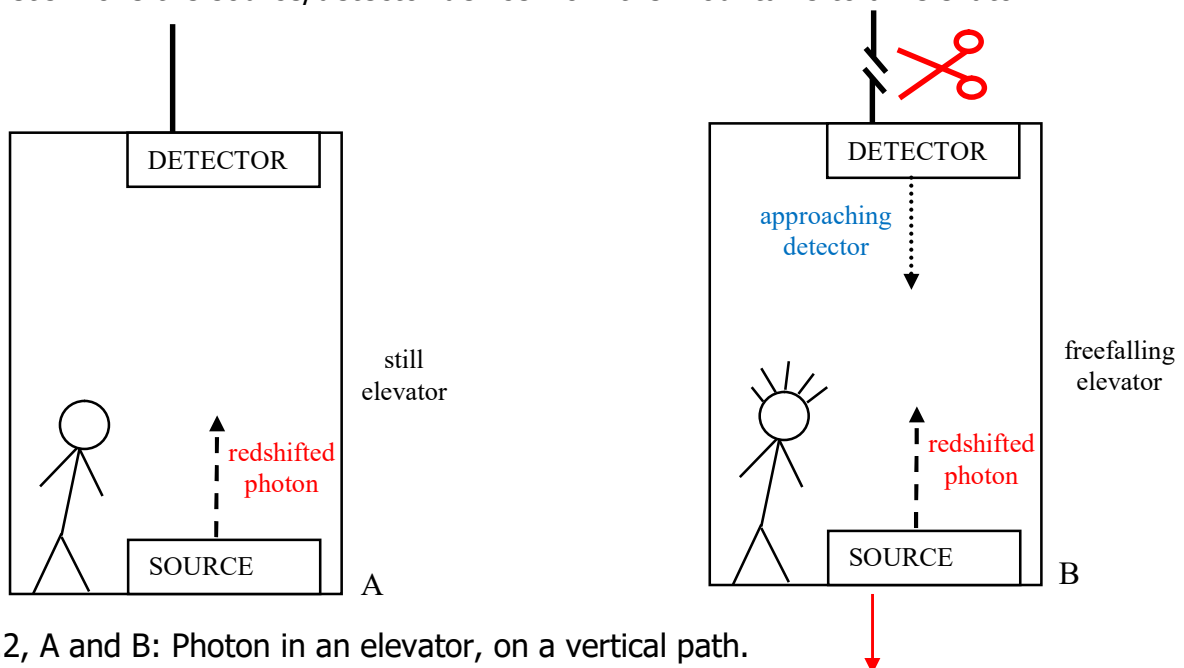


Fig. I.2, A and B: Photon in an elevator, on a vertical path.

-Fig. I.2 A: the photon finds hard the climbing because of the gravitational redshift of the Earth.

-Fig. I.2 B: when the cable is cut, the falling observer doesn't feel anymore the gravitational pull, because of the free fall, so the photon doesn't experience any shift and the same situation, by principle, should be seen by the observer on the ground; in fact, he still detects the existence of the gravitational pull (redshift), but simultaneously there is an approaching-like blueshift of the detector towards the climbing photon, with a mutual compensation.

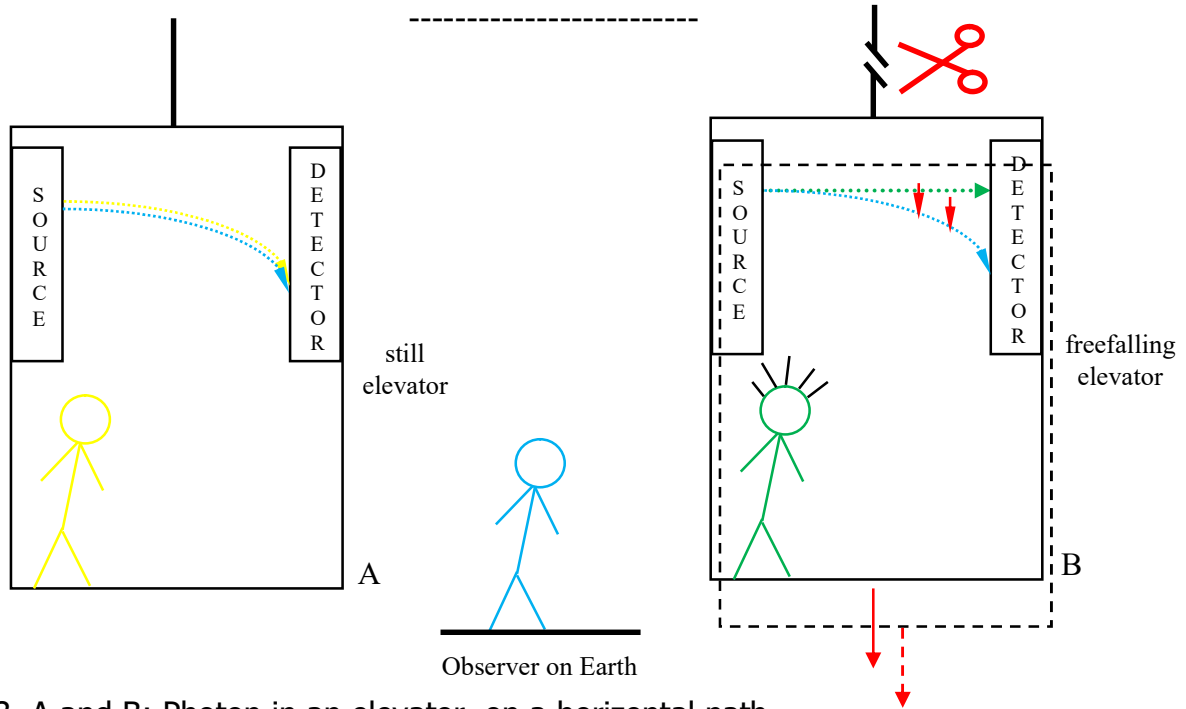


Fig. I.3, A and B: Photon in an elevator, on a horizontal path.

-Fig. I.3 A: the observer in the still elevator sees the photon bending downwards because of the gravitational pull. The same is seen by the observer on the ground on the Earth surface.

-Fig. I.3 B: the cable is then cut and the free falling cancels the gravitational pull for the falling observer: the photon goes straight ahead. The observer on the ground is in a gravitational context and sees the photon starting from a higher altitude and arriving at a lower one, so it bends! Gravity bends the light! On the other hand, while the photon bends downwards, the detector goes down, so that also the observer on the ground, if in an elevator/photon context, in the end thinks it's like if the photon went straight ahead.

Through the example of the mattress we have just introduced the concept of the (mathematical) space-time curvature, caused by the matter/energy. The tensor equation, which will be here proved, and which shows the correspondence between the matter/energy and the curvature indeed, is the Einstein Gravitational Field tensor Equation:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Its left side, all in R, shows the “curvature radius” and the geometric characteristics of the space in which the matter/energy is, and the measure of such a matter/energy is, on the contrary, given by the right side, through the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$, that, as we will see, in some of its components, is proportional to the density ρ etc.

The Newton classic gravitational equation shows a correspondence between geometrical characteristics and the presence of matter:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad m\vec{a} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow$$

$$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

in fact, the left side of the last equation, that is $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, that is the second derivative of the space position, over the time, is a geometric characteristic of the space indeed, while the right side $-G \frac{M}{r^2} \hat{r}$ tells us about M!

Since the time when it was born, officially in 1916, the GTR has been always seen by many people with suspects, as it's full of complexity, mathematical as well as conceptual; so, thinking that so many hypothesis and relevant calculations can lead to equations which stick to reality, sometimes led some critics to hold it as a weird theory.

Classic tests in Chapt. 4 are encouraging in the opposite direction, even though also there the preambles, the suppositions and calculations are a lot, and then, for instance, in the calculation of the deflection of the light of stars by the Sun, during an eclipse in 1919, the accuracy of the measurement was very close to the result. Moreover, there are also alternative explanations and in competition with the GTR, to explain the deflection of light and the precession of the perihelion of planets.

In the opinion of the writer, GTR is for sure a beautiful physical-mathematical theory, mathematical more than physical, maybe the most beautiful, but it's also true that it has somewhat weird concepts inside. I think that the GTR is the typical falsifiable Popper-like theory, like if it were an interpretative model which works to explain many phenomena, but that it's not the real essence of the phenomena just explained. And then, provided that the geometric interpretation of the curvature is real, we should still explain why the matter causes it; ok, it causes that, but why? To see is not the same as to explain and justify.

In the GTR, the gravity is just attractive and Einstein, in his Theory of Unified Fields (let's sum up a bit, out of brevity) after having used the concept of curvature in the GTR to explain the gravitational pull, also used the concept of torsion to try to explain also the repulsive forces of the electricity. All this unfortunately without success, that is, his unitary field equations (maybe 33) couldn't be proved in the real Universe. Therefore, Einstein work didn't finish with the GTR; in fact, he died in 1955 in a bed in a Hospital, with paper and pen in his hands!

I personally think the force of gravity is a macroscopic force which is made of microscopic and electric forces among particles, positive and negative, which make the Universe, and that can be considered as randomly spread.

Chapter 1: Preamble on Geometry.

Par. 1.1: Formalism, lengths of arcs and areas of curved surfaces.

the sphere and the circle:

with reference to figure 1, we want to represent through a formula the surface of a sphere Σ :

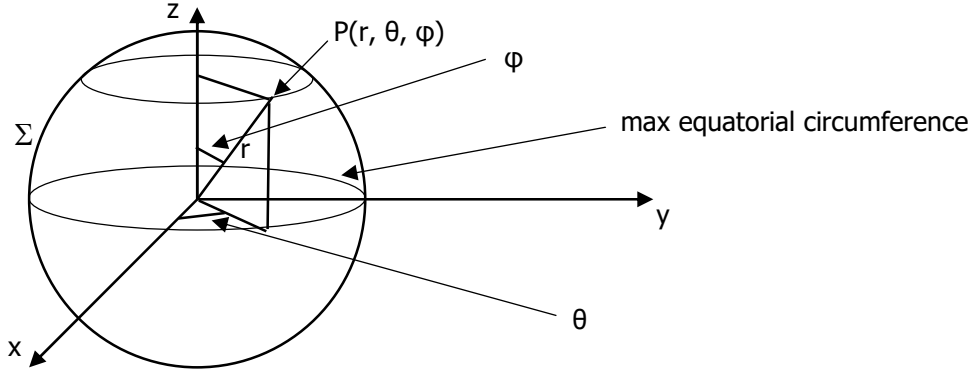


Fig. 1.1: The Sphere.

In Cartesian coordinates, we just use the Pythagorean Theorem to get such a formula:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (1.1)$$

On the contrary, with the more friendly spherical coordinates, we have, very easily and intuitively:

$$\vec{\tau}_\Sigma = (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + (r \cos \varphi) \hat{z} \quad (1.2)$$

where, of course, $\vec{\tau}_\Sigma$ is the vector which describes (by moving) all the surface of the sphere. We see that the components are a function of two parameters (θ e φ).

Of course, in the simpler case of a circle γ , we would have:

$$\vec{\tau}_\gamma = (r \cos \theta) \hat{x} + (r \sin \theta) \hat{y} \quad (1.3)$$

and here we see that the components are a function of just one parameter (θ), if $r = \text{const.}$

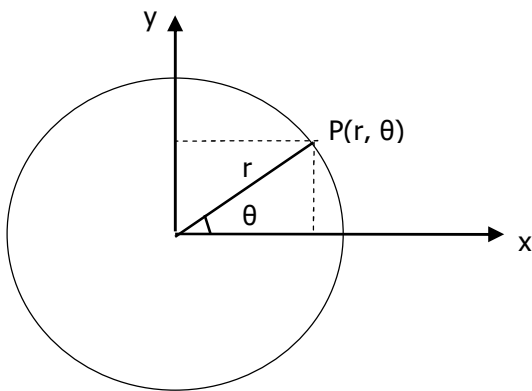


Fig. 1.2: The Circle.

(1.2) and (1.3) can therefore be written in a more general form, as functions of respectively 2 and 1 parameters:

$$\vec{\tau}_\Sigma = \tau_1(u, v) \hat{x} + \tau_2(u, v) \hat{y} + \tau_3(u, v) \hat{z} \quad (u, v = \theta, \varphi \text{ and } r = r(u, v)) \quad (1.4)$$

$$\vec{\tau}_\gamma = \tau_1(u) \hat{x} + \tau_2(u) \hat{y} \quad (u = \theta \text{ and } r = r(u)) \quad (1.5)$$

Of course, if in (1.4) and (1.5) all the τ_i don't have the expressions they have in (1.2) and (1.3), but they have other ones, generic ones, then they (still (1.4) and (1.5)) can represent not anymore the sphere and the circle, but other generic surfaces and curves. Now, if we get a bit closer to the Cartesian coordinates, $(x,y)=(x,f(x))$, we make in (1.5) a change of parameter ($u \gg x$) so that we then have:

$$\vec{\tau}_\gamma = \tau_1(u)\hat{x} + \tau_2(u)\hat{y} = x\hat{x} + f(x)\hat{y} \quad (1.6)$$

We will so consider (1.4) as the general expression for a surface and (1.6) that of a curve.

length of an arc on a curve:

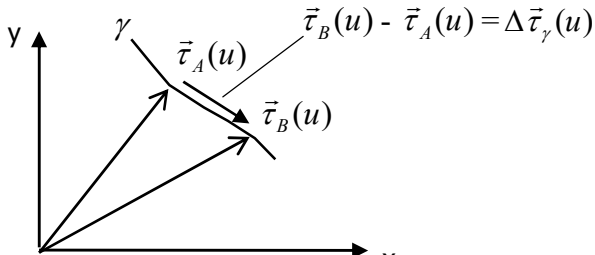


Fig. 1.3: Length of an arc.

With reference to figure 1.3, if $\vec{\tau}_B(u)$ tends to $\vec{\tau}_A(u)$, then $\Delta\vec{\tau}_\gamma(u)$ will become a $d\vec{\tau}_\gamma(u)$; not only; it will correspond to the infinitesimal arc $d\vec{l}$ on γ . We can so write that: $d\vec{l} = d\vec{\tau}_\gamma(u)$, from which:

$$l = \int_{l(A-B)} |d\vec{l}| = \int_{l(A-B)} |d\vec{\tau}_\gamma(u)| = \int_{l(A-B)} |\vec{\tau}'_\gamma(u)| du = \int_{l(A-B)} \sqrt{\left[\left(\frac{d\tau_1(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\tau_2(u)}{du}\right)^2\right]} du = \int_{l(A-B)} \sqrt{1 + f'^2(x)} du \quad (1.7)$$

and we also see from the vectorial composition in Fig. 1.3, that $d\vec{\tau}_\gamma(u)$ is tangent to γ , as it meets it just in one point, and therefore the vector

$$\vec{t} = \frac{d\vec{\tau}_\gamma(u)}{du} \quad (1.8)$$

is tangent to γ .

area of a curved surface:

Let's consider again (1.4), and we report it here again: $\vec{\tau}_\Sigma = \tau_1(u,v)\hat{x} + \tau_2(u,v)\hat{y} + \tau_3(u,v)\hat{z}$.

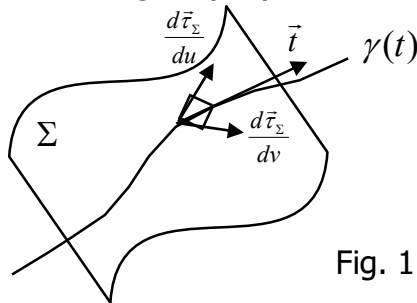


Fig. 1.4: Small area on a curved surface.

Now, with reference to Figure 1.4, we have a curved surface Σ , indeed, and a curve $\gamma(t)$ on it.

Of course, if I want to say that the curve $\gamma(t)$ is really on Σ , then both parameters u and v of Σ must be a function of the only parameter t of $\gamma(t)$.

Now, we know from (1.8) that the derivative of the vector $\vec{r}_\gamma$ which represents a curve, over its parameter t , yields the tangent vector $\vec{t}$, to the curve. By the same token, then the derivative of the vector $\vec{r}_\Sigma$ which represents the surface Σ yields a vector $\vec{t}$ tangent to the surface itself, and if the derivative is calculated on the parameter t of the curve $\gamma(t)$ which lies on Σ , then, of course, such a tangent vector will be also the tangent of the curve $\gamma(t)$. Such a relationship can be analytically shown by seeing the two parameters u and v as functions of the parameter t of the curve: $u = u(t)$ and $v = v(t)$.

Then, the tangent to the curve $\gamma(t)$ will be:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}_\Sigma}{dt} = \frac{d\vec{r}_\Sigma}{du} \frac{du}{dt} + \frac{d\vec{r}_\Sigma}{dv} \frac{dv}{dt} \quad (1.9)$$

So, still with reference to Figure 1.4, for the (1.9) we see that the tangent vector $\vec{t}$ and vectors $\frac{d\vec{r}_\Sigma}{du}$ and $\frac{d\vec{r}_\Sigma}{dv}$ lie on the same plane, as they are a three element composition, as well as in the figure, indeed. Now, as the vector product of two vectors (modulus = product of moduli by the sine of the angle between them) yields a vector again, which is normal to the original vectors, then, in order to obtain the vector normal to the surface Σ we carry out the vector product between $\frac{d\vec{r}_\Sigma}{du}$ and $\frac{d\vec{r}_\Sigma}{dv}$ and if, then, I also want the versor $\hat{n}$ (unitary modulus) I will divide by the modulus of the normal vector:

$$\hat{n} = \frac{\frac{d\vec{r}_\Sigma}{du} \times \frac{d\vec{r}_\Sigma}{dv}}{\left| \frac{d\vec{r}_\Sigma}{du} \times \frac{d\vec{r}_\Sigma}{dv} \right|} \quad (\text{normal versor}) \quad (1.10)$$

For what the area of a surface (in general) is concerned, we know from the elementary geometry that the area of a trapezium is given by the product of both sides by the sine of the angle formed by them, and if we also remind the definition of vector product above reported, we can then say that the small area $d\Sigma$ delimited by the two small vectors $\frac{d\vec{r}_\Sigma}{du}$

and $\frac{d\vec{r}_\Sigma}{dv}$ (Fig. 1.4) is:

$$d\Sigma = \left| \frac{d\vec{r}_\Sigma}{du} \times \frac{d\vec{r}_\Sigma}{dv} \right|, \text{ from which, by integration over all } u \text{ and } v:$$

$$\Sigma = \int_{\Sigma} d\Sigma = \iint_{u-v} \left| \frac{d\vec{r}_\Sigma}{du} \times \frac{d\vec{r}_\Sigma}{dv} \right| du dv \quad (1.11)$$

Par. 1.2: Base differential Geometry.

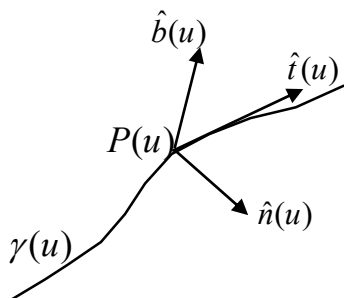


Fig. 1.5: Fundamental Trihedron.

We saw with (1.8) that the vector $\vec{t}(u) = \frac{d\vec{\tau}_\gamma(u)}{du} = \vec{\tau}'_\gamma(u)$ is tangent to the curve $\gamma(u)$. As we want a versor $\hat{t}$ (unitary modulus), we'll have:

$$\hat{t}(u) = \frac{\vec{\tau}'_\gamma(u)}{|\vec{\tau}'_\gamma(u)|} \quad (\text{tangent versor}) \quad (1.12)$$

So, still with (1.8) we saw that the derivation operation yields a normal vector. Now, we derive the (1.12), so getting the normal versor $\hat{n}(u)$:

$$\hat{n}(u) = \frac{d}{du} \hat{t}(u) \quad (\text{normal versor}) \quad (1.13)$$

At last, we define the binormal versor $\hat{b}(u)$, of course in the following way, by using the vector product:

$$\hat{b}(u) = \hat{t}(u) \times \hat{n}(u) \quad (\text{binormal versor}) \quad (1.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{t}(u) = \frac{\vec{\tau}'_\gamma(u)}{|\vec{\tau}'_\gamma(u)|} \\ \hat{n}(u) = \frac{d}{du} \hat{t}(u) \quad (\text{fundamental trihedron with generic parameter } u) \\ \hat{b}(u) = \hat{t}(u) \times \hat{n}(u) \end{array} \right. \quad (1.15)$$

We saw through (1.7) that the length of an arc is:

$$s(u) = \int_{s(A-B)} |d\vec{s}| = \int_{s(A-B)} |d\vec{\tau}_\gamma(u)| = \int_{s(A-B)} |\vec{\tau}'_\gamma(u)| du = \int_{u_0}^u |\vec{\tau}'_\gamma(u)| du \quad (1.16)$$

$$\text{from which: } s'(u) = \frac{ds}{du} = |\vec{\tau}'_\gamma(u)| .$$

If now, in the trihedron (1.15), we make a change of parameter ($u \gg s$, with s as an intrinsic parameter), we'll have:

$$\vec{\tau}'_\gamma(s) = \vec{\tau}'_\gamma[u(s)] = \frac{d\vec{\tau}_\gamma(u)}{du} \frac{du}{ds} = \vec{\tau}'_\gamma(u) \frac{1}{s'(u)} , \text{ from which:}$$

$$|\vec{\tau}'_\gamma(s)| = \frac{|\vec{\tau}'_\gamma(u)|}{|s'(u)|} = 1 . \quad \text{Then:}$$

$$\vec{\tau}''_\gamma(s) = \frac{\vec{\tau}''_\gamma(u) \frac{du}{ds} s'(u) - \vec{\tau}'_\gamma(u) s''(u) \frac{du}{ds}}{(s'(u))^2} = \frac{\vec{\tau}''_\gamma(u) - \vec{\tau}'_\gamma(u) s''(u) \frac{du}{ds}}{(s'(u))^2}$$

and so we get the fundamental trihedron in the intrinsic parameterization:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{t}(s) = \vec{\tau}'_\gamma(s) \\ \hat{n}(s) = \frac{\vec{\tau}''_\gamma(s)}{|\vec{\tau}''_\gamma(s)|} \quad (\text{fundamental trihedron with the intrinsic parameter } s) \\ \hat{b}(s) = \hat{t}(s) \times \hat{n}(s) = \frac{\vec{\tau}'_\gamma(s) \times \vec{\tau}''_\gamma(s)}{|\vec{\tau}''_\gamma(s)|} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

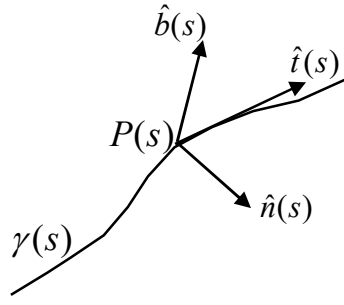


Fig. 1.6: Fundamental trihedron in the intrinsic parameterization.

Curvature and radius of curvature:

$|\bar{\tau}''_{\gamma}(s)|$ is zero for lines, while it is $\neq 0$ on circles etc.

$|\bar{\tau}''_{\gamma}(s)|$ is defined as CURVATURE of γ in $\bar{\tau}_{\gamma}(s)$.

$$\rho(s) = \frac{1}{|\bar{\tau}''_{\gamma}(s)|} \quad (1.18)$$

is the RADIUS OF CURVATURE.

Example on a circle (on the plane x-y):

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (z=0)$$

$x = r \cos \alpha = r \cos(\frac{s}{r})$, $y = r \sin \alpha = r \sin(\frac{s}{r})$, $z=0$ (where $s = \alpha r$ is the arc on the circle),

therefore: $\bar{\tau}_{\gamma}(s) = (x, y, z) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}), 0)$ from which:

$$\bar{\tau}'_{\gamma}(s) = \frac{d\bar{\tau}_{\gamma}(s)}{ds} = (x', y', z') = (-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}), 0) \text{ and so:}$$

$$\bar{\tau}''_{\gamma}(s) = \frac{d\bar{\tau}'_{\gamma}(s)}{ds} = (x'', y'', z'') = (-\frac{1}{r} \cos(\frac{s}{r}), -\frac{1}{r} \sin(\frac{s}{r}), 0) , \text{ from which, again:}$$

$$|\bar{\tau}''_{\gamma}(s)| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \frac{1}{r} \text{ (curvature)!!}$$

the torsion:

$\hat{b}'(s)$ is // to $\hat{n}(s)$; in fact:

$$\frac{d}{ds} \hat{b}(s) = \frac{d}{ds} (\hat{t}(s) \times \hat{n}(s)) = \frac{d}{ds} \hat{t}(s) \times \hat{n}(s) + \hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{n}(s) = \bar{\tau}''_{\gamma}(s) \times \hat{n}(s) + \hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{n}(s) = \hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{n}(s)$$

Now, we notice that as $\hat{n}(s)$ is a versor (modulus 1 constant), $\frac{d}{ds} \hat{n}(s)$ does not represent a variation of the modulus of $\hat{n}(s)$, that is, along its extension as a vector, but, as a consequence, it is just a normal to $\hat{n}(s)$ variation, so we can say that: $\frac{d}{ds} \hat{n}(s) \perp \hat{n}(s)$, and

as we are talking about an orthogonal trihedron, we also have that (of course)

$[\hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{n}(s)] // \hat{n}(s)$ and so it shows to be proportional to $\hat{n}(s)$:

$$\hat{b}'(s) = -\frac{1}{\tau(s)}\hat{n}(s); \quad (1.19)$$

$\frac{1}{\tau(s)}$ is the TORSION of γ in $\vec{\tau}_\gamma(s)$.

Now, there is a link between curvature and torsion and it's expressed by the following:

Frénet formulas:

from the first two of (1.17) and from (1.18) we have the following: $\hat{t}'(s) = \frac{1}{\rho(s)}\hat{n}(s)$. Then,

we have the (1.19):

$\hat{b}'(s) = -\frac{1}{\tau(s)}\hat{n}(s)$. Moreover, from the last of the (1.17) we get: $\hat{n}(s) = \hat{b}(s) \times \hat{t}(s)$ and so:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\hat{n}(s) &= \frac{d}{ds}(\hat{b}(s) \times \hat{t}(s)) = \hat{b}'(s) \times \hat{t}(s) + \hat{b}(s) \times \hat{t}'(s) = -\frac{1}{\tau(s)}\hat{n}(s) \times \hat{t}(s) + \hat{b}(s) \times \frac{1}{\rho(s)}\hat{n}(s) = \\ &= \frac{1}{\tau(s)}\hat{b}(s) - \frac{1}{\rho(s)}\hat{t}(s) \end{aligned}$$

from which we have the Frénet formulas:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{t}'(s) &= \frac{1}{\rho(s)}\hat{n}(s) \\ \hat{b}'(s) &= -\frac{1}{\tau(s)}\hat{n}(s) \\ \hat{n}'(s) &= \frac{1}{\tau(s)}\hat{b}(s) - \frac{1}{\rho(s)}\hat{t}(s) \end{aligned} \right. \quad (\text{Frénet formulas}) \quad (1.20)$$

Curio: a body moving along a curve can have a tangential acceleration a_t and a centrifugal one a_c , of course, and from physics we know it's v^2/r . Now, let's see if all the equations and all the formalism presented so far show this. We have:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}_\gamma(s)}{dt} &= \frac{d\vec{\tau}_\gamma(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{t}(s) \\ \frac{d^2\vec{\tau}_\gamma(s)}{dt^2} &= \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t}(s) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t}(s) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{\rho(s)} \hat{n}(s) = \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = a_t \hat{t}(s) + \frac{v^2}{\rho} \hat{n}(s). \end{aligned}$$

Par. 1.3: Space differential Geometry.

first fundamental form:

we saw through (1.4) that a surface can be represented as follows:

$\vec{\tau}_\Sigma = \tau_1(u, v)\hat{x} + \tau_2(u, v)\hat{y} + \tau_3(u, v)\hat{z}$, that is: $\vec{\tau}_\Sigma = \vec{\tau}_\Sigma(u, v)$ and in a differential form:

$$d\vec{\tau}_\Sigma = \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{du} du + \frac{d\vec{\tau}_\Sigma}{dv} dv = \vec{\tau}_u du + \vec{\tau}_v dv$$

So, let's define the 1st fundamental form for $\vec{\tau}_\Sigma(u, v)$ as follows:

$$I = d\vec{\tau}_\Sigma \cdot d\vec{\tau}_\Sigma = (\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_u) du^2 + 2(\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_v) dudv + (\vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_v) dv^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

where $E = (\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_u)$, $F = (\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_v)$, $G = (\vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_v)$

If now we make a change of parameters ($\vec{r}(u,v) \gg \vec{r}^*(\theta,\phi)$), we'll have a change in the coefficients E, F and G, but $I=I^*$:

$$I^*(d\theta, d\phi) = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = |d\vec{r}|^2 = |\vec{r}_\theta^* d\theta + \vec{r}_\phi^* d\phi|^2 = |\vec{r}_\theta^*(\theta_u du + \theta_v dv) + \vec{r}_\phi^*(\phi_u du + \phi_v dv)|^2 =$$

$$= |(\vec{r}_\theta^* \theta_u + \vec{r}_\phi^* \phi_u) du + (\vec{r}_\theta^* \theta_v + \vec{r}_\phi^* \phi_v) dv|^2 = |\vec{r}_u^* du + \vec{r}_v^* dv|^2 = |d\vec{r}|^2 = I(du, dv)$$

length of an arc:

we have an arc on $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$; (1.21)

here, we still see the two parameters u and v, typical for surfaces, but as we pointed out their common dependance from one single parameter t, then (1.21) is also the expression for a curve (on which the arc is). About the length s between a and b, we then have, of course:

$$s = \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^{1/2} dt = \int_a^b \left[(\vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}) (\vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}) \right]^{1/2} dt =$$

$$= \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \quad (1.22)$$

area A of the surface:

by the (1.11), we saw that $A = \iint_A |d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v| du dv$

Now, as the following vectorial identity holds: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$, then we have:

$|d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v|^2 = EG - F^2$ and so:

$$A = \iint_A |d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v| du dv = \iint_{u-v} \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (1.23)$$

-example 1: length of a circle:

we already saw through (1.2) that the sphere (Fig. 1.1) is represented by the following equation: $\vec{r} = (r \cos \theta \sin \phi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \phi) \hat{y} + (r \cos \phi) \hat{z}$.

If now we consider the maximum equatorial circle, (see Fig. 1.1), you can get it by putting $\phi=90^\circ$, from which:

$\vec{r} = (r \cos \theta) \hat{x} + (r \sin \theta) \hat{y} \dots (+0 \hat{z})$ and then we have a $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{r}(\theta(t), r(t))$, just like in (1.21), from which:

$$\vec{r}_\theta = -(r \sin \theta) \hat{x} + (r \cos \theta) \hat{y}$$

$$\vec{r}_r = -\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y},$$

$$E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2, \quad F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_r = -r \cos \theta \sin \theta + r \cos \theta \sin \theta = 0,$$

$$G = \vec{r}_r \cdot \vec{r}_r = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \text{ and so (1.22) yields } (r=\text{const} \rightarrow \frac{dr}{dt} = 0):$$

$$s = \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt = \int_a^b \left[E \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2F \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + G \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt =$$

$$= \int_a^b \left[E \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt = \int_a^b \sqrt{E} \frac{d\theta}{dt} dt = \int_a^b r \omega dt = r \omega T = r \frac{2\pi}{T} T = 2\pi r = C$$

that is really the length of a circle!!!

-example 2: the surface of the sphere:

we still consider the same sphere (Fig. 1.1), which, through (1.2), is shown by the following equation:

$\vec{r} = (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + (r \cos \varphi) \hat{z}$, from which:

$$\vec{r}_\theta = -(r \sin \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{y}$$

$$\vec{r}_\varphi = (r \cos \theta \cos \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \cos \varphi) \hat{y} - (r \sin \varphi) \hat{z}$$

$E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = r^2 \sin^2 \varphi$, $F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0$, $G = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = r^2$ and for the (1.23), we get:

$$\begin{aligned} A = \int_A dA &= \iint_{\theta-\varphi} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \iint_{\theta-\varphi} \sqrt{r^4 \sin^2 \varphi - 0} d\theta d\varphi = \iint_{\theta-\varphi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = \\ &= r^2 \int_{\theta} d\theta \int_{\varphi} \sin \varphi d\varphi = r^2 2\pi \left| -\cos \varphi \right|_0^\pi = r^2 2\pi \cdot 2 = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

That is really the surface of the sphere we all know!!!

second fundamental form:

let's write again the (1.10), which supplies a vector/versor $\vec{N}$ normal to the surface:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} ; \text{ we then have, of course: } |\vec{N}| = 1 \text{ and } 0 = d(1) = d(\vec{N} \cdot \vec{N}) = 2d\vec{N} \cdot \vec{N}, \text{ from}$$

$$\text{which: } d\vec{N} \perp \vec{N}. \quad (1.24)$$

If it's so, then $d\vec{N}$ lies on the surface, and so it can be expressed as follows (u,v):

$$d\vec{N} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} dv = \vec{N}_u du + \vec{N}_v dv \quad (1.25)$$

Now we can define the second fundamental form II:

$$\begin{aligned} II = -d\vec{r} \cdot d\vec{N} &= -(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{N}_u du + \vec{N}_v dv) = -\vec{r}_u \vec{N}_u du^2 - (\vec{r}_u \vec{N}_v + \vec{r}_v \vec{N}_u) dudv - \vec{r}_v \vec{N}_v dv^2 = \\ &= L du^2 + 2M dudv + N dv^2 \end{aligned}$$

properties of II:

as we have: $(\vec{r}_u, \vec{r}_v) \perp \vec{N}$, then $0 = (\vec{r}_u \cdot \vec{N})_u = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N} + \vec{r}_u \cdot \vec{N}_u$,

$$0 = (\vec{r}_u \cdot \vec{N})_v = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} + \vec{r}_u \cdot \vec{N}_v, \quad 0 = (\vec{r}_v \cdot \vec{N})_u = \vec{r}_{vu} \cdot \vec{N} + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_u, \quad 0 = (\vec{r}_v \cdot \vec{N})_v = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_v,$$

therefore: $\vec{r}_{uu} \cdot \vec{N} = -\vec{r}_u \cdot \vec{N}_u$, $\vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} = -\vec{r}_v \cdot \vec{N}_v$, $\vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} = -\vec{r}_u \cdot \vec{N}_v$, $\vec{r}_{vu} \cdot \vec{N} = -\vec{r}_v \cdot \vec{N}_u$ and so:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{N}, \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} \text{ from which:}$$

$$II = L du^2 + 2M dudv + N dv^2 = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N} du^2 + 2\vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} dudv + \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} dv^2 = d^2 \vec{r} \cdot \vec{N}$$

normal curvature:

if we have a surface S which contains a curve C and if P is a point on C, the (1.20-1) supplies the vector curvature, while we define the curvature $\hat{t}'_n(s)$ normal to C in P the projection of the curvature vector $\hat{t}'(s)$ on the normal $\vec{N}$ (and $\vec{N}$ is the versor $\hat{n}(s)$ of (1.10)): $\hat{t}'_n(s) = (\hat{t}'(s) \cdot \vec{N}) \vec{N}$ and the component along $\vec{N}$ is: $t_n = \hat{t}'(s) \cdot \vec{N}$.

Now, as $\hat{t}(s) \perp \vec{N}$, we have:

$\frac{d}{ds}(\hat{t}(s) \cdot \vec{N}) = 0 = \hat{t}'(s) \cdot \vec{N} + \hat{t}(s) \cdot \frac{d}{ds} \vec{N}$, from which: $\hat{t}'(s) \cdot \vec{N} = -\hat{t}(s) \cdot \frac{d}{ds} \vec{N}$ and so:

$t_n = \hat{t}'(s) \cdot \vec{N} = -\hat{t}(s) \cdot \frac{d}{ds} \vec{N} = -\frac{d\vec{\tau}_\gamma(s)}{ds} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{d\vec{\tau}_\gamma \cdot d\vec{N}}{ds^2} = \frac{II}{I}$, as the numerator $d\vec{\tau}_\gamma \cdot d\vec{N}$ is really the definition of II, while ds^2 can be figured out by deriving (1.22) and then squaring, and we'll really have I.

example: normal curvature of the sphere:

we already saw with (1.2) that the sphere (Fig. 1.1) is represented by the following equation:

$\vec{r} = (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + (r \cos \varphi) \hat{z}$, from which:

$$\vec{r}_\theta = -(r \sin \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{y}$$

$$\vec{r}_\varphi = (r \cos \theta \cos \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \cos \varphi) \hat{y} - (r \sin \varphi) \hat{z}$$

$$\vec{r}_{\theta\theta} = -(r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} - (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y}$$

$$\vec{r}_{\theta\varphi} = -(r \sin \theta \cos \varphi) \hat{x} + (r \cos \theta \cos \varphi) \hat{y}$$

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = -(r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} - (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} - (r \cos \varphi) \hat{z}$$

$$\vec{N} = -(r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} - (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} - (r \cos \varphi) \hat{z}$$

$$E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = r^2 \sin^2 \varphi, \quad F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0, \quad G = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = r^2, \quad L = \vec{r}_{\theta\theta} \cdot \vec{N} = r \sin^2 \varphi, \quad M = \vec{r}_{\theta\varphi} \cdot \vec{N} = 0$$

$$N = \vec{r}_{\varphi\varphi} \cdot \vec{N} = r, \text{ from which:}$$

$$t_n = \frac{Ld\theta^2 + 2Md\theta d\varphi + Nd\varphi^2}{Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\varphi + Gd\varphi^2} = \boxed{\frac{1}{r}} !!!$$

curvatures and main directions:

the two orthogonal directions where t_n has its maximum and minimum values, are known as main directions and the relevant normal curvatures t_1 and t_2 are the main curvatures.

Theorem: t_0 is main and with main direction du_0, dv_0 if and only if du_0, dv_0 and t_0 satisfy the conditions:

$$\begin{cases} (L - t_0 E) du_0 + (M - t_0 F) dv_0 = 0 \\ (M - t_0 F) du_0 + (N - t_0 G) dv_0 = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

proof:

t_n is a bound if ($t_n = II/I$)

$$\left. \frac{dt_n}{du} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{dt_n}{dv} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0, \text{ that is: } \left. \frac{I \cdot II_{du} - II \cdot I_{du}}{I^2} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0 \text{ and:}$$

$$\left. \frac{I \cdot II_{dv} - II \cdot I_{dv}}{I^2} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0. \text{ Now, if we multiply by I, we have:}$$

$$\left. II_{du} - \frac{II}{I} I_{du} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0, \text{ and: } \left. II_{dv} - \frac{II}{I} I_{dv} \right|_{(du_0, dv_0)} = 0 \text{ but: } \frac{II}{I}(du_0, dv_0) = t_0, \text{ so:}$$

$II_{du} - t_0 I_{du}|_{(du_0, dv_0)} = 0$ and $II_{dv} - t_0 I_{dv}|_{(du_0, dv_0)} = 0$. Now, as:
 $II_{du} = 2Ldu + 2Mdv$ and $I_{du} = 2Edu + 2Fdv$ and so:

$$\begin{cases} (Ldu_0 + Mdv_0) - t_0(Edu_0 + Fdv_0) = 0 \\ (Mdu_0 + Ndv_0) - t_0(Fdu_0 + Gdv_0) = 0 \end{cases}$$

that is, what we wanted to prove.

Now, we rewrite the (1.26) in the following way:

$$\begin{cases} (L - tE)du + (M - tF)dv = 0 \\ (M - tF)du + (N - tG)dv = 0 \end{cases}$$

and we multiply side to side:

$$(EG - F^2)t^2 - (EN + GL - 2FM)t + (LN - M^2) = 0. \quad (1.27)$$

The two solutions are the main curvatures.

Gauss curvature and mean curvature:

by dividing the previous equation (1.27) by $(EG - F^2)$, we get: $t^2 - 2Ht + K = 0$, where:

$$H = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \text{ (mean curvature) and } K = t_1 t_2 \text{ (Gauss curvature). } (K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2})$$

Gauss-Weingarten equations:

we saw $\vec{\tau}_u$, $\vec{\tau}_v$, and $\vec{N}$ are linearly independent (orthogonal) and so we can use them as a base to write their derivatives:

$$\begin{cases} \vec{\tau}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{\tau}_v + b_{11} \vec{N} \\ \vec{\tau}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{\tau}_v + b_{12} \vec{N} \\ \vec{\tau}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{\tau}_v + b_{22} \vec{N} \end{cases} \text{ Gauss} \quad (1.28)$$

$$\begin{cases} \vec{N}_u = \beta_1^1 \vec{\tau}_u + \beta_1^2 \vec{\tau}_v + \gamma_1 \vec{N} \\ \vec{N}_v = \beta_2^1 \vec{\tau}_u + \beta_2^2 \vec{\tau}_v + \gamma_2 \vec{N} \end{cases} \text{ Weingarten}$$

Where the Γ_{ij}^k are the 2nd kind Christoffel symbols.

We saw by (1.24) that: $d\vec{N} \perp \vec{N}$ and the (1.25) tells us that $d\vec{N}$ can be expressed in terms of $\vec{N}_u, \vec{N}_v$, from which we have that $\vec{N} \perp (\vec{N}_u, \vec{N}_v)$ and, according to the Weingarten equations, we can write that:

$$0 = \vec{N}_u \cdot \vec{N} = \beta_1^1 \vec{\tau}_u \cdot \vec{N} + \beta_1^2 \vec{\tau}_v \cdot \vec{N} + \gamma_1 \vec{N} \cdot \vec{N}$$

$$0 = \vec{N}_v \cdot \vec{N} = \beta_2^1 \vec{\tau}_u \cdot \vec{N} + \beta_2^2 \vec{\tau}_v \cdot \vec{N} + \gamma_2 \vec{N} \cdot \vec{N}$$

but we also know that: $\vec{\tau}_u \cdot \vec{N} = \vec{\tau}_v \cdot \vec{N} = 0$ and $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$, from which: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ and so

(1.28) get easier, as follows:

$$\begin{cases} \vec{\tau}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{\tau}_v + b_{11} \vec{N} \\ \vec{\tau}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{\tau}_v + b_{12} \vec{N} \\ \vec{\tau}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{\tau}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{\tau}_v + b_{22} \vec{N} \end{cases} \text{ Gauss} \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} \vec{N}_u = \beta_1^1 \vec{\tau}_u + \beta_1^2 \vec{\tau}_v \\ \vec{N}_v = \beta_2^1 \vec{\tau}_u + \beta_2^2 \vec{\tau}_v \end{cases} \text{ Weingarten}$$

Let's write (1.29), more simply, in a TENSOR form, more completely:

$$\vec{\tau}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha} + b_{ij} \vec{N} \quad (i,j=1,2) \quad (1.30)$$

and let's not forget that by (1.30) we have just started to use the EINSTEIN CONVENTION, according to which if in a term an index is repeated, then on it we have to sum up. In fact, in the term $\Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha}$ in (1.30), α is repeated and so this term will yield two values, as well as happens in the Gauss equations (1.29).

THE METRIC TENSOR g_{ij} :

let's review our terminology used so far, using more compendious forms:

$$u = u^1, \quad v = u^2, \quad u^i = (u, v), \quad \vec{\tau}_i = \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial u^i}, \quad \vec{\tau}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{\tau}}{\partial u^i \partial u^j};$$

$$I = d\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_1 du^1 du^1 + 2\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 du^1 du^2 + \vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_2 du^2 du^2 = g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2 = \sum_{i,k} g_{ik} du^i du^k = g_{ik} du^i du^k, \text{ with: } g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G \text{ and:}$$

$$g = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} = EG - F^2 = g \quad (1.31)$$

Moreover: $d\vec{N} = \vec{N}_1 du^1 + \vec{N}_2 du^2$ and:

$$II = -d\vec{\tau} \cdot d\vec{N} = -\vec{\tau}_1 \cdot \vec{N}_1 du^1 du^1 - \vec{\tau}_1 \cdot \vec{N}_2 du^1 du^2 - \vec{\tau}_2 \cdot \vec{N}_1 du^2 du^1 - \vec{\tau}_2 \cdot \vec{N}_2 du^2 du^2 = \\ = b_{11} du^1 du^1 + b_{12} du^1 du^2 + b_{21} du^2 du^1 + b_{22} du^2 du^2 = \sum_{i,k} b_{ik} du^i du^k$$

$$\text{with: } b_{11} = L, \quad b_{12} = b_{21} = M, \quad b_{22} = N \text{ and: } b = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = LN - M^2 = b.$$

By scalarly multiplying Gauss equations by $\vec{\tau}_k$, we have:

$$\vec{\tau}_{ij} \cdot \vec{\tau}_k = \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha} \cdot \vec{\tau}_k + b_{ij} \vec{N} \cdot \vec{\tau}_k = \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha} \cdot \vec{\tau}_k + 0 = \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha} \cdot \vec{\tau}_k = \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k} = \Gamma_{ijk} \quad (\alpha, i, j = 1, 2)$$

Γ_{ijk} are the 1st kind Christoffel symbols.

Then, remember that: $g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta_i^j$ (by definition of $g^{\alpha j}$), with δ_i^j which is the Kronecker's Delta, and is 0 if $i \neq j$ and 1 if $i = j$; in fact:

$$g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_{\alpha} \cdot \vec{\tau}^{\alpha} \cdot \vec{\tau}^j = \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}^j \cdot \vec{\tau}_{\alpha} \cdot \vec{\tau}^{\alpha} = \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}^j \cdot 1 = \delta_i^j, \text{ as } \vec{\tau}_i \text{ and } \vec{\tau}^j \text{ are, by definition, normal, if } i \neq j \text{ (definition of } \vec{\tau}^j \text{)}.$$

From this, we have: $\Gamma_{ij\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \delta_{\alpha}^k = \Gamma_{ij}^k$ and so: $\Gamma_{ijk} = g_{k\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha}$ and

$$\Gamma_{ij}^k = g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha}. \quad (1.32)$$

$$\text{-We have: } \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \quad (1.33)$$

proof:

we have, by definition of g_{ij} , that: $g_{ij} = \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j$, from which:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \vec{\tau}_{ik} \cdot \vec{\tau}_j + \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_{jk} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$$

$$\text{-Then, we also have: } \Gamma_{ikj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \quad (1.34)$$

proof:

we have, according to (1.33), that: $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij}$, $\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk}$ and $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$,
(it's still about (1.33), but with indexes every time different, but, all in all, indexes have values 1 and 2, whatever their name is), from which we have what we wanted to prove.

It follows that:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ai}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} \right) \quad (1.35)$$

and moreover, by multiplying (1.32) $\Gamma_{ij}^k = g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha}$ in both sides by $g_{\mu\alpha}$ (the reciprocal of $g^{k\alpha}$), where, by definition of reciprocal: $g_{\mu\alpha} g^{k\alpha} = \delta_\mu^k$, we have: $g_{\mu\alpha} \Gamma_{ij}^k = g_{\mu\alpha} g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha} = \delta_\mu^k \Gamma_{ij\alpha}$, that is, by removing δ_μ^k and provided that $\mu = k$, in the left side, we have:

$$\Gamma_{ij\alpha} = g_{\mu\alpha} \Gamma_{ij}^\mu \text{ and by using the last equation, the (1.33) } \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \text{ becomes:}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = g_{\mu j} \Gamma_{ik}^\mu + g_{\mu i} \Gamma_{\alpha k}^\mu \quad (1.36)$$

By scalarly multiplying by $\vec{\tau}_j$, the Weingarten equations (1.29) $\vec{N}_i = \beta_i^\alpha \vec{\tau}_\alpha$, we get:

$-b_{ij} = \vec{N}_i \cdot \vec{\tau}_j = \beta_i^\alpha \vec{\tau}_\alpha \cdot \vec{\tau}_j = \beta_i^\alpha g_{\alpha j}$; if now we put: $b_i^j = b_{i\alpha} g^{\alpha j}$, we have:

$b_i^j = b_{i\gamma} g^{\gamma j} = -\beta_i^\alpha g_{\alpha\gamma} g^{\gamma j} = -\beta_i^\alpha \delta_\alpha^j = -\beta_i^j$; therefore $\vec{N}_i = -b_i^\alpha \vec{\tau}_\alpha$, with:

$b_i^j = g^{\alpha j} b_{i\alpha}$ e $b_{ij} = g_{\alpha j} b_i^\alpha$

the symbols (tensors) of Riemann (1st and 2nd kind):

$$R_{mijk} = b_{ik} b_{jm} - b_{ij} b_{km} \quad (2nd \text{ kind, rank 4 tensor}) \quad (1.37)$$

$$R_{ijk}^\rho = g^{\alpha\rho} R_{\alpha ijk} \quad (1st \text{ kind, rank 4 tensor}) \quad (1.38)$$

R_{mijk} is the covariant Riemann curvature tensor

R_{ijk}^ρ is the combined Riemann curvature tensor

$$\text{Of course: } R_{ijk}^\rho = g^{\alpha\rho} R_{\alpha ijk} = g^{\alpha\rho} (b_{ik} b_{j\alpha} - b_{ij} b_{k\alpha}) = b_{ik} b_j^\rho - b_{ij} b_k^\rho \quad (1.39)$$

According to (1.37), we have: $R_{imjk} = -R_{mijk}$, $R_{mikj} = -R_{mijk}$; moreover $R_{mijk} = 0$ if the first two indexes or the last two are the same; therefore, just four components are not zero, and are:

$$R_{1212} = R_{2121} = b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21} = LN - M^2 = b \quad \text{and} \quad R_{1221} = R_{2112} = b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11} = -(LN - M^2) = -b$$

$$\text{We notice that: } \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b}{g} = \frac{R_{1212}}{g} = K(Gauss) . \quad (1.40)$$

-We have: $R_{ijk}^{\alpha} = (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j - (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k + \Gamma_{ik}^{\beta}\Gamma_{\beta j}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta}\Gamma_{\beta k}^{\alpha}$ (1.41)

proof:

$$\vec{\tau}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha} + b_{ij} \vec{N} \gggg$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}_{ij}}{\partial u^k} &= \vec{\tau}_{ijk} = (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k \vec{\tau}_{\alpha} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha k} + (b_{ij})_k \vec{N} + b_{ij} \vec{N}_k = (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k \vec{\tau}_{\alpha} + \Gamma_{ij}^{\alpha} (\Gamma_{\alpha k}^{\beta} \vec{\tau}_{\beta} + b_{\alpha k} \vec{N}) + \\ &+ (b_{ij})_k \vec{N} + b_{ij} (-b_k^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha}) = [(\Gamma_{ij}^{\alpha})_k + \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} - b_{ij} b_k^{\alpha}] \vec{\tau}_{\alpha} + [\Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} + (b_{ij})_k] \vec{N} \end{aligned}$$

where we used the Weingarten equation $\vec{N}_i = -b_i^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha}$.

$$\text{Similarly: } \vec{\tau}_{ikj} = [(\Gamma_{ik}^{\alpha})_j + \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - b_{ik} b_j^{\alpha}] \vec{\tau}_{\alpha} + [\Gamma_{ik}^{\alpha} b_{\alpha j} + (b_{ik})_j] \vec{N}$$

Now, the third order derivatives are not depending on the order of derivation if and only if: $\vec{\tau}_{ijk} = \vec{\tau}_{ikj}$, that is:

$$\vec{\tau}_{ijk} - \vec{\tau}_{ikj} = [(\Gamma_{ij}^{\alpha})_k - (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j + \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} - \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - b_{ij} b_k^{\alpha} + b_{ik} b_j^{\alpha}] \vec{\tau}_{\alpha} + [\Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} + (b_{ij})_k - \Gamma_{ik}^{\alpha} b_{\alpha j} - (b_{ik})_j] \vec{N} = 0$$

and as $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ and $\vec{N}$ are linearly independent, the last equation means that:

$$[(\Gamma_{ij}^{\alpha})_k - (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j + \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} - \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - b_{ij} b_k^{\alpha} + b_{ik} b_j^{\alpha}] = 0 \quad (1.42)$$

$$[\Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} + (b_{ij})_k - \Gamma_{ik}^{\alpha} b_{\alpha j} - (b_{ik})_j] = 0$$

The (1.42), through the (1.39), yields: $R_{ijk}^{\alpha} = (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j - (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k + \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha}$, that is what we wanted to show.

Chapter 2: The main quantities in the Theory of General Relativity.

Par. 2.1: Introductory concepts on General Relativity.

First of all, please read again the Introduction.

Moreover, we know from STR that the Lorentz contraction happens just in the direction of the movement, so, if we have a rotating system or a point which rotates, for instance, around a circle, the movement will be sometimes along x, then along x and y, then also along z; therefore, the Lorentz contraction is not acting still on just one coordinate and so, the run circle will appear as squashed, when seen by a rotating reference system, therefore, not inertial somehow, and therefore geometrically modified.

As a matter of fact, if:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k, \text{ see after}) \quad (2.1)$$

then, in another system I' which is accelerating along x with respect to the former one, we'll have:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x' + \frac{1}{2} a t^2 \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right. \quad \text{and:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = dx' + a t' dt' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = dt' \end{array} \right. \quad \text{from which:}$$

$$d\tau^2 = c^2 dt'^2 - (dx' + at' dt')^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad \text{or} \quad (2.2)$$

$$d\tau^2 = (c^2 - a^2 t'^2) dt'^2 - 2at' dx' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (2.3)$$

If, then, we also have another system I' whose plane x - y is rotating (with angular velocity ω) with respect to that of the former system, as we then have the following transformation system:

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{cases}$$

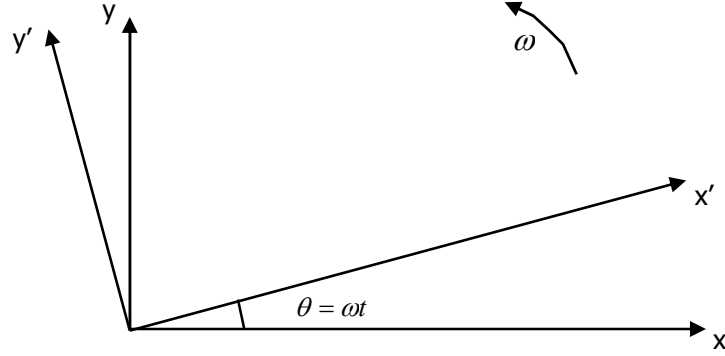


Fig. 2.1: Two reference systems, one rotating with respect to the other.

and remembering that, easily, for instance, $d(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t \cdot dt$ etc, we have for $d\tau^2$:

$$d\tau^2 = [c^2 - \omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (2.4)$$

and we can see that in no cases ((2.2), (2.3), and (2.4), which are of the kind $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$; see after) we can reduce $d\tau^2$, by means of time transformations, to the algebraic summation of the squares of the differentials of the four coordinates, as in (2.1) and as would be, on the contrary, for another inertial reference system.

Therefore, the presence of linear accelerations of reference systems (that can cancel gravitational fields) and also centrifugal/centripetal ones, that is, central ones, such as for the gravity (for instance, after rotations), introduce combined terms which change the metric, and so the geometry of the space-time. From this comes the need to formulate a relativistic theory for gravitation (GTR).

Par. 2.2: On the metric tensor and other main quantities.

When we have dealt with the Gauss-Weingarten equations, just before, we saw that $\vec{\tau}_u$, $\vec{\tau}_v$, and $\vec{N}$ are linearly independent (orthogonal) and so they really are a reference system, but curvilinear, and local, as they lie on a point of a surface, and when we move on it, such a tern moves and they also change their direction. That's a valid example of a curvilinear reference system, in the opinion of the writer, of course.

In all the equations introduced in the last chapter on geometry, indexes i, j, k etc changed from 1 to 2 or also 3. Now, getting a bit deeper in the Universe, and so in the General Relativity, we first of all notice that our Universe looks tridimensional, therefore, on indexes, we'll have a variability which reaches at least three, and then, as also shown in the Special Relativity, there exists a mathematically four-dimensional Universe in which there is covariance, and so conservation, when passing from an inertial system to another, then, with Einstein, we start once and for all to consider the Universe on a four-

dimensional basis and that's it; therefore, the indexes of all the geometrical equations introduced in the last chapter, will have, from now on, all indexes with a variability on four values and the fourth value is the time one (ct). Then, the Einstein's convention will hold, according to which if in a term of an equation an index is present twice, then the summation over it is understood.

We report here the mains, which will be needed by us:

$$\vec{\tau}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha} \quad (\text{Gauss' equations in a more compendious form; all in } \Gamma_{ij}^{\alpha}) \quad (i,j=1,2,3,4) \quad (2.5)$$

(this gives us also the derivative of a versor)

$$d\tau^2 = -g_{ik} du^i du^k \quad (i,j=1,2,3,4) \quad (\text{metric tensor } g_{ik} / \text{de-square four-distance } d\tau^2) \quad (2.6)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{\alpha}} \right) \quad (i,j=1,2,3,4) \quad (\text{1st kind Christoffel symbol}) \quad (2.7)$$

$$R_{ijk}^{\alpha} = (\Gamma_{ik}^{\alpha})_j - (\Gamma_{ij}^{\alpha})_k + \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} \quad (i,j=1,2,3,4) \quad (\text{Riemann combined curvature tensor}) \quad (2.8)$$

The metric tensor g_{ik} , in case we are dealing with Euclidean spaces, reduces to Minkowski's tensor η_{ik} (it's 1 for $i=k=1,2,3$ and it's -1 for $i=k=4$; it's 0 when i is different from k) and without combined terms, that is, if i,k are not the same, then $\eta_{ik}=0$; in fact, we should then have ($u^i = x, y, z, ct$):

$d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + d(ct)^2$, just like in Special Relativity, and the ξ^i would represent the Euclidean coordinate system. Then, when passing to curvilinear systems ($d\xi^i \gg \gg dx^i$), we'll have:

$$d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k = -\eta_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu} = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad \text{with} \quad (2.9)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{\nu}} \quad (2.10)$$

which is the link equation from one system to another.

In the future we'll keep for the indexes the letters of the common alphabete (i,j,k etc) in case of Euclidean spaces (η_{ik}) and those of the Greek alphabete (μ, ν etc) for curvilinear spaces $g_{\mu\nu}$, with strong gravity.

We saw with (1.1) and (1.2) that a sphere can be represented through an equation in which there are the three classic Cartesian coordinates (x,y,z) or also by fixing a radius and making two angles change (r, θ, φ):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 & (x,y,z) \\ \vec{r}_{\Sigma} &= (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{x} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + (r \cos \varphi) \hat{z} & (r, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

Now, in case we make a change of coordinate system ($x,y,z \gg \gg x',y',z'$) where the latter is, for instance, shifted and rotated with respect to the former, there will be classic equations to go from one system to another, but both systems will still have the same

graphical representation by axes stretching from the origin to infinite, in positive as well as in negative: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$ (x', y', z')
 but all this in the Euclidean geometry, or non curvilinear, if we like.

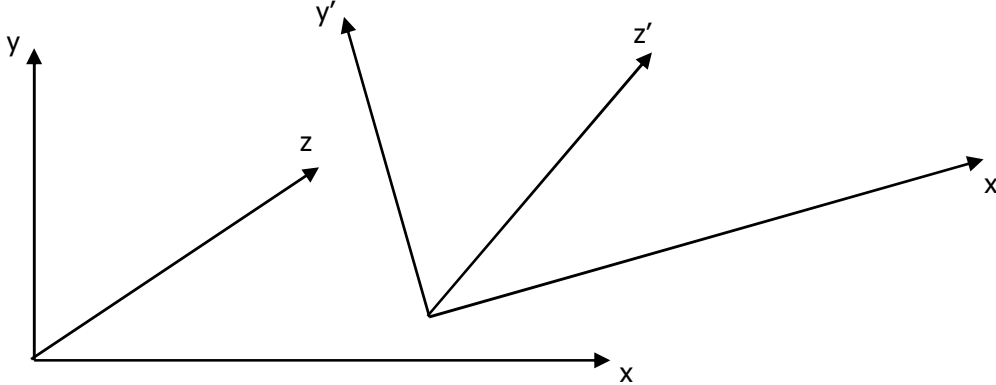


Fig. 2.2: Two different "Euclidean" reference systems.

If now we suppose to go from a system as that in Fig. 2.2 to another in which the space is, for any reason, curved, for instance by the gravity of matter and energy, as supposed in the General Relativity, then the Euclidean geometry isn't enough anymore and the curvilinear one, the non Euclidean Riemann-like is more helpful. In fact, in the opinion of the writer, when passing from a standard system to a curvilinear one, you cannot have the representation of Fig. 2.2, but the curvilinear one will look like a tern of straight Cartesian axes only in the infinitesimal range ("d" = de), as per Fig. 2.3; in fact, as it's curved, as long as you get farther from the origin "0", every single axis bends and loses any linearity and proportionality.



Fig. 2.3: Case of curvilinear coordinate systems.

Therefore, we'll have a system of link equations from an Euclidean system (ξ^i) to a curvilinear one (x^i), in the infinitesimal range, for all what just said so far, and that will be, in general, like this:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^1 = \xi^1(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \xi^2 = \xi^2(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \xi^3 = \xi^3(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \xi^4 = \xi^4(x^1, x^2, x^3, x^4) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

and vice versa:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \\ x^2 = x^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \\ x^3 = x^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \\ x^4 = x^4(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \end{array} \right. \quad (2.12)$$

and for the conversion equations for the expressions for the surfaces and for geometrical object ($\vec{\tau}$), we obviously have ($\vec{\tau} = \xi^1 \hat{i} + \xi^2 \hat{j} + \xi^3 \hat{k} + \xi^4 \hat{t} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$) and

$$(\vec{\tau} = x^1 \vec{\tau}_1 + x^2 \vec{\tau}_2 + x^3 \vec{\tau}_3 + x^4 \vec{\tau}_4 = (x^1, x^2, x^3, x^4)):$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\tau}_1 = \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \hat{i} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \hat{j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} \hat{k} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^1} \hat{t} \\ \vec{\tau}_2 = \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \hat{i} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \hat{j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} \hat{k} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^2} \hat{t} \\ \vec{\tau}_3 = \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial x^3} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} \hat{i} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} \hat{j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} \hat{k} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^3} \hat{t} \\ \vec{\tau}_4 = \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial x^4} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^4} \hat{i} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^4} \hat{j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^4} \hat{k} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} \hat{t} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

and moreover, of course:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi^1 = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^4} dx^4 \\ d\xi^2 = \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^4} dx^4 \\ d\xi^3 = \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^4} dx^4 \\ d\xi^4 = \frac{\partial \xi^4}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} dx^4 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\text{and so: } d\vec{\tau} = d\xi^1 \hat{i} + d\xi^2 \hat{j} + d\xi^3 \hat{k} + d\xi^4 \hat{t} = (d\xi^1, d\xi^2, d\xi^3, d\xi^4) = (dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) = d\vec{\tau} = dx^1 \vec{\tau}_1 + dx^2 \vec{\tau}_2 + dx^3 \vec{\tau}_3 + dx^4 \vec{\tau}_4 = \boxed{dx^i \vec{\tau}_i = d\vec{\tau}} \quad (2.15)$$

and therefore (dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) are the components of $\vec{\tau}$ in the curvilinear base $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3, \vec{\tau}_4)$.

There exist a reciprocal set of four numbers $(\vec{\tau}^1, \vec{\tau}^2, \vec{\tau}^3, \vec{\tau}^4)$ that, by definition:

$$\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}^j = \delta_i^j.$$

Now, if we go back for a while to the (2.15), where we plainly used the Einstein's convention, we have: $d\vec{\tau} = dx^i \vec{\tau}_i$

If now we want to make a change of curvilinear base, with coordinates from dx^i to dx'^i , we will obviously write: $dx^i \vec{\tau}_i = dx'^i \vec{\tau}'_i$ and, by multiplying both sides by $\vec{\tau}^i$, we'll have:

$$dx^i = dx'^i \vec{\tau}'_i \cdot \vec{\tau}^i, \text{ but it's also true that (as well as for (2.14)): } dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} dx'^i; \text{ therefore:}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^i} = \vec{\tau}'_i \cdot \vec{\tau}^i, \text{ that is:}$$

$$\vec{\tau}'_i = \vec{\tau}_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \quad (2.16)$$

and (2.16) is the equation for the base change.

Law of transformation for the components of a 4-vector:

let $\vec{V} = V^i \vec{\tau}_i$ be a generic vector expressed by curvilinear coordinates in the base $\vec{\tau}_i$; in another base $\vec{\tau}'_i$, we will have: $\vec{V} = V'^i \vec{\tau}'_i$ and, according to the (2.16):

$$\vec{V} = V'^i \vec{\tau}'_i = V'^i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \vec{\tau}_i = V^j \vec{\tau}_j, \text{ with:}$$

$$V^i = V'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \quad (2.17)$$

which is the transformation equation for the components of a 4-vector after a base change. Very simply, its inverse is: $V'^i = V^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$

Law of transformation for the components of a 4-tensor:

on Special Relativity we say that we can get a tensor T with rank n when we multiply the components of n vectors. So, if we have two vectors V and S: (where we are simultaneously reminding how their components transform)

$$V'^{\mu} = V^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad \text{e} \quad S'^{\lambda} = S^{\sigma} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \quad >>>>$$

$$T'^{\mu\lambda} = V'^{\mu} S'^{\lambda} = V^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} S^{\sigma} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} = V^{\nu} S^{\sigma} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} = \boxed{T^{\nu\sigma} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}} = T'^{\mu\lambda} \quad \text{and this is how the}$$

components of a rank 2 tensor transform. Then, you can proceed similarly for higher rank tensors.

Derivative of a 4-vector:

we have a 4-vector: $\vec{V} = V^{\mu} \vec{\tau}_{\mu}$; let's derive it:

$$\frac{d\vec{V}}{dx^{\nu}} = \frac{dV^{\mu}}{dx^{\nu}} \vec{\tau}_{\mu} + V^{\sigma} \frac{d\vec{\tau}_{\sigma}}{dx^{\nu}}, \quad (2.18)$$

Indexes changes from one term to another, as they change on four values and must not necessarily be simultaneously the same in all terms.

Now, multiply the right side of (2.18) by the unitary (=1) quantity $\vec{\tau}^{\mu} \cdot \vec{\tau}_{\mu}$:

$$\frac{d\vec{V}}{dx^{\nu}} = \left[\frac{dV^{\mu}}{dx^{\nu}} + V^{\sigma} \frac{d\vec{\tau}_{\sigma}}{dx^{\nu}} \vec{\tau}^{\mu} \right] \vec{\tau}_{\mu}; \text{ well, the quantity between the brackets is the covariant derivative and is a tensor, for all that has been said so far:}$$

$$V^{\mu}_{;\nu} = \frac{dV^{\mu}}{dx^{\nu}} + V^{\sigma} \frac{d\vec{\tau}_{\sigma}}{dx^{\nu}} \vec{\tau}^{\mu} = \frac{dV^{\mu}}{dx^{\nu}} + V^{\sigma} \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} \quad (\text{covariant derivative}) \quad (2.19)$$

where $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ are said the Christoffel's symbols (affine connection) and already introduced by (1.30).

Moreover, for the system (2.13), we could write, in a more compendious vectorial form:

$\bar{\tau}_\mu = (\sum_\alpha) \eta_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$, and, from this, we also have a dual form for the reciprocal set of four

$\bar{\tau}^\mu$ (so that, by definition of reciprocity: $\bar{\tau}^\mu \bar{\tau}_\mu = \delta^\mu_\mu = 1$): $\bar{\tau}^\mu = (\sum_\mu) \eta_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}$ and so the coefficient

$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ in (2.19) can be expressed also in the following way:

$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{d\bar{\tau}_\sigma}{dx^\nu} \bar{\tau}^\mu = \frac{d}{dx^\nu} (\eta_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}) \eta_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} = \eta_\alpha \eta_\mu \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}$, that, if inserted in (2.19), can be also

written in a simpler way, without the unitary coefficients η :

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \quad (2.20)$$

Then, already on Special Relativity, it's reminded that such a derivative (of a vector) gives a tensor. We also notice that such a derivative is a tensor (rank 2) just because the terms which make it, have two indexes, just like a tensor 2.

Moreover, (1.30) in the last chapter on Geometry is an example of a derivative of a vector (versor) which looks like a tensor 2, indeed.

In case a vector is esprime through the reciprocal base ($\vec{V} = V_\mu \bar{\tau}^\mu$), then:

$$\frac{d\vec{V}}{dx^\nu} = \frac{dV_\mu}{dx^\nu} \bar{\tau}^\mu + V_\sigma \frac{d\bar{\tau}^\sigma}{dx^\nu} = [\frac{dV_\mu}{dx^\nu} \bar{\tau}^\mu + V_\sigma \frac{d\bar{\tau}^\sigma}{dx^\nu}] (\bar{\tau}^\mu \cdot \bar{\tau}_\mu) = [\frac{dV_\mu}{dx^\nu} + V_\sigma \frac{d\bar{\tau}^\sigma}{dx^\nu} \bar{\tau}_\mu] \bar{\tau}^\mu = [V_{\mu;\nu}] \bar{\tau}^\mu , \text{ but:}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\bar{\tau}^\sigma \bar{\tau}_\mu) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^\sigma_\mu = 0 = \frac{\partial \bar{\tau}^\sigma}{\partial x^\nu} \bar{\tau}_\mu + \bar{\tau}^\sigma \frac{\partial \bar{\tau}_\mu}{\partial x^\nu} , \text{ so: } \frac{\partial \bar{\tau}^\sigma}{\partial x^\nu} \bar{\tau}_\mu = -\bar{\tau}^\sigma \frac{\partial \bar{\tau}_\mu}{\partial x^\nu} , \text{ therefore:}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dx^\nu} = [\frac{dV_\mu}{dx^\nu} - V_\sigma \bar{\tau}^\sigma \frac{\partial \bar{\tau}_\mu}{\partial x^\nu}] \bar{\tau}^\mu = [\frac{dV_\mu}{dx^\nu} - V_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma] \bar{\tau}^\mu = [V_{\mu;\nu}] \bar{\tau}^\mu , \text{ and finally:}$$

$$V_{\mu;\nu} = \frac{dV_\mu}{dx^\nu} - V_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$$

derivative of a tensor:

$$\text{we have: } T_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_\lambda^{\mu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T_\lambda^{\nu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T_\lambda^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^k T_k^{\mu\sigma} \quad (2.21)$$

in fact ($T_\lambda^{\mu\sigma}$ are just the components, without "versors" and, moreover $\bar{\tau}_\mu \bar{\tau}^\mu = \delta^\mu_\mu = 1$):

T(tensor) = $T_\lambda^{\mu\sigma} \bar{\tau}_\mu \bar{\tau}_\sigma \bar{\tau}^\lambda$, from which:

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho} (T_\lambda^{\mu\sigma} \bar{\tau}_\mu \bar{\tau}_\sigma \bar{\tau}^\lambda) = (\frac{\partial}{\partial x^\rho} T_\lambda^{\mu\sigma}) (\bar{\tau}_\mu \bar{\tau}_\sigma \bar{\tau}^\lambda) + T_\lambda^{\nu\sigma} (\frac{\partial}{\partial x^\rho} \bar{\tau}_\nu) \bar{\tau}_\sigma \bar{\tau}^\lambda + T_\lambda^{\mu\nu} (\frac{\partial}{\partial x^\rho} \bar{\tau}_\nu) \bar{\tau}_\mu \bar{\tau}^\lambda + T_\lambda^{\mu\sigma} (\frac{\partial}{\partial x^\rho} \bar{\tau}^\lambda) \bar{\tau}_\mu \bar{\tau}_\sigma$$

$$\ominus T_k^{\mu\sigma} (\frac{\partial}{\partial x^\rho} \bar{\tau}_\mu) \bar{\tau}^k \bar{\tau}_\sigma (\bar{\tau}^\lambda \bar{\tau}^\lambda) = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_\lambda^{\mu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T_\lambda^{\nu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T_\lambda^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^k T_k^{\mu\sigma} = T_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} \text{ c.v.d.}$$



$$(\text{as: } \frac{\partial}{\partial x^\nu} \bar{\tau}^\mu \bar{\tau}_k = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^\mu_k = 0 = \frac{\partial \bar{\tau}^\mu}{\partial x^\nu} \bar{\tau}_k + \bar{\tau}^\mu \frac{\partial \bar{\tau}_k}{\partial x^\nu} , \text{ da cui: } \frac{\partial \bar{\tau}^\mu}{\partial x^\nu} \bar{\tau}_k = -\bar{\tau}^\mu \frac{\partial \bar{\tau}_k}{\partial x^\nu})$$

Par. 2.3: On the Lorentz Transformation in the General Relativity.

Let's go back to (2.9), and we know from the Relativity that $d\tau^2$ is Lorentz invariant:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha'} dx^{\beta'} = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\delta} dx^\gamma dx^\delta = -\eta_{\gamma\delta} dx^\gamma dx^\delta , \text{ with:}$$

$$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} \quad (2.22)$$

Let's differentiate (2.22) on x^{ε} :

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\varepsilon}} ; \text{ now, we sum to this the same, but with } \gamma \text{ and } \varepsilon \text{ swapped and then we subtract the same equation, but with } \varepsilon \text{ and } \delta \text{ swapped, so getting:}$$

$$0 = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} >>>> \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varepsilon}} = 0, \text{ whose solution is:}$$

$$x'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + a^{\alpha} \quad (\text{Lorentz Transformation}) \quad (2.23)$$

This one, together with (2.22), yields: $\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta}$.

Moreover, (2.23) in a differential form is: $dx'^{\alpha} = \Lambda_{\gamma}^{\alpha} dx^{\gamma}$. (2.24)

Let's figure out the elements of the Lorentz matrix (or of the Lorentz tensor) Λ_{β}^{α} :

from the Lorentz Transformations, we have that ($\parallel$ and $\perp$ refers to the direction of the movement):

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{V}t) , \quad \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} , \quad t' = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}}{c^2}) ; \text{ moreover, of course, we have:}$$

$$\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2} \quad \text{and} \quad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}, \text{ and so:}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)(\vec{x} \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2} - \gamma \vec{V}t \quad \text{and} \quad (2.25)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}}{c^2})$$

While, for (2.24), we have: $dx'^i = \Lambda_{\beta}^i dx^{\beta}$, from which, using the common letters (i,j etc) for the three space components, 0 as the fourth time coefficient and the Greek letters for all of them:

$$dx'^i = \Lambda_j^i dx^j + \Lambda_0^i dx^0 \quad (\text{for (2.24)}) \quad (2.26)$$

$$dx'^i = dx^i + (\gamma - 1)(d\vec{x} \cdot \vec{V}) \frac{V^i}{V^2} + \gamma \frac{1}{c} V^i dx^0 \quad (\text{for (2.25)}) \quad (2.27)$$

(here, the last term has got a + and not a - because $dx^0 = -cdt$)

By comparing (2.26) and (2.27), we have:

$\Lambda_0^i = +\gamma \frac{1}{c} V^i$ and $\Lambda_j^i = \delta_j^i + \frac{(\gamma - 1)}{V^2} V^i V_j$, and if we use the normalization $c=1$, out of simplicity:

$\Lambda_0^i = +\gamma V^i \quad \text{and} \quad \Lambda_j^i = \delta_j^i + \frac{(\gamma - 1)}{V^2} V^i V_j$

(Lorentz Tensor)

where the product $d\vec{x} \cdot \vec{V}$ in (2.27) yielded just the component $dx^j V_j$ in (2.26), as in (2.26) there was just dx^j .

If the direct Lorentz T. is given by (2.24): $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\gamma dx^\gamma$, then, the inverse one will be represented as follows: $dx^\gamma = \Lambda'^\gamma_\alpha dx'^\alpha$.

Therefore, as also seen in the Special Relativity, not only the space components (x) and time (ct) can be Lorentz transformed, but also 4-vectors and 4-tensors can:

$$V'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta$$

$T'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma_\delta \Lambda^\epsilon_\alpha \Lambda^\zeta_\beta T^\delta_{\epsilon\zeta}$ (remembering that the components of a tensor are obtained by multiplying those of vectors)

Par. 2.4: The Energy-Momentum 4-vector and the Energy-Momentum Tensor.

Preamble on the Delta of Dirac:

By definition, the Delta of Dirac must satisfy the following equation:

$$f(\vec{y}) = \int f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3x$$

In practice, if you put it in the integral (which is a summation) it yields the same integrated function f, but of a different variable. See some good books on the Fourier Transform to have useful versions of the Delta of Dirac.

Preamble on currents and densities (of matter/energy):

if in various points $\vec{x}_n(t)$ we have energy (and so also matter) with a volume density $e_n[J/m^3]$, in order to have the total one, we obviously have to sum on n:

$$\varepsilon(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) ,$$

where the Delta of Dirac gives the right value for e_n in the summation for every position $\vec{x}_n(t)$.

About the relevant current density of matter/energy $\vec{J}(\vec{x}, t)$, we obviously have:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{d\vec{x}_n(t)}{dt}$$

in fact, $e_n[J/m^3]$, multiplied by $\frac{d\vec{x}_n(t)}{dt}[m/s]$, really gives a current of joule per square meter.

In components: $J^\alpha(x) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt}$ and, of course: $J^0 = \varepsilon$ and $x_n^0(t) = ct$.

Now, this summation is over the points n; in order to have the total value, one must integrate also over the time:

$$J^\alpha(x) \rightarrow \int dt' \delta(x - x_n(t')) J^\alpha(x) = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^\alpha(t')}{dt'} ; \text{ now, by multiplying numerator}$$

and denominator by c, as "de" proper time is $d\tau = c dt'$, we'll have:

$$J^\alpha(x) = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^\alpha(\tau)}{d\tau}$$

$$J^\alpha(x) \text{ is a 4-vector, and so is } \frac{dx_n^\alpha(\tau)}{d\tau} .$$

$$\text{Moreover, } \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(x, t) = \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} = - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} =$$

$= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\vec{x}, t)$. If now we bring $-\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\vec{x}, t)$ together with $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t)$, we will have the 4-divergence:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = 0 \text{ (the invariance on Lorentz is clear).} \quad (2.28)$$

Moreover, $Q(\text{mat} - \text{energ}) = \int d^3x J^0(x) = \int d^3x \cdot \varepsilon(\vec{x}, t)$

the energy-momentum 4-vector:

we already dealt with it in Special Relativity.

Of course, $p^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{d\tau}$; then $\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m_0 \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = f^\alpha$ and

$$d\tau = (c^2 dt^2 - d\vec{x}^2)^{1/2} = (1 - \vec{V}^2/c^2)^{1/2} dt = dt/\gamma$$

from which, for the tridimensional component and for the time one:

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{V} \text{ and } p^0 = E_0/c = m_0 \gamma c \text{ and so:} \quad (2.29)$$

$$p^\beta = (E_0/c^2) \frac{dx^\beta}{d\tau} . \quad (2.30)$$

Of course, for Lorentz: $p'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta p^\beta$.

(*): In reality, we will consider the mass m as a mass referred to the unity of volume [kg/m³]

the energy-momentum TENSOR:

$$T^{\alpha 0}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad ("0" \text{ is the time component}) \quad (2.31)$$

$T^{\alpha i}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$ ("i", on the contrary, refers to the three space components) and, all together, in a more compendious form:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (x_n^0(t) = ct) \quad (2.32)$$

The first one is a moment (p), actually, and the second is an energy, indeed (p x v). As before, we summed over the particles n.

(Then, by summing also over the time, we'd have, here too, after having multiplied numerator and denominator by c: $T^{\alpha\beta} = \int d\tau \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau))$)

Now, (2.32), through (2.30), becomes:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{(E_n/c^2)} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

We notice the symmetry $T^{\alpha\beta}(x) = T^{\beta\alpha}(x)$; moreover, $T^{\alpha\beta}(x)$ is a tensor and, being so, according to Lorentz, transforms, as follows:

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta} . \quad (2.33)$$

Moreover, just like previously done to get (2.28), through the 4-divergence, we have:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i}(\bar{x}, t) &= \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n(t)) = - \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n(t)) = \\ &= - \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\bar{x}, t) + \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n(t))\end{aligned}$$

as $\frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\bar{x}, t)$ in the last equation is made of those two terms it has on its sides, for the rule of the derivation.

Therefore, $\frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i} + \frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha \beta} = \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n(t)) = G^\alpha(x, t)$, that is:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha \beta} = G^\alpha, \text{ with:}$$

$$G^\alpha(\bar{x}, t) = \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n(t)) = \sum_n \frac{d\tau}{dt} \frac{dp_n^\alpha(\tau)}{d\tau} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n(t)) = \sum_n \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha(t) \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_n(t))$$

where $f_n^\alpha = \frac{dp_n^\alpha}{d\tau}$ is obviously a force.

If particles are free, then $p_n^\alpha = \text{const}$ and so $\gggg \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha \beta} = 0 !!!$

Par. 2.5: Relativistic Hydrodynamics.

Now, it's very important to find a form for the energy-momentum tensor $T^{\alpha \beta}$, as we'll see that in the Newtonian limit of the relativistic gravitation, a component of it appears (T^{00}), so suggesting to involve, once we are out of the limit situation, all $T^{\alpha \beta}$ indeed. Out of simplicity, now we consider that $c=1$ (normalization).

Now we see that $T^{\alpha \beta} = p \eta^{\alpha \beta} + (p + \rho) U^\alpha U^\beta$ and for fields of any intensity:

$$T^{\mu \nu} = p g^{\mu \nu} + (p + \rho) U^\mu U^\nu \quad (c=1) \quad (2.34)$$

proof:

let's put the symbol $\sim$ over the quantities which refer to a system at rest; moreover, from (2.32), we have that, in the right side, there is a product of a moment $[(\text{kg}/\text{m}^3)(\text{m}/\text{s})]$ by a velocity $[(\text{m}/\text{s})]$ (remind the note (*) on page 26) and so:

mass x velocity x velocity (=J) divided by m^3 , that is a pressure p . (2.35)

Then, when the quantity $dx/dt = d(ct)/dt = c$ is that which corresponds to the index zero, as per (2.31), then we'll have on the right side the product p^0 (mc , see (2.29)) by c , but according to the note (*) on page 26, m is a p and so we have pc^2 . Let's sum up:

$$\tilde{T}^{ij} = p \delta^{ij} [Pa], \quad \tilde{T}^{i0} = \tilde{T}^{0i} = 0, \quad \tilde{T}^{00} = \rho, \text{ that is: } (\rho c^2 \text{ with } c=1 [Pa]) \quad (2.36)$$

As T is a tensor, let's transform it according to Lorentz, as per (2.33), to get its values for a generic system, that is, not at rest:

$$T^{\alpha \beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta \tilde{T}^{\gamma \delta}; \text{ we'll have: } \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}, \text{ with } c=1 \right)$$

$$\left\{ \begin{aligned} T^{ij} &= p \delta^{ij} + (p + \rho) \gamma^2 V^i V^j \\ T^{i0} &= (p + \rho) \gamma^2 V^i \\ T^{00} &= \gamma^2 (p V^2 + \rho) \end{aligned} \right.$$

in fact, as, according to the Lorentz Tensor, it is:

$\Lambda_0^0 = \gamma$, $\Lambda_0^i = \gamma V^i$ ($\gamma \frac{1}{c} V^i$ with $c=1$), $\Lambda_i^0 = \gamma V_i$ ($\gamma \frac{1}{c} V_i$ with $c=1$), $\Lambda_j^i = \delta_j^i + \frac{(\gamma-1)}{V^2} V^i V_j$, it follows

that: $T^{00} = \Lambda_\gamma^0 \Lambda_\delta^0 \tilde{T}^{\gamma\delta} = \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 \tilde{T}^{00} + \sum_i (\Lambda_i^0 \Lambda_i^0 \tilde{T}^{ii}) = \gamma^2 \rho + \sum_i [\gamma^2 (V^i)^2] p = \gamma^2 (\rho + p V^2)$

$T^{i0} = \Lambda_\gamma^i \Lambda_\delta^0 \tilde{T}^{\gamma\delta} = \Lambda_0^i \Lambda_0^0 \tilde{T}^{00} + \Lambda_j^i \Lambda_j^0 \tilde{T}^{jj} = \gamma^2 V^i \rho + p \sum_j (\Lambda_j^i \Lambda_j^0) = \gamma^2 V^i \rho + p (\Lambda_i^i \Lambda_i^0 + \Lambda_k^i \Lambda_k^0 + \Lambda_l^i \Lambda_l^0) =$

$(k, l \neq 0, i \text{ and } j \text{ can be } i, \text{ or } k, l)$

$$\begin{aligned} &= \gamma^2 V^i \rho + p \left[(1 + (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}) \gamma V^i + V^i V^k \frac{(\gamma-1)}{V^2} \right] \gamma V^k + \\ &+ V^i V^l \frac{(\gamma-1)}{V^2} \gamma V^l] = \gamma^2 V^i \rho + p \left[\gamma V^i + \gamma V^i (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} + \gamma V^i (V^k)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} + \gamma V^i (V^l)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} \right] = \\ &= \gamma^2 V^i \rho + p \gamma V^i + p \gamma V^i \frac{(\gamma-1)}{V^2} [(V^i)^2 + (V^k)^2 + (V^l)^2] = \gamma^2 V^i \rho + p \gamma V^i + p \gamma V^i (\gamma-1) = \\ &= \gamma^2 V^i (p + \rho) \end{aligned}$$

On the contrary, for the calculation of T^{ij} , let's split this in two cases:

$(i=j \text{ and } i \neq j)$

$$\begin{aligned} T^{ii} &= \Lambda_\gamma^i \Lambda_\delta^i \tilde{T}^{\gamma\delta} = \Lambda_0^i \Lambda_0^i \tilde{T}^{00} + \Lambda_i^i \Lambda_i^i \tilde{T}^{ii} + \Lambda_k^i \Lambda_k^i \tilde{T}^{kk} + \Lambda_l^i \Lambda_l^i \tilde{T}^{ll} = (k, l \neq i) = \gamma^2 (V^i)^2 \rho + [1 + (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}]^2 p + \\ &+ [V^i V^k \frac{(\gamma-1)}{V^2}]^2 p + [V^i V^l \frac{(\gamma-1)}{V^2}]^2 p = \gamma^2 (V^i)^2 \rho + p + p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} [(V^i)^2 + (V^k)^2 + (V^l)^2] + \\ &+ 2p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} = \gamma^2 (V^i)^2 \rho + p + p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)^2}{V^2} + 2p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} = p + \gamma^2 (V^i)^2 \rho + \\ &+ p (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2} (\gamma-1+2) = p + \gamma^2 (V^i)^2 \rho + p \frac{(V^i)^2}{V^2} (\gamma^2-1) = p + \gamma^2 (V^i)^2 \rho + p (V^i)^2 \gamma^2 = \\ &= p + \gamma^2 (V^i)^2 (p + \rho). \quad (\text{as } \frac{(\gamma^2-1)}{V^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} = \gamma^2 \text{ if } c=1) \end{aligned}$$

On the contrary, if $i \neq j$:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \Lambda_\gamma^i \Lambda_\delta^j \tilde{T}^{\gamma\delta} = \Lambda_0^i \Lambda_0^j \tilde{T}^{00} + \Lambda_i^i \Lambda_i^j \tilde{T}^{ii} + \Lambda_j^i \Lambda_j^j \tilde{T}^{jj} + \Lambda_k^i \Lambda_k^j \tilde{T}^{kk} = (k \neq i, j) = \gamma^2 V^i V^j \rho + \\ &+ p [1 + (V^i)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}] [V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2}] + p [V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2}] [1 + (V^j)^2 \frac{(\gamma-1)}{V^2}] + \\ &p [\delta^{ik} (=0) + V^i V^k \frac{(\gamma-1)}{V^2}] [\delta^{jk} (=0) + V^j V^k \frac{(\gamma-1)}{V^2}] = \gamma^2 V^i V^j \rho + p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} + p (V^i)^2 V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} + \\ &+ p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} + p (V^j)^2 V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} + p (V^k)^2 V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} = \gamma^2 V^i V^j \rho + 2p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} + \\ &+ p V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^4} [(V^i)^2 + (V^j)^2 + (V^k)^2] = \gamma^2 V^i V^j \rho + 2p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} + p V^i V^j \frac{(\gamma-1)^2}{V^2} = \\ &= \gamma^2 V^i V^j \rho + p V^i V^j \frac{(\gamma-1)}{V^2} (2 + \gamma - 1) = \gamma^2 V^i V^j (p + \rho) \quad (\text{as } \frac{(\gamma^2-1)}{V^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} = \gamma^2 \text{ if } c=1). \end{aligned}$$

Totally:

$$T^{ij} = p \delta^{ij} + (p + \rho) V^i V^j \gamma^2 \quad (\text{for the space components})$$

$$T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) U^\alpha U^\beta \quad (\text{for all 4 components, but in weak fields } (\eta^{\alpha\beta}))$$

where $U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma \frac{dx^i}{dt} = \gamma V^i$ and $U^0 = \gamma c$.

At last, for any gravitational fields ($\eta^{\alpha\beta} \gg \gg \gg g^{\alpha\beta}$):

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu \quad (c=1).$$

Par. 2.6: The geodesic Equation.

A free falling parachutist does not have any floor over which his body can rest; therefore, he does not detect any gravitational acceleration and he feels as if floating in the vacuum. He realizes he is falling only if he looks at the moving objects around. Therefore, for a free falling particle, there is a reference system in which $\vec{a} = 0$, that is:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{free falling in Euclidean coordinates}) \quad (2.37)$$

with $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$.

But we can see (2.37) in the following way:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

If we multiply both sides by $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ and consider that:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} &= \delta_\mu^\lambda, \text{ we'll have:} \\ \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \quad (\text{free falling in curvilinear coordinates}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

(equation of the geodesic, where geodesic, on the Earth, is the shortest path between two places)

$$\text{with } \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}.$$

Par. 2.7: The relation between $g_{\mu\nu}$ and $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

We already got such a relation in a context all geometric (see (1.35)). Now we get the same relation starting from a direct calculation:

We already know that: $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$; now we apply $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ to it:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}; \text{ if we now remember that } \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}, \text{ we have:}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \quad (2.39)$$

Similarly, we also calculate $\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}$ and $\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}$, from which:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{k\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^k; \text{ now, by defining a reciprocal matrix (or tensor) } g^{\nu\sigma} \text{ so that:}$$

$g^{\nu\sigma} g_{k\nu} = \delta_k^\sigma$, we'll have, therefore:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right), \quad (2.40)$$

which is exactly what we got in a purely geometrical context in Chapter 1.

Par. 2.8: The Newtonian limit.

We know that in the Newtonian limit ($V \ll c$): $d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - \vec{V}^2 dt^2 \cong c^2 dt^2$

This is to say that $V^i = dx^i / dt \propto dx^i / d\tau \ll dx^0 / d\tau \propto dx^0 / dt = d(ct) / dt = c$, that is, indeed: $dx^i / d\tau \ll dx^0 / d\tau$.

So, (2.38) becomes: $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$ (with the convention $c=1$); moreover, as, in this limit, the field is stationary, $g_{\mu\nu}$ tends to $\eta_{\mu\nu}$ (const) and so the time derivatives of $g_{\mu\nu}$ are zero, and so, according to (2.40):

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \quad \text{e} \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{with } |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad \text{and so: } \Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \quad \text{and:}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} = 0 \quad \text{from which:}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} = 0 \quad \text{and} \quad (2.41)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad \text{from which: } \frac{dt}{d\tau} = C.$$

Now, we know from Newton's gravitation that: $m\vec{a} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$, from which: $\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$,

but: $\frac{GM}{r^2} \hat{r} = \nabla \left(-\frac{GM}{r}\right) = \nabla \phi$ (con $\phi = -\frac{GM}{r}$) and so: $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \phi$ and from both this one and (2.41), we have: $h_{00} = -2\phi + \text{const}$; as at infinite: $h_{00} = \phi = 0$, then $\text{const}=0$ and:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\phi = -(1 + 2\phi) \quad (2.42)$$

Poisson's equation:

now, we define, with simplicity, the flux of the acceleration vector $\vec{a}$:

$$\Phi(\vec{a}) ; \quad \text{we have: } d\Phi(\vec{a}) = \vec{a} \cdot d\vec{S} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{u} dS = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta dS = -GM \frac{dS_n}{r^2} = -GM d\Omega, \quad \text{from}$$

which:

$$\Phi(\vec{a}) = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = -GM \int d\Omega = -4\pi GM, \quad \text{but: } M = \int_V \rho(x, y, z) dV, \quad \text{from which:}$$

$$\Phi(\vec{a}) = -4\pi G \int_V \rho(x, y, z) dV = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \text{for Theorem of Div.} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV, \quad \text{that is:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = -4\pi G \rho(x, y, z)$$

Now, as we know from mathematics that $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$, then: $\nabla \phi = -\vec{a}$ and so:

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{Poisson's Equation}) \quad (2.43)$$

Par. 2.9: The Riemann-Christoffel Curvature Tensor.

At Par. 2.7 we proved that $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right)$, that is, exactly what we got at Chapter 1, through (1.35), in a purely geometrical basis. Now, it could be possible, but a bit boring, to deduct the form of the Riemann-Christoffel curvature tensor through direct

calculations, purely mathematical, exactly like in Par. 2.7, but we would get exactly what already obtained at Chapter. 1 with (1.41), here reported again, and obtained in a more suitable geometrical basis and where we will use Greek letters for the indexes, to show that here we are talking about gravitational fields with any intensity and also reminding here that those indexes have four values each (space-time), three for space and one for time:

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{\kappa} - (\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (2.43b)$$

and also $R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} = g^{\lambda\sigma}R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, from which, also: $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma}R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma}$ and reminding the expression (2.40) for Γ_{ab}^c :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma}R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} = \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}[g^{\sigma\rho}(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}})] - \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}[g^{\sigma\rho}(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\rho}})] + g_{\lambda\sigma}[\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}] \quad (2.44)$$

Now, we know that $g_{\lambda\sigma}g^{\sigma\rho} = \delta_{\lambda}^{\rho}$, from which: $\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}(g_{\lambda\sigma}g^{\sigma\rho}) = 0$ and so, also through

(2.39), that is, the following: $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = g_{ij}\Gamma_{ik}^{\mu} + g_{\mu i}\Gamma_{\alpha k}^{\mu}$, we have:

$$g_{\lambda\sigma}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}g_{\lambda\sigma} = -g^{\sigma\rho}(\Gamma_{k\lambda}^{\eta}g_{\eta\sigma} + \Gamma_{k\sigma}^{\eta}g_{\eta\lambda}) \quad (2.45)$$

where we have made a small rearranging of indexes, which have (those indexes) generic values, that is, we don't care if we use j or k; what's important is that they can have all four values, as we already know, and that their repetition is consistent.

If we go back to (2.44), it becomes, through (2.45):

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}] - [\Gamma_{k\lambda}^{\eta}g_{\eta\sigma} + \Gamma_{k\sigma}^{\eta}g_{\eta\lambda}]\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + [\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\eta}g_{\eta\lambda}]\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} + g_{\lambda\sigma}[\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}] \quad \text{that is:} \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}] + g_{\eta\sigma}[\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{k\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}] \quad (2.46)$$

As already made at the end of Par. 1.3, we deduce three properties of the tensor $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, which are directly verifiable:

- Symmetry $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$
- Antisymmetry $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}$
- Cyclicity $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$

The Ricci Tensor:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}) \quad R_{\mu\kappa} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \quad (2.47)$$

and one can directly verify that : $R_{\mu\kappa} = -g^{\lambda\nu}R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +g^{\lambda\nu}R_{\mu\lambda\kappa\nu}$

It's then clear the strong relationship of such a tensor with the Gauss curvature (see (1.40), bidimensional), from which its name curvature tensor, indeed.

The Bianchi's Identity:

if we put ourselves in a locally inertial reference system (not strong gravitational field) all Γ_{ab}^c are zero; in fact, the difference between the geodesic equation of an Euclidean space (2.37) and that of a space strongly curved up by gravity, that is, the (2.38), is really the presence of a Γ_{ab}^c . In a locally inertial coordinate system, therefore, (2.46) yields (derivation ; η expressed by the presence of $\frac{\partial}{\partial x^\eta}$):

$$R_{\lambda\mu\nu k; \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] \quad (2.48)$$

and so, by direct verification, we have:

$$R_{\lambda\mu\nu k; \eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu; k} + R_{\lambda\mu k\eta; \nu} = 0$$

By contracting (by multiplying with), in the above equation, λ, ν with $g^{\lambda\nu}$, we have:

$$R_{\mu k; \eta} - R_{\mu\eta; k} + R_{\mu k\eta; \nu}^\nu = 0 \text{ and by contracting again:}$$

$$R_{; \eta}^\mu - R_{\eta; \mu}^\mu - R_{\eta; \nu}^\nu = 0 \text{ which is the same as to say also that (the last two terms are similar:}$$

$$2x \gg \gg 1/2):$$

$$(R_{\eta}^\mu - \frac{1}{2} \delta_{\eta}^\mu R)_{; \mu} = 0 \text{ and } (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{; \mu} = 0 \quad (2.49)$$

Chapter 3: The Einstein's Equations of the Gravitational Field.

Par. 3.1: The ten Einstein's Equations of the Gravitational Field.

They are 16 equations, actually, as they contain rank 2 tensors, that is, with two indexes each, and everyone of them can have 4 values, and so $4 \times 4 = 16$, but such equations are not all linearly independent among them, that is, there are doubles, and the independent ones are ten, indeed.

We know from (2.42) that $g_{00} = -(1 + 2\phi)$ (contact point with Newton's theory and starting base), while from (2.36) we know that, for non relativistic matter: $T_{00} = \rho c^2 = \rho$ (with normalization $c=1$); we also have that:

$$\Delta g_{00} = \nabla^2 g_{00} = \nabla^2 [-(1 + 2\phi)] = -2\nabla^2 \phi = -8\pi G \rho = -8\pi G T_{00}, \text{ that is:}$$

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}; \text{ so we can suppose, out of extension, that the following equality holds:}$$

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta} \text{ and for gravitational fields of any intensity:}$$

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

Let's deduce, now, five peculiarities $G_{\mu\nu}$ must have:

A) by definition, $G_{\mu\nu}$ is a tensor, as the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ is

B) $G_{\mu\nu}$ is consisting of terms with second derivatives of the metric tensor (just look at $\nabla^2 g_{00}$)

C) $G_{\mu\nu}$ is symmetric, as well as $T_{\mu\nu}$

D) as $T_{\mu\nu}$ is conserved ($T_{\mu\nu;\mu} = 0$), then $G_{\mu\nu}$ and similars are, as well ($G_{\nu;\mu}^\mu = 0$)

E) for weak stationary fields, non relativistic ones, we have $G_{\mu\nu} = \nabla^2 g_{\mu\nu}$

A and B say that $G_{\mu\nu}$ is proportional to the curvature tensor (2.46), or better to (2.48), clearly made of second derivatives of the metric tensor.

Moreover, the symmetry of indexes wants that the curvature tensor is represented by the Ricci tensor $R_{\mu k} = R_{k\mu}$ and by the symmetric, as well, $R = R_\mu^\mu$ (see the paragraph on the Ricci tensor):

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (3.1)$$

but, through (2.49), we have also seen that:

$$(R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R)_{;\mu} = 0, \text{ from which: } R_{\nu;\mu}^\mu = \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R_{;\mu} = \frac{1}{2} R_{;\nu}; \text{ now, multiply (3.1) by } g^{\mu\mu}:$$

$$G_\nu^\mu = C_1 R_\nu^\mu + C_2 R g_\nu^\mu \text{ and } G_{\nu;\mu}^\mu = C_1 R_{\nu;\mu}^\mu + C_2 R_{;\nu} = \frac{C_1}{2} R_{;\nu} + C_2 R_{;\nu} = (\frac{C_1}{2} + C_2) R_{;\nu}$$

For the peculiarity D, $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ or $R_{;\nu} = 0$; the second one must be rejected, as:

$G_\mu^\mu = (C_1 + g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} C_2) R = (C_1 + 4C_2) R = -8\pi G T_\mu^\mu$, and so, if $R_{;\nu} = \partial R / \partial x^\nu$ becomes zero, the same must happen to $\partial T_\mu^\mu / \partial x^\nu$, but now we aren't yet in the case of non relativistic matter.

$$\text{Therefore: } G_{\mu\nu} = C_1 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \quad (3.2)$$

Now, because of the peculiarity E, we figure out C_1 : for non relativistic systems, we always have:

$$|T_{ij}| \ll T_{00}, \text{ that is: } |G_{ij}| \ll G_{00}, \text{ from which, for the above (3.2): } R_{ij} \cong \frac{1}{2} g_{ij} R; \text{ moreover,}$$

$$g_{\alpha\beta} \cong \eta_{\alpha\beta} \text{ (Minkowski's tensor) and so: } R_{kk} \cong \frac{3}{2} R \text{ and } R_{00} \cong \frac{R}{2}.$$

(3.2) with $\mu = \nu = 0$ ($g_{00} \cong \eta_{00}$) yields:

$$G_{00} = C_1 (R_{00} - \frac{1}{2} (-1) 2 R_{00}) = 2 C_1 R_{00}; \text{ moreover, in case of weak fields, we can say (see}$$

(2.46) with $\Gamma_{ab}^c = 0$ or directly (2.48)):

$$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} [\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}] \text{ and } R_{\mu k} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu k}; \text{ being the field static, the time derivatives are zero:}$$

$$R_{00} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda 0 \nu 0} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\nu} (\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda}) = \frac{1}{2} \eta^{ij} (\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}) - \frac{1}{2} \eta^{00} 0 = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}, \text{ from which:}$$

$$G_{00} = 2 C_1 \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} = C_1 \nabla^2 g_{00}, \text{ from which } (C_1 = 1) \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \text{ and so:}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

which are the **Einstein's equations of the gravitational field**, and we rewrite them completely, now without the normalization $c=1$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

which tell us that the curvature ($\propto R_{\mu\nu}, R$) of the space-time is equal to the presence of matter-energy ($\propto T_{\mu\nu}$) in it!!!

Now, by contracting with $g^{\mu\nu}$, we have: $R - 2R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\mu}$, that is: $R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\mu}$ and so:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\lambda}) \text{ (another form for the Einstein's equations).}$$

In the vacuum, $f(T)=0$ and so $R_{\mu\nu} = 0$.

Chapter 4: Classic tests of Einstein's theory.

Par. 4.1: The metric.

Here a rigorous derivation of the Schwarzschild's Metric is given; in order to jump to a more simple deduction, which leads to the (4.5e), please see below.

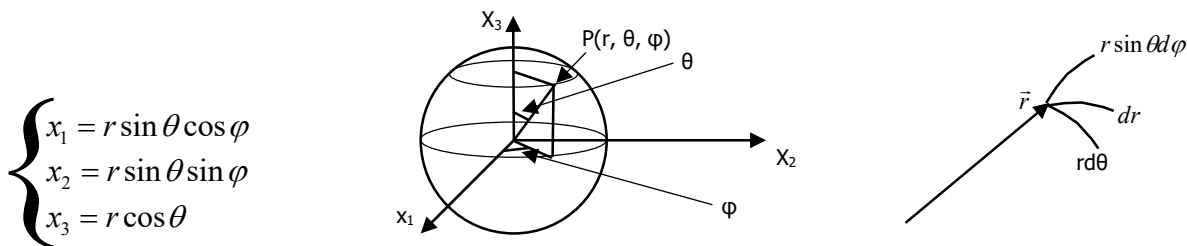
We still have $c=1$, as a simplifying convention. Now, we define a general metric tensor through which a gravitational field is static and isotropic; static means that the metric tensor does not depend on time, about its form and its characteristics, with a clear reference to its coefficients. Isotropic means that there is a dependance from the irrotational invariants; in fact, we know that the norm of a vector and the scalar product between two vectors are invariant for rotations:

$$\vec{x}^2 = |\vec{x}|^2, (d\vec{x})^2, \vec{x} \cdot d\vec{x}$$

All this for orthogonal coordinates almost Minkowskian (almost $\eta_{\alpha\beta}$)

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad d\tau^2 = F(r) dt^2 - 2E(r) dt dx - D(r) (x \cdot dx)^2 - C(r) dx^2 \quad (4.1)$$

$r = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2}$ and in spherical coordinates:



$$d\tau^2 = F(r) dt^2 - 2rE(r) dt dr - r^2 D(r) (dr)^2 - C(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Now, we define the linear application $t' = t + \phi(r)$ and get rid of the non diagonal elements (combined) by putting:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}; \text{ there exists a linear rototranslation/application which reduces to a canonical}$$

form the above quadratic form:

$$d\tau^2 = F(r) dt'^2 - G(r) dr^2 - C(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \text{ with:}$$

$$G(r) = r^2 (D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)})$$

Let's define $r'^2 = C(r) r^2$; then, we get the standard form:

$$d\tau^2 = B(r')dt'^2 - A(r')dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.2)$$

$$\text{with } B(r') = F(r) \quad A(r') = \left(1 + \frac{C(r)}{G(r)}\right) \left(1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr}\right)^{-2}$$

We are now interested in the standard form (4.2):

$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ and through a comparison with the general expression of the metric (2.9), we get: $g_{rr} = A(r)$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$, $g_{tt} = -B(r)$ and as $g_{\mu\nu}$ is orthogonal, we have that: $g^{rr} = A^{-1}(r)$, $g^{\theta\theta} = r^{-2}$, $g^{\varphi\varphi} = r^{-2} \sin^{-2}\theta$, $g^{tt} = -B^{-1}(r)$.

Then, as we know that according to (2.40): $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right)$, it comes out that the only non zero quantities are:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr} , \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A(r)} , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r \sin^2\theta}{A(r)} , \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr} , \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} , \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta , \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} , \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta , \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} . \end{aligned}$$

Now, we calculate the Ricci tensor ($\lambda = \nu$ in $R_{\mu\nu}^\lambda$ of the (2.43b)):

$$R_{\mu k} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \quad \text{and we remind that } \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^k} \text{ is symmetric over } \mu \text{ and } k ,$$

also by a direct verification; therefore, we totally have:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'(r)}{A(r)} \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta \cdot R_{\theta\theta} , \quad R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{A(r)} , \quad R_{\mu\nu} = 0 \text{ for } \mu \neq \nu . \end{aligned}$$

Par. 4.2: The Schwarzschild's Solution.

We already know that: $d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$

Moreover, in the vacuum $R_{\mu\nu} = 0$, so:

$$R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{tt} = 0 ; \quad (4.3)$$

moreover, we notice that:

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \text{ and for the (4.3), we have: } \frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B} , \text{ that is:}$$

$$A(r)B(r) = \text{const} . \quad (4.4)$$

Then, for $r \rightarrow \infty$, the metric tensor $g_{\mu\nu}$ must get close to the Minkowski's tensor $\eta_{\mu\nu}$ in spherical coordinates, that is: $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$, from which, for the (4.4):

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \text{ and by using this one in the expressions for } R_{\theta\theta} \text{ and } R_{rr} , \text{ we have:}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r) \text{ and } R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}(r)}{2rB(r)} ; \text{ by putting } R_{\theta\theta} = 0 , \text{ we have:}$$

$$\frac{d}{dr} rB(r) = rB'(r) + B(r) = 1, \text{ from which: } rB(r) = r + \text{const}.$$

Moreover, for $r \rightarrow \infty$: $g_{tt} = g_{00} = -B = -1 - 2\phi \rightarrow (\phi = -\frac{GM}{r}) \rightarrow$

$B(r) = [1 - \frac{2GM}{r}]$ and $A(r) = [1 - \frac{2GM}{r}]^{-1}$ and so, finally:

$$d\tau^2 = [1 - \frac{2GM}{r}] dt^2 - [1 - \frac{2GM}{r}]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.5)$$

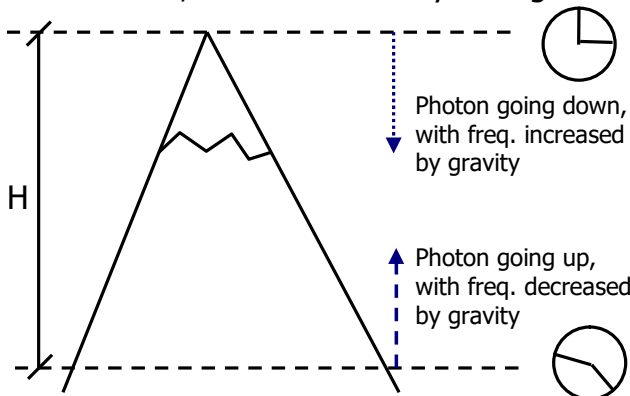
(Schwarschild's solution)

We use the Schwarzschild's Solution to describe the spacetime out of the bodies; in fact, we deal with a mass M and with the potential generated at a distance r from the centre of M itself ($U(r) \propto \frac{GM}{r}$). In order to provide a metric for a spacetime in which we ourselves

are in, like in the case of the cosmology, we create that of Robertson and Walker.

Here is a simplified derivation of the Schwarzschild's metric:

also gravity slows down the time! On a mountain time elapses faster than down in the valley. Of course, on the Earth, the difference is imperceptible, but on a neutron star or in a black hole, that effect is very strong.



$\Delta E = m_0 g H$ (delta energy from the level difference)

$\Delta E = h \Delta \nu$ (delta energy due to the freq. decrease of the photon). From them: $\Delta \nu = m_0 g H / h$.

For a photon, $E = h \nu$, but in relativity: $E = m_0 c^2$,

from which, for a photon: $m_0 = h \nu / c^2$ and so,

for $\Delta \nu$: $\Delta \nu = \nu g H / c^2$ and as time is the reciprocal of the frequency, we have: $\Delta \nu / \nu = \Delta t / t$ and so:

$\Delta t = \frac{g H}{c^2} t$. Therefore, over a time t, we have a slow down Δt due to gravity!

Mountain, gravity and time.

We know that the escape velocity of a celestial body whose mass is M and radius R is: $V = \sqrt{2GM/R}$. If on that body an object is cast vertically with the escape velocity, it will quit the gravitational field of that celestial body and will go towards the infinite, without falling down anymore.

A black hole is a body so compressed (big M and small R) that the escape velocity on its surface reaches the speed of light and so not even the light can escape, from which the name of black hole; moreover, for what above said, we can say that in a black hole time is approximately stopped!

Now, jumping back to the time slowing: $\Delta t = \frac{g H}{c^2} t$, which can be seen as: $dt = \frac{g dr}{c^2} t$ and

considering that $|g| = \frac{GM}{r^2}$, it follows that: $dt = t \frac{GM}{c^2 r^2} dr$, that is:

$$\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow \int \frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \int \frac{dr}{r^2} \rightarrow \ln t = -\frac{GM}{c^2 r} + k \rightarrow$$

$$t = k \cdot e^{-\frac{GM}{c^2 r}} \rightarrow (e^{-x} \approx 1 - x) \rightarrow t = k(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow (t = t_0 \gg r = \infty) \rightarrow t = t_0(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow$$

$$(\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x) \rightarrow t = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (4.5b)$$

On the other hand, we know that the formula for the Lorentz's contraction has the same look of that for the time dilation, but with the root at the denominator, so:

$$r = r_0 / \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \quad (4.5c)$$

We remind of the metric tensor: $d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ and also of the more simple spherical coordinates: $d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$.

(4.5d)

Now, let's consider again the (4.5b) and (4.5c):

$$dt = dt_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \rightarrow dt^2 = dt_0^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dt_0^2 \underline{B(r)} \quad \text{and:}$$

$$dr^2 = dr_0^2 / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \cong dr_0^2 \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dr_0^2 \underline{A(r)} \quad , \text{ as, according to Taylor: } 1/(1-x) \cong (1+x) .$$

Moreover, we have no Lorentz contraction on transversal directions (y and z, as an example), so, for the (4.5d):

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{Schwarzschild Solution}) \quad (4.5e)$$

Par. 4.3: The general equations of motion.

We know that $d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ and we also consider the geodesic equation (2.38): $\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0$ (in p generic, for the moment): we have,

by making μ change:

$$0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)} \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \quad (4.6)$$

$$0 = \frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \quad (4.7)$$

$$0 = \frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{dp} \frac{d\theta}{dp} \quad (4.8)$$

$$0 = \frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} \quad (4.9)$$

Now, as the field is isotropic, we put $\theta = \pi/2$ and so the last two equations, (4.8) and (4.9), becomes:

$$\frac{d}{dp} \left[\ln \frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2 \right] = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dp} \left[\ln \frac{dt}{dp} + \ln B \right] = 0 \quad , \text{ from which:}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = J \quad (\text{constant}) \quad (4.10)$$

$$\frac{dt}{dp} B = \text{const} \quad (=1, \text{ by choice}) \quad (4.11)$$

from which: $\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B}$. Now, by putting (4.10), (4.11) and the condition ($\theta = \pi/2$) used

before, in the (4.6), we'll have:

$$0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{J^2}{r^3 A(r)} + \frac{B'(r)}{2A(r)B^2(r)} \quad \text{and by multiplying, now, by } 2A(r) \frac{dr}{dp} :$$

$$\frac{d}{dp} \left[A(r) \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \right] = 0 \quad \text{that is:}$$

$$A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad (\text{constant}) \quad (4.12)$$

If now we make a system with the equations ($\theta = \pi/2$) just used, then the (4.10), (4.11) and (4.12), we get:

$$d\tau^2 = Edp^2 \quad (4.13)$$

We know that $E=0$ for photons and $E>0$ for material particles.

As $A(r)$ is always positive, we have that the particle can reach r only if (see (4.12)):

$$\frac{J^2}{r^2} + E \leq -\frac{1}{B(r)}. \quad \text{Then, by using (4.11) in (4.10), (4.12) and (4.13), we get:}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = JB(r) \quad (4.14)$$

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad (4.15)$$

$$\text{and } d\tau^2 = EB^2(r)dt^2 \quad (4.16)$$

Now we know that, for weak fields: $B-1=2\phi \rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dt} = J$ and

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi \cong \frac{1-E}{2} \quad (4.17)$$

$$\text{as: } -\frac{1}{B(r)} = -\frac{1}{1+2\phi} \cong (\text{for Taylor}) \cong -(1-2\phi)$$

(4.17) has got a similar correspondance in Newton's classic mechanics.

For general orbits, $r=r(\phi)$; then, we know that:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d\phi}{dp} = J \\ A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \end{cases}$$

$$\text{if we get rid of } dp, \text{ we have: } \frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2}, \quad (4.18)$$

whose solution is:

$$\phi = \pm \int \frac{A^{1/2}(r)dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}} \quad (4.19)$$

Par. 4.4: The deflection of light by the Sun.

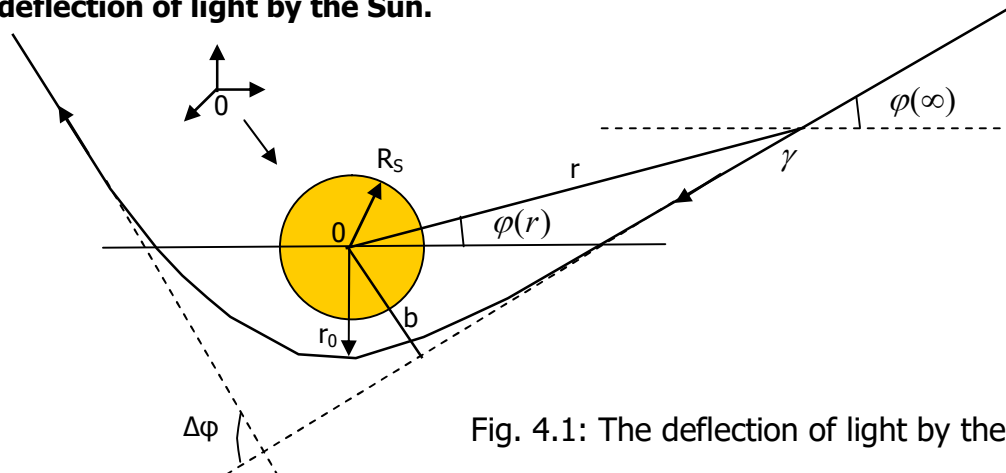


Fig. 4.1: The deflection of light by the Sun.

$R_S = R_{Sun}$; b is the collision parameter. At the infinite, $b = r \sin(\varphi - \varphi_\infty) \cong r(\varphi - \varphi_\infty)$ and:

$-V = \frac{d}{dt} r \cos(\varphi - \varphi_\infty) \cong \frac{dr}{dt}$; V is the motion speed (constant). As at the infinite $A=B=1$, if

we put these two equations in (4.14) and (4.15), we have:

$$J = bV \text{ and} \quad (4.20)$$

$$E = 1 - V^2 \quad (4.21)$$

(4.21) is trivial; in order to get the (4.20), we see that:

$b \cong r(\varphi - \varphi_\infty)$, from which: $0 = dr(\varphi - \varphi_\infty) + r d\varphi$, and so: $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{dr}{dt}(\varphi - \varphi_\infty)r = bV = J$

For $r = r_0$ we have that $dr/d\varphi = 0$ and (4.18) then becomes: $J = r_0 \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{1/2}$ and

(4.19) becomes, after an easy calculation:

$$\varphi(r) = \varphi(\infty) + \int_r^\infty \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left[\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{B(r)} - 1 + V^2 \right) \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{-1} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (4.22)$$

The total variation of φ is: $2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty|$, while, if the ray of light walked unperturbed, we would have a variation of π , so, with reference to Fig. 4.1, we have: $\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi$; for a photon, $V^2 = 1$ and (4.22) yields:

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty A^{1/2}(r) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r} \quad (4.23)$$

Now, by using the (Taylor's) developments due to Robertson:

$$A(r) = 1 + 2\frac{GM}{r} + \dots, \quad B(r) = 1 - 2\frac{GM}{r} + \dots, \text{ we have:}$$

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[\frac{1 - 2\frac{GM}{r_0} + \dots}{1 - 2\frac{GM}{r} + \dots} \right] - 1 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[1 + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \dots \right] - 1 \cong$$

$$\cong \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 2GM \frac{(r_0 - r)}{rr_0} - 1 \right] = \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]$$

The last equality can be directly verified.

(4.23) becomes, for Taylor:

(in order to solve the first two integrals, put $\frac{r_0}{r} = \cos x$, while for the third, put $\frac{r_0}{r} = t$ and

the integral will be $\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$)

1st Int.	2nd Int.	3rd Int.
-------------	-------------	-------------

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{GM}{r} + \frac{GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] dr$$

(the three terms in the yellow frame come from the product between $A^{1/2}(r) = 1 + \frac{GM}{r} + \dots$ and

$\left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]^{-1/2} \cong \left[1 + \frac{GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]$, and the fourth has been neglected, as it was much lower than the

others, as we have to consider that we are under the convention $c=1$ and in the denominators there would be some c^2 and the fourth neglected term would have been even a c^4 at its denominator)

that is: $\varphi(r) - \varphi(\infty) = \sin^{-1}\left(\frac{r_0}{r}\right) + \frac{GM}{r_0} \left[1 + 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} - \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}\right] + \dots$ and so:

$\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0}$, and if we remind our normalization ($c=1$), we finally have: $\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0 c^2}$; with

$r_0 = R_s = 6,95 \cdot 10^8 m$ and $M_s = 1,97 \cdot 10^{30} kg$, we have:

$\Delta\varphi = 1,75''$, in perfect agreement with experimental results. In reality, when in 1919 the deflection of star light by the Sun was measured in Brazil, during an eclipse, the accuracy of the measurement was as big as the measure itself.

Par. 4.5: An alternative calculation of the deflection, with profiles of antagonism to GTR.

This method (Firk) is based on the variation of velocity the light undergoes when it approaches a mass; for this reason I see profiles of antagonism to pure GTR. Then, there exist also other methods, more or less similar, based on such a supposition and it seems that, if we take into account the smallest cyphers after the point, those results are even more similar to experimental values.

First of all, we remind that, according to Schwarzschild (see, for instance, (4.5e)):

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2; \quad (4.24)$$

Then, we know that, in general: $d\tau^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$ and as, for a photon, $(d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2$, we have: $d\tau^2 = 0$, from which, for the (4.24):

$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$; moreover, if we consider light radially travelling towards the Sun, we can get rid of the components in $d\theta$ and $d\varphi$:

$$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2; \quad (4.25)$$

The speed of light is $c = dr/dt$ far from the mass of the Sun, while, close to it, the (4.25) holds, from which we get:

$V = dr/dt = c(B(r)/A(r))^{1/2} \neq c$; from Par. 4.2, we have the values for $A(r)$ and $B(r)$, in which, during calculations, we do not forget that now $c=1$ does not hold anymore; therefore:

$$B(r) = \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right] \text{ e } A(r) = \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right]^{-1} \cong \left[1 + \frac{2GM}{rc^2}\right]$$

From the developments on the variable $\frac{2GM}{rc^2}$, we easily have that:

$$V/c = \left(\left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right] / \left[1 + \frac{2GM}{rc^2}\right]\right)^{1/2} \cong \left[1 - \frac{2GM}{2rc^2}\right] \left[1 - \frac{2GM}{2rc^2}\right] \cong \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right], \text{ that is: } V \cong c \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right]$$

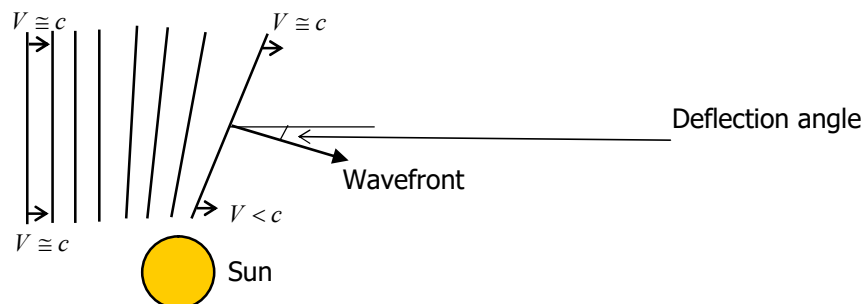


Fig. 4.2: The velocities of the wavefronts.

With reference to Figure 4.2, the part of wavefront which is farther from the mass M has speed c , while the closer one has speed $V < c$.

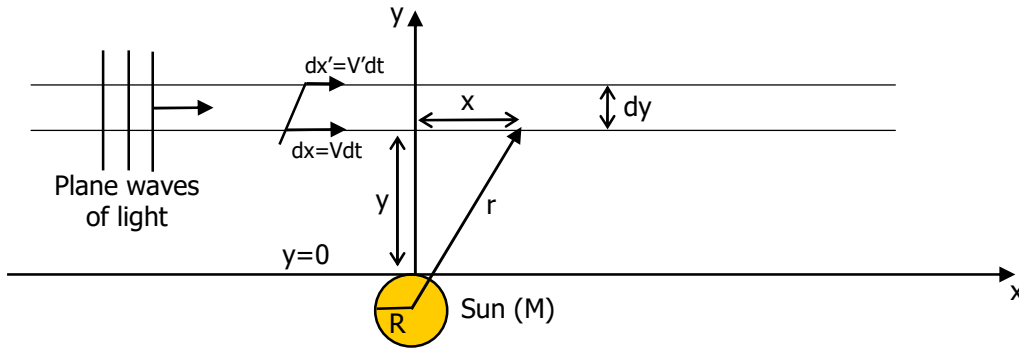


Fig. 4.3: Drawing for calculations.

Now, with reference to Figure 4.3, we have:

$$r^2 = (y + R)^2 + x^2 \text{ (eq. of a circle);} \quad (4.26)$$

now, we apply the operator $\partial/\partial y$ to (4.26), so having:

$2r(\partial r/\partial y) = 2(y + R)$, from which: $\partial r/\partial y = (y + R)/r$ and on the surface of the mass M:

$$\partial r/\partial y|_{y \rightarrow 0} = R/r$$

Now: $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} (c[1 - \frac{2GM}{rc^2}]) = \frac{2GM}{r^2 c} \frac{\partial r}{\partial y}$, from which:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y \rightarrow 0} = \frac{2GM}{r^2 c} \left. \frac{\partial r}{\partial y} \right|_{y \rightarrow 0} = \frac{2GM}{r^2 c} \frac{R}{r} = \frac{2GMR}{r^3 c}.$$

Now, we calculate the difference between the paths dx and dx' of wavefronts at a vertical distance y and $y+dy$, at which light has got velocities V and V' respectively:

$dx' = V'dt$ and $dx = Vdt$, from which:

$$dx' - dx = V'dt - Vdt = dt(V' - V); \quad (4.27)$$

moreover, we have, for Taylor: $V' = V + (\partial V/\partial y)dy$, that is: $V' - V = (\partial V/\partial y)dy$ and (4.27)

becomes:

$$dx' - dx = (\partial V/\partial y)dydt \quad (4.28)$$

Then, still from Figure 4.3 and from (4.28), we have:

$$d\alpha = (dx' - dx)/dy = (\partial V/\partial y)dt = (\partial V/\partial y)dx/V.$$

The total deflection $\Delta\alpha$ from $-\infty$ and $+\infty$ is, by considering that, in such a range, V is almost always equal to c (except for when it's right close to M):

$$\Delta\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{V} (\partial V/\partial y) dx \cong \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial V/\partial y) dx \text{ and, close to the surface of M (y=0):}$$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2GMR}{r^3 c} dx = \frac{2GMR}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2GMR}{c^2} \left[\frac{x}{R^2 (R^2 + x^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2GMR}{c^2} \cdot \frac{2}{R^2}, \text{ that is:}$$

$$\Delta\alpha = \frac{4GM}{Rc^2} = 1,75'' \text{ , right what we got in Par. 4.4!!!}$$

Par. 4.6: The precession of the perihelion of planets.

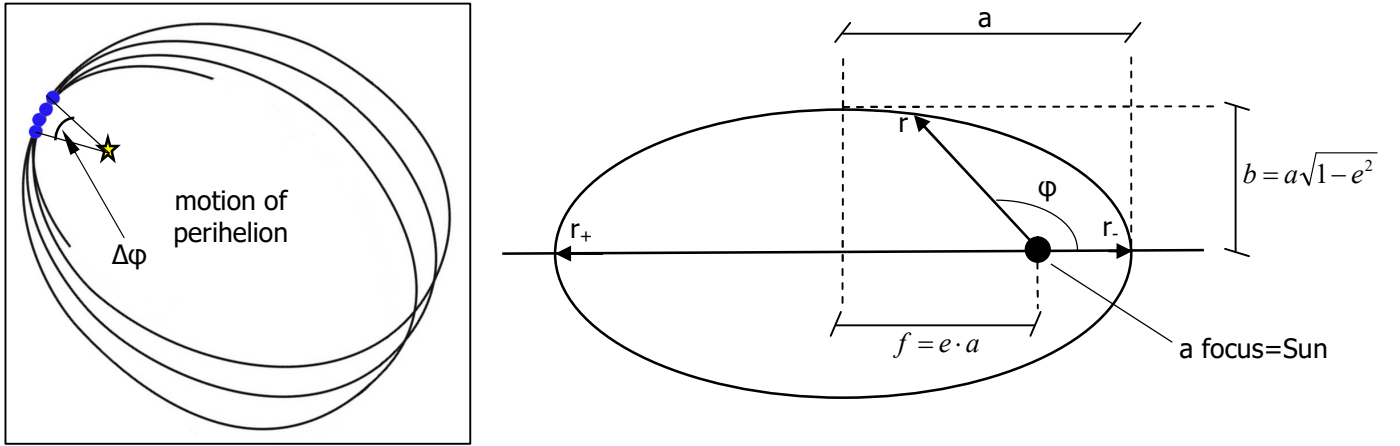


Fig. 4.4: The precession of the perihelion of Mercury.

For planets, and in particular for Mercury, through centuries, we notice that the perihelion moves. This comes from the General Relativity. In r_+ and r_- , we obviously have that

$\frac{dr}{d\varphi} = 0$. Then, we already know that (see the (4.18)):

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2}; \quad (4.29)$$

this one, in r_+ and r_- , becomes: $\frac{1}{r_{\pm}^2} - \frac{1}{J^2 B(r_{\pm})} = -\frac{E}{J^2}$, that is: $\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{J^2 B(r_+)} = -\frac{E}{J^2}$ and

$$\frac{1}{r_-^2} - \frac{1}{J^2 B(r_-)} = -\frac{E}{J^2}, \text{ from which: } E = \frac{\frac{r_+^2}{B(r_+)} - \frac{r_-^2}{B(r_-)}}{r_+^2 - r_-^2} \text{ and } J^2 = \frac{\frac{1}{B(r_+)} - \frac{1}{B(r_-)}}{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}} \quad (4.30)$$

We have, still for the (4.29), that: $\varphi(r) = \varphi(r_-) + \int_{r_-}^r \frac{A^{1/2}(r)dr}{r^2 \left[\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}}$, from which, for

the (4.30), we have:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \int_{r_-}^r \left[\frac{r_-^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2 [B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} A^{1/2}(r) r^{-2} dr \quad (4.31)$$

The total variation of φ is: $\Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)|$. If we did not have any precession, we would have: $2|\pi| = 2\pi$, as, with reference to Fig. 4.4, if, as per use, we put $\varphi=0$ at the position of r_- , then r_+ is at $\varphi=\pi$. The precession of the orbit is: $\Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi$.

We remind the Robertson's developments above presented:

$$A(r) = 1 + 2\frac{GM}{r} + \dots, \quad B(r) = 1 - 2\frac{GM}{r} + \dots \quad (4.42)$$

$$(\text{and } A^{-1}(r) = 1 - 2\frac{GM}{r} + \dots, \quad B^{-1}(r) = 1 + 2\frac{GM}{r} + \dots) \quad (4.33)$$

We need a 2nd order development for B^{-1} , otherwise, in the (4.31), B doesn't yield anything $\propto \frac{1}{r^2}$. For $B^{-1}(r)$ we then have (for 2nd order Taylor):

$$B^{-1}(r) \cong (1 - 2\frac{GM}{r} + \dots)^{-1} \cong 1 + 2\frac{GM}{r} + 4\frac{G^2M^2}{r^2} + \dots \quad (4.34)$$

Through such developments, the radicand in the (4.31), that is:

$$R = \frac{r_-^2[B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2[B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2} \quad \text{can reduce to a quadratic form in } \frac{1}{r} ;$$

anyway, we can notice that such a quantity cancels for $r = r_{\pm}$, therefore:

$$R = \frac{r_-^2[B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2[B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2} = C(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r})(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}), \text{ as the generic expression } C(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r})(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}) \quad (4.35)$$

goes to zero exactly when $r = r_{\pm}$. C can be calculated by executing the $\lim_{r \rightarrow \infty}$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_-^2[B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2[B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2} = \frac{r_-^2[1 - B^{-1}(r_-)] - r_+^2[1 - B^{-1}(r_+)]}{r_+^2 r_-^2 [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} C(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r})(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}) = C(\frac{1}{r_-})(-\frac{1}{r_+}) = \frac{-C}{r_- r_+}, \text{ so: } C = \frac{r_+^2[1 - B^{-1}(r_+)] - r_-^2[1 - B^{-1}(r_-)]}{r_+ r_- [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} ; \text{ now, in}$$

such an expression for C, we use the (4.34) (also because by a development of B^{-1} of a lower order, like in the (4.33), we would get the trivial result $C=1, \dots$); we get:

$$C \cong 1 - 2MG(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}); \quad (4.36)$$

$$\text{in fact: } C = \frac{r_+^2[1 - B^{-1}(r_+)] - r_-^2[1 - B^{-1}(r_-)]}{r_+ r_- [B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} = \frac{r_+^2(\frac{-2GM}{r_+} - \frac{4G^2M^2}{r_+^2}) - r_-^2(\frac{-2GM}{r_-} - \frac{4G^2M^2}{r_-^2})}{r_+ r_- (\frac{2GM}{r_+} - \frac{2GM}{r_-} + \frac{4G^2M^2}{r_+^2} - \frac{4G^2M^2}{r_-^2})} =$$

$$= \frac{(r_- - r_+)}{(r_- - r_+) + 2GM(\frac{r_-}{r_+} - \frac{r_+}{r_-})} = \frac{(r_- - r_+)}{(r_- - r_+) + \frac{2GM}{r_- r_+}(r_-^2 - r_+^2)} = \frac{1}{1 + 2GM \frac{(r_- + r_+)}{r_- r_+}} = \frac{1}{1 + 2GM(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-})} \cong$$

$$\cong 1 - 2GM(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}) . \text{ By introducing now such a C into the (4.35) and later by introducing}$$

what was obtained into the (4.31), we get:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) \cong \dots \cong [1 + MG(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-})] \int_{r_-}^r \frac{[1 + \frac{GM}{r}]dr}{r^2[(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r})(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+})]^{1/2}} ; \quad (4.37)$$

$$\text{now, we define: } \frac{1}{r} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}) \sin \Psi ; \quad (4.38)$$

we get: ($r = r_- \rightarrow \Psi = -\pi/2$ and $r = r_+ \rightarrow \Psi = \pi/2$) ; moreover, we just get dr as a function of $d\Psi$ from the (4.38):

$d\left(\frac{1}{r}\right) = d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)\sin\Psi\right] \rightarrow -\frac{1}{r^2}dr = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)\cos\Psi d\Psi \rightarrow$
 $\rightarrow dr = \frac{-r^2}{2}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)\cos\Psi d\Psi$, and we introduce what we get into the dr-integral in the (4.37):

$$\begin{aligned}
 \varphi(r) - \varphi(r_-) &\cong [1 + MG\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)] \int_{r_-}^r \frac{[1 + \frac{GM}{r}]}{r^2 \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\right]^{1/2}} dr = \\
 &= [1 + MG\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)] \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1 + \frac{GM}{r}]}{r^2 \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\right]^{1/2}} \left(-\frac{r^2}{2}\right) \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \cos\Psi d\Psi ; \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

in order to get a lighter equation, now we name: $a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)$ and $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$,
 so: $\frac{1}{r_+ r_-} = (a^2 - b^2)$ and, moreover, the (4.38) becomes: $\frac{1}{r} = a + b \sin\Psi$. So, the (4.39) becomes:

$$\begin{aligned}
 \varphi(r) - \varphi(r_-) &\cong -b(1 + 2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1 + GM(a + b \sin\Psi)]}{\left\{\left[\frac{1}{r_-} - (a + b \sin\Psi)\right]\left[(a + b \sin\Psi) - \frac{1}{r_+}\right]\right\}^{1/2}} \cos\Psi d\Psi = \\
 &= -b(1 + 2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1 + GM(a + b \sin\Psi)]}{\left[-\frac{1}{r_+ r_-} - (a + b \sin\Psi)^2 + (a + b \sin\Psi)\left(\frac{1}{r_-} + \frac{1}{r_+}\right)\right]^{1/2}} \cos\Psi d\Psi = \\
 &= -b(1 + 2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1 + GM(a + b \sin\Psi)]}{[-(a^2 - b^2) - (a + b \sin\Psi)^2 + 2a(a + b \sin\Psi)]^{1/2}} \cos\Psi d\Psi = \\
 &= -b(1 + 2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} \frac{[1 + GM(a + b \sin\Psi)]}{[b^2(1 - \sin^2\Psi)]^{1/2}} \cos\Psi d\Psi = -(1 + 2aMG) \int_{-\pi/2}^{\Psi} [1 + GM(a + b \sin\Psi)] d\Psi = \\
 &= -(1 + 2aMG) \left[\int_{-\pi/2}^{\Psi} (1 + aGM) d\Psi + \int_{-\pi/2}^{\Psi} bGM \sin\Psi d\Psi \right] = \\
 &= -(1 + 2aMG) \left[(1 + aGM) \left| \Psi \right|_{-\pi/2}^{\Psi} + bGM \left| -\cos\Psi \right|_{-\pi/2}^{\Psi} \right] = -(1 + 2aMG) \left[(1 + aGM) \left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) - bGM \cos\Psi \right] = \\
 &= -(1 + 2aMG)(1 + aGM) \left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) + bGM(1 + 2aMG) \cos\Psi = -\left(\Psi + \frac{\pi}{2} \right) (1 + 3aMG + 2a^2 M^2 G^2) + \\
 &+ (bGM + 2abM^2 G^2) \cos\Psi . \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

Now, we know that we are still under the c=1 convention and where we see $\frac{GM}{r}$ it will be, in the end, $\frac{GM}{rc^2}$, so we are talking about a small quantity and it will be even smaller if squared, that is: $\frac{G^2 M^2}{r^2 c^4}$, so, in the (4.40) we will neglect terms with $M^2 G^2$, which will be like $\frac{M^2 G^2}{c^4}$, according to what just explained, once we remove the c=1 convention; so, the (4.40) becomes:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) \cong -(\Psi + \frac{\pi}{2})(1 + 3aMG + 2a^2M^2G^2) + (bGM + 2abM^2G^2)\cos\Psi =$$

$$= -(\Psi + \frac{\pi}{2})(1 + 3aMG) + bGM\cos\Psi \text{ and by re-establishing the values for a and b, we finally}$$

$$\text{get: } \varphi(r) - \varphi(r_-) \cong -(\Psi + \frac{\pi}{2})[1 + \frac{3}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-})MG] + \frac{1}{2}GM(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-})\cos\Psi .$$

Now, as above already reminded, we have: $r = r_+ \rightarrow \Psi = \pi/2$, so:

$$|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| \cong \left| -(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})[1 + \frac{3}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-})MG] + \frac{1}{2}GM(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-})\cos\frac{\pi}{2} \right| = \pi[1 + \frac{3}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-})MG] =$$

$$= \pi[1 + 3aMG] \text{ and finally: } \Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi = (\frac{6\pi MG}{L}) \text{ [rad/rev] , where:}$$

$$L = \frac{1}{a} = [\frac{1}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-})]^{-1} \text{ (L = straight semiside). We remove now the initial (c=1) convention}$$

$$\text{and get: } \Delta\varphi = (\frac{6\pi MG}{Lc^2}); \text{ for Mercury } L = 55,3 \cdot 10^9 m, \text{ so: } \Delta\varphi \cong 5,03 \cdot 10^{-7} rad = 0,1039'', \text{ as}$$

$1'' \approx 4,84 \cdot 10^{-6} rad$. Now, as in a century Mercury makes 415 revolutions, we have $\Delta\varphi_{century} = 43,1185''$, in perfect agreement with experimental measurements, as the very

first measurements on Mercury started in 1765, and Clemence, in 1943, calculated:

$$\Delta\varphi = 43,11'' \pm 0,45'' . \quad (**): \text{ some considerations on the ellipse:}$$

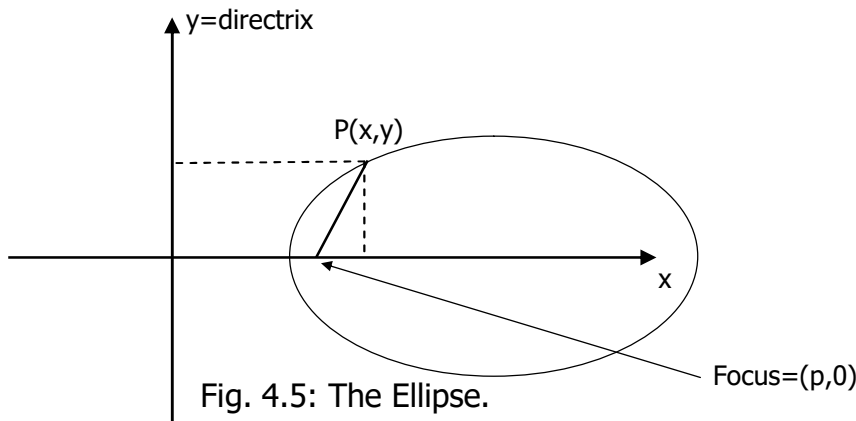


Fig. 4.5: The Ellipse.

we have, by the definition of ellipse, that: $d(P,F) = ed(P,d)$, where e is the eccentricity and d is the directrix. Therefore: $(x-p)^2 + y^2 = e^2x^2$, from which $(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$;

through easy calculations, we get that, for $0 < e < 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, with $a = pe/(1-e^2)$ and

$b = a\sqrt{1-e^2}$, but we also know that $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (by the definition of ellipse), so, by comparison: $a \cdot e = c$. Then, if we also take into consideration the other focus, we have: $d(P,F) + d(P,F') = \text{const} = 2a$; in fact: $d(P,F) = ed(P,d)$ and $d(P,F') = ed(P,d')$ and $d(P,F) + d(P,F') = e[d(P,d) + d(P,d')] = \text{constant}$, of course (by symmetry). Moreover: $r_{\pm} = (1 \pm e)a$, as by looking at Fig. 4.4 and being c the distance between the centre of the ellipse and a focus, we have: $r_+ = a + c = a + ea = (1+e)a$ and $r_- = a - c = a - ea = (1-e)a$ and after

defining L as the straight semiside $(\frac{1}{L} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}))$, we get, after introducing in the last

equation the formulas just provided for r_+ and r_- : $L = (1-e^2)a$.

Par. 4.6: Gravitational waves from the Einstein's Equations.

In a Weak Field Approximation, we express the metric tensor $g_{\mu\nu}$ as the summation of the Minkowski tensor $\eta_{\mu\nu}$ (of a non curved space) and of a perturbation $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad (4.41)$$

Then, we also recall the Ricci Tensor and the Christoffel symbols:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \quad (4.42)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right); \quad (4.43)$$

so we have: ($\eta \rightarrow \text{const}$)

$$R_{\mu\nu} \cong \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + O(h^2) \quad \text{e} \quad (4.44)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) + O(h^2) \quad (4.45)$$

($\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu} = h_{\nu}^{\lambda}$, $\eta^{\lambda\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}$) and by combining those two:

$$R_{\mu\nu} \cong R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda}) \quad (4.46)$$

(d'Alembertian Operator $\Box^2 = \nabla^2(*) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2}$) ; in fact, for the (4.44), we have:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\lambda}) + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\mu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\mu\lambda}) \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu}) + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} (\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\mu}) - \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\rho} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} h_{\mu}^{\lambda} - \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} h_{\mu}^{\rho} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} h_{\mu}^{\lambda} + \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(\eta^{\lambda\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(\eta^{11} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} h_{\mu\nu} + \eta^{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} h_{\mu\nu} + \eta^{33} \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} h_{\mu\nu} + \eta^{00} \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} h_{\mu\nu}) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [(+1) \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} h_{\mu\nu} + (+1) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} h_{\mu\nu} + (+1) \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} h_{\mu\nu} + (-1) \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} h_{\mu\nu}] - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} h_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda} = \\ &= \frac{1}{2} (\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} h_{\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} h_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\lambda}^{\lambda}) \quad , \text{ that is the (4.46), indeed.} \end{aligned}$$

And according to the Einstein's Equations:

$$[R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda) = -\frac{8\pi G}{c^4}S_{\mu\nu}]$$

$$\square^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h^\lambda_\nu - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h^\lambda_\mu + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h^\lambda_\lambda = -\frac{16\pi G}{c^4}S_{\mu\nu} \quad (4.47)$$

If now we get into a harmonic coordinate system:

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 ; \quad (4.48)$$

In fact, in treating the geodesic equation, we meet the following identity which states the affine connection: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$. In fact, a free falling parachutist does not have any

floor over which his body can rest; therefore, he does not detect any gravitational acceleration and he feels as if floating in the vacuum. He realizes he is falling only if he looks at the moving objects around. Therefore, for a free falling particle, there is a reference system in which $\vec{a} = 0$, that is:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{free falling in Euclidean coordinates}) \quad (4.49)$$

with $d\tau^2 = -\eta_{ik}d\xi^i d\xi^k$.

But we can see (4.49) in the following way:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

If we multiply both sides by $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ and consider that: $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta^\lambda_\mu$, we'll have:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{free falling in curvilinear coordinates}) \quad (4.50)$$

(equation of the geodesic, where geodesic, on the Earth, is the shortest path between two places)

with $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ indeed.

Now we go on with the reasoning and in order to find the equation of the transformation of the affine connection, we write again the equation of the affine connection in a

different reference frame: $\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, from which:

$$\begin{aligned} \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right] = \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} ; \text{ now, we differentiate } \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\nu : \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = -\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}, \text{ from which:}$$

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}, \quad (4.51)$$

which is the equation of the transformation of the affine connection, indeed.

If now we contract the last equation by $g'^{\mu\nu}$ and then put it to zero, we get:

$g^{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\rho} - g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} = 0$, which is the (4.48), indeed, and we can always get into such a situation by calculating a new reference frame x^{λ} , through the previous equation: $\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\rho} - g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} = 0$.

The (4.48) and the (4.45) yield: $g^{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) + O(h^2)$

$$g^{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[\left(\frac{\partial h^{\mu}_{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h^{\nu}_{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h^{\mu}_{\mu}}{\partial x^{\rho}} \right) \right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial h^{\mu}_{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h^{\nu}_{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h^{\mu}_{\mu}}{\partial x^{\rho}} = 0 \rightarrow 2 \frac{\partial h^{\mu}_{\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h^{\mu}_{\mu}}{\partial x^{\rho}} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}_{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} h^{\mu}_{\mu} \text{ and after renaming } \rho \text{ by } \nu:$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} h^{\mu}_{\mu} \quad (4.52)$$

$$\text{which, if inserted into the (4.47) yields: } \square^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad (4.53)$$

The solution, which can be checked through a direct substitution, is the delayed potential:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int d^3 \vec{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (4.54)$$

Anyway, in order to simplify a bit things, for radiations coming from infinite: ($T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} = 0$)

$$\square^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (4.55)$$

$$\text{that is: } 0 = \nabla^2 h_{\mu\nu} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} \quad (\text{Wave Equation}) , \quad (4.56)$$

whose well known solution is a wave, indeed:

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} + e_{\mu\nu}^* e^{-ik_{\lambda} x^{\lambda}} ; \quad (4.57)$$

$e_{\mu\nu}$ is the polarization tensor.

Chapter 5: Deduction of the Cosmological Equations of Friedmann from the Einstein's G.F. Equations. The Robertson-Walker Metric.

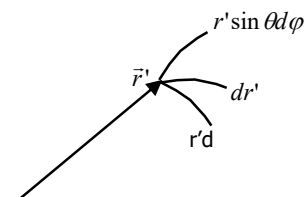
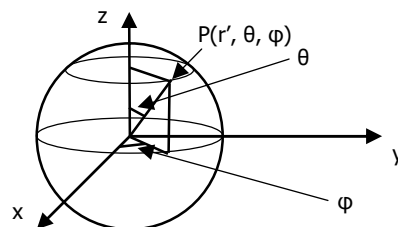
The Robertson-Walker metric – easy deduction:

We have a spherical surface with constant radius r' ; the spherical surface is bidimensional and it is into a three-dimensional cartesian frame (xyz) , just like we all, that according to the relativity, are beings with a tridimensional body, but into a four dimensional space-time. Now, an infinitesimal element of length $d\ell$ on the spherical surface , in spherical coordinates, is:

$dl^2 = (r' d\theta)^2 + (r' d\varphi)^2$, that is a small square over the spherical surface, where the South-North side is swept by r' ($r' d\theta$) and the East-West side is swept by r' , which is the projection of r' on the xy plane, and by sweeping $d\varphi$, it supplies indeed the contribution $(r' d\varphi)^2$.

($r=r' \times \sin \theta$ so: $dr=r' \times \cos \theta \times d\theta$, so again: $r' d\theta=dr/\cos \theta$)

$$\begin{cases} x = r' \sin \theta \cos \varphi \\ y = r' \sin \theta \sin \varphi \\ z = r' \cos \theta \end{cases}$$



then: $dl^2 = (r'd\theta)^2 + (rd\varphi)^2 = \left(\frac{dr}{\cos\theta}\right)^2 + (rd\varphi)^2$, but as:

$\cos\theta = \frac{\sqrt{r'^2 - r^2}}{r'} = \sqrt{1 - (r^2/r'^2)}$, it follows that:

$$dl^2 = (r'd\theta)^2 + (rd\varphi)^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - (r^2/r'^2)}}\right)^2 + (rd\varphi)^2$$

Now, by naming $K=1/r'^2$, it follows that: $dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 + (rd\varphi)^2$. Now, by extending such an equation to three dimensions, we have:

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 + (rd\varphi)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2. \text{ At last, we carry out a further extension to the four}$$

$$\text{dimensional case: } dl^2 = (cdt)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 - (rd\varphi)^2 - (r\sin\theta d\varphi)^2. \quad (5.1)$$

Now, let's introduce the comoving coordinates: $\vec{R} = a(t) \cdot \vec{r}$ ($R=a(t)r$ and $dR=a(t)dr$), where $a(t)$ is the Scale Factor. Then, the (5.1) becomes:

$$dl^2 = (cdt)^2 - \left(\frac{dR}{a(t)\sqrt{1 - K\left(\frac{R}{a(t)}\right)^2}}\right)^2 - \left(\frac{R}{a(t)}d\varphi\right)^2 - \left(\frac{R}{a(t)}\sin\theta d\varphi\right)^2, \text{ that is:}$$

$$dl^2 = (cdt)^2 - \frac{1}{a^2(t)} \left[\left(\frac{dR}{\sqrt{1 - kR^2}}\right)^2 + (Rd\varphi)^2 + (R\sin\theta d\varphi)^2 \right], \quad (5.2)$$

where $k = \frac{K}{a^2(t)}$.

The (5.2) represents the Robertson-Walker Metric.

Formal deduction of the Robertson-Walker metric:

-Gravitational fields with spherical symmetry and depending on time:

If the symmetry is spherical, $d\tau^2$ will depend on the rotational invariants and the coefficients will depend on time; therefore, the ingredients will be: $t, dt, r, d\ell = r dr$. In fact, about the three dimensional length, in spherical coordinates we have:

$$dl^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ and so:}$$

$$d\tau^2 = C(r,t)dt^2 - D(r,t)dr^2 - 2E(r,t)drdt - F(r,t)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ and out of completeness, we have also included the mix term in } drdt. \text{ Now, we put } r' = rF^{1/2}(r,t) \text{ and then we remove the accents, so getting:}$$

$$d\tau^2 = C(r,t)dt^2 - D(r,t)dr^2 - 2E(r,t)drdt - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2); \quad (5.3)$$

We have removed F. Now, in order to remove E, we put:

$$dt' = \eta(r,t)[C(r,t)dt - E(r,t)dr] \quad (5.4)$$

And in order to make the right side an exact differential, we use the Schwartz Condition:

$$\frac{\partial}{\partial r}[\eta(r,t)C(r,t)] = -\frac{\partial}{\partial t}[\eta(r,t)E(r,t)]. \text{ Now, by putting the (5.4) into the (5.3), we get:}$$

$$d\tau^2 = \eta^{-2}C^{-1}dt'^2 - (D + C^{-1}E^2)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \text{ that is, after removing again the accents:}$$

$$d\tau^2 = B(r,t)dt^2 - A(r,t)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2); \quad (5.5)$$

we are back to the standard form of chapter 4, but with time dependent coefficients. And there we say that for quasi minkowskian orthogonal coordinates (quasi $\eta_{\alpha\beta}$): $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ and by comparing this one with the (5.5), we see that: $g_{rr} = A$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$, $g_{tt} = -B$ and as $g_{\mu\nu}$ is orthogonal, we have that: $g^{rr} = A^{-1}$, $g^{\theta\theta} = r^{-2}$, $g^{\varphi\varphi} = r^{-2} \sin^{-2}\theta$, $g^{tt} = -B^{-1}$.

Then, as we know that: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho})$, it comes out that the only quantities not equal to zero are:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2A} \frac{dA}{dr} = \frac{A'}{2A} , \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A} , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r \sin^2\theta}{A} , \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{B'}{2A} , \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta , \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} , \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta , \quad \Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{2A} \frac{dA}{dt} = \frac{\dot{A}}{2A} , \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{B'}{2B} , \quad \Gamma_{rr}^t = \frac{A}{2B} , \quad \Gamma_{tt}^t = \frac{\dot{B}}{2B} , \end{aligned}$$

which are quantities already in chapter 4 and also other ones, as now we also have derivatives with respect to time. The accent means $\frac{d}{dr}$, while the point means $\frac{d}{dt}$.

Now, we calculate the Ricci tensor ($\lambda = \nu$ in

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^\lambda &= (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_k - (\Gamma_{\mu k}^\lambda)_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda); \\ R_{\mu k} &= \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \quad \text{and by considering that } \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^k} \text{ is symmetric over } \mu \text{ and } k , \\ \text{also after a direct check; so, in the end, we have:} \\ R_{rr} &= \frac{A''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A'}{Ar} - \frac{\ddot{A}}{2B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4B^2} + \frac{\dot{A}^2}{4AB} \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB} \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta \cdot R_{\theta\theta} , \quad R_{r\theta} = R_{r\varphi} = R_{\theta\varphi} = R_{\theta t} = R_{\varphi t} = 0 \\ R_{tr} &= -\frac{\dot{A}}{Ar} , \\ R_{tt} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'A'}{4A^2} - \frac{B'}{Ar} + \frac{B'^2}{4AB} + \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Observations: in the empty space $R_{\mu\nu} = 0$, so, because of the (5.6) $\dot{A} = 0$, that is $A = \text{const}$, so:

$A = (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}$, as well as in the Schwarzschild metric. Moreover, still in chapter 4, where we prove rigorously the Schwarzschild metric, we get $AB = \text{const}$, so:

$(AB)' = 0$. Now, by giving B a generic form $B = f(t)(1 - \frac{2GM}{r})$ and by defining a $t' = \int^t f^{1/2}(t) dt$,

it follows that: $\frac{dt'}{dt} = f^{1/2}(t) \rightarrow dt^2 = (dt')^2 f^{-1}(t)$, which, if inserted into the expression for B,

yields: $B = f(t)(1 - \frac{2GM}{r}) = \frac{(dt')^2}{dt^2} (1 - \frac{2GM}{r})$ and so, in the metric, the term $(1 - \frac{2GM}{r}) dt^2$

becomes:

$(1 - \frac{2GM}{r})dt'^2 = Bdt'^2$, that is $B = (1 - \frac{2GM}{r})$, still as well as in the Schwarzschild metric. So, we have just proved the Birkhoff's Theorem, according to which, in empty space the field is static; and that's why in a cavity ($r=0$, $M=0$) we have that $A=B=1$ and the space is minkowskian, with the applicability of the Newton's Theory.

The Proper Time $d\tau$ of a particle and the comoving coordinates.

If a particle is at rest in (O', x', y', z') , i.e. if it moves in O' , indeed, i.e. if O' is its "proper" reference system, then: $dx' = dy' = dz' = 0$ and:

$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0 + 0 + 0 - c^2 dt'^2 = -c^2 dt'^2$, from which:

$$dt' = d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (\text{proper time, invariant, as so is } \frac{ds}{c}).$$

Therefore, when you make calculations on a particle, you are led to use for it its proper time,

$$\text{indeed: } d\tau = \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (5.7)$$

In a tensor form, as according to the (5.7) the only component of $d\tau$ is the time one, we have:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow d\tau^2 = -g_{tt} dt^2 \rightarrow g_{tt} = -1 \quad \text{and} \quad dx^i = 0.$$

Then, being the particle free falling, the geodesic equation is in force (see chapt. 4), so:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 = \Gamma_{tt}^i. \quad \text{Now, for the form of the affine}$$

connection: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right)$ we have: $0 = \Gamma_{tt}^i = \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^\rho} \right)$, but:

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial x^\rho} = \frac{\partial(-1)}{\partial x^\rho} = 0, \quad \text{so: } 0 = \Gamma_{tt}^i = \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} \right) = g^{i\rho} \frac{\partial g_{\rho t}}{\partial t} = 0, \quad \text{but because of the values of } g^{xy}$$

previously calculated, those not equal to zero make: $g^{ij} \frac{\partial g_{jt}}{\partial t} = 0$, from which, finally:

$$\frac{\partial g_{jt}}{\partial t} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 0. \quad \text{Now, let's reset the clocks of every particle in the following way:}$$

$t' = t + f(x)$, $x = x'$, so:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -g_{ij} dx^i dx^j - g_{tt} dt dt - g_{it} dx^i dt - g_{jt} dt dx^j = -g_{ij} dx^i dx^j - g_{tt} dt' dt' - \\ &- g_{it} \left(\frac{dt}{dx^i} \right) \left(\frac{dt}{dx^j} \right) dx^i dx^j - g_{it} dx^i \left(\frac{dt}{dx^j} \right) dx^j - g_{jt} \left(\frac{dt}{dx^i} \right) dx^i dx^j - g_{jt} \left(\frac{dt}{dx^i} \right) dx^i dt' - g_{jt} \left(\frac{dt}{dx^j} \right) dx^j dt' - \\ &- g_{it} dx^i dt' - g_{jt} dx^j dt' = dx^i dx^j [-g_{ij} - g_{it} \left(\frac{df}{dx^i} \right) \left(\frac{df}{dx^j} \right) + g_{it} \left(\frac{df}{dx^j} \right) + g_{jt} \left(\frac{df}{dx^i} \right)] + dt'^2 (-g_{tt}) + \\ &+ dx^i dt' [-g_{it} - g_{it} \left(\frac{df}{dx^i} \right)] + dx^j dt' [-g_{jt} - g_{jt} \left(\frac{df}{dx^j} \right)] = -g'_{ij} dx^i dx^j - dt'^2 g'_{tt} - dx^i dt' g'_{it} - g'_{jt} dt' dx^j. \end{aligned}$$

where: $g'_{tt} = g_{tt} = -1$, $g'_{ij} = g_{ij} - \left(\frac{df}{dx^i} \right) \left(\frac{df}{dx^j} \right) - g_{it} \left(\frac{df}{dx^j} \right) - g_{jt} \left(\frac{df}{dx^i} \right)$, $g'_{it} = \left(\frac{df}{dx^i} \right) + g_{it}$,

$$\boxed{g'_{ij} = g_{ij} + \frac{df}{dx^j}}; \quad (5.8)$$

In order to get rid of the g'_{ij} we have to act so that $g_{ij} = -\frac{df}{dx^j}$; this can happen in the following case:

-as for spherically symmetric metrics (see previous formulas) we have:

$d\tau^2 = C(r,t)dt^2 - D(r,t)dr^2 - 2E(r,t)drdt - F(r,t)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ and here the only g_{ij} is the $g_{rr} = 2E$, then, according to the (5.8) we have: $f = -2\int^r E(r)dr$; then, if we also remember that $g_{tt} = -1$, then:

$$d\tau^2 = dt^2 - U(r,t)dr^2 - V(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (5.9)$$

From the last one, out of comparison with the $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, we see that:

$g_{rr} = U$, $g_{\theta\theta} = V$, $g_{\varphi\varphi} = V\sin^2\theta$, $g_{tt} = -1$ and as $g_{\mu\nu}$ is orthogonal, we have that: $g^{rr} = U^{-1}$, $g^{\theta\theta} = V^{-1}$, $g^{\varphi\varphi} = (V\sin^2\theta)^{-1}$, $g^{tt} = -1$.

Moreover, similarly to what has already been done some pages before, we see that:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{U'}{2U}, \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{V'}{2U}, \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{V'}{2U}\sin^2\theta, \Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{\dot{U}}{2U}, \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{V'}{2V}, \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{\dot{V}}{2V},$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta, \Gamma_{rr}^t = \frac{\dot{U}}{2}, \Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{\dot{V}}{2}, \Gamma_{\varphi\varphi}^t = \frac{\dot{V}}{2}\sin^2\theta,$$

And still in the same way as we did some pages back, we also see that:

$$R_{rr} = \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} - \frac{\ddot{A}}{2B} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{V''}{2U} - \frac{V'U'}{4U^2} - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4U} \quad (5.10)$$

$$R_{tt} = \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2}$$

$$R_{tr} = \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta \cdot R_{\theta\theta}, R_{r\theta} = R_{r\varphi} = R_{\theta\varphi} = R_{\theta t} = R_{\varphi t} = 0.$$

Towards the Robertson-Walker metric:

Let's consider now the 10 Einstein's Gravitational Field Equations:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (5.11)$$

and let's go back, out of a better comfort, to the $c=1$ convention, from which:

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}$, that say the curvature ($\propto R_{\mu\nu}, R$) of the space-time is equal to the presence of matter-energy ($\propto T_{\mu\nu}$) in it!

Now, by contracting by $g^{\mu\nu}$, we have: $R - 2R = -8\pi GT_\mu^\mu$,

(as $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$, because we are under the Einstein summation convention)

and so: $R = 8\pi GT_\mu^\mu$, from which:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_\lambda^\lambda) = -8\pi GS_{\mu\nu} \text{ (another version of the Einstein's equations)} \quad (5.12)$$

and now we also recall the expression for the Energy-Momentum Tensor $T_{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu \rightarrow$$

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu, \quad (5.13)$$

(c=1) , where $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ and so, for a free falling fluid (zero velocity, with respect to itself):
 $U^i = U_i = 0$ and $U^t = c = 1$, $U_t = g_{tt}U^t = -1$ and, finally: $U^\beta U_\beta = -1$, as being:
 $d\tau^2 = -g_\mu^\nu dx^\mu dx_\nu$, we have: $d\tau^2 = -g_\beta^\beta dx^\beta dx_\beta \rightarrow U^\beta U_\beta = U^i U_i + U^t U_t = 0 - 1 = -1$, that is
indeed: $U^\beta U_\beta = -1$.

Therefore, for the (5.12) we have: $S_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_\lambda^\lambda)$ and for the (5.13):
 $T_\lambda^\lambda = pg_\lambda^\lambda + (p + \rho)U^\lambda U_\lambda$, so:

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_\lambda^\lambda) = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}pg_\lambda^\lambda - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(p + \rho)U^\lambda U_\lambda = \\ &= pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu - \frac{4}{2}g_{\mu\nu}p - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(p + \rho)U^t U_t = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu - 2g_{\mu\nu}p + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}p + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\rho = \\ &= S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\rho - p)g_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu . \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$(g_\lambda^\lambda = \delta_\lambda^\lambda = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 + \delta_4^4 = 4)$$

Now, if we recall that in the above pages we proved that: $g_{tt} = -1$, $g_{ii} = 0$ and $g_{ij} = g_{ji}$, then we have, for the (5.14):

$$S_{tt} = \frac{1}{2}(\rho - p)g_{tt} + (p + \rho)U_t U_t = \frac{1}{2}(\rho + 3p) , \quad S_{ii} = 0 , \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(\rho - p)g_{ij} \rightarrow S_{rr} = \frac{1}{2}(\rho - p)U ,$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(\rho - p)V , \quad S_{\phi\phi} = S_{\theta\theta} \sin^2 \theta .$$

Now we use all the (5.10) into the (5.12):

$$\frac{1}{U} \left[\frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} \right] = -4\pi G(\rho - p) \quad (5.15)$$

$$-\frac{1}{V} + \frac{1}{U} \left(\frac{V''}{2V} - \frac{V'U'}{4UV} \right) - \frac{\ddot{V}}{2V} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4UV} = -4\pi G(\rho - p) \quad (5.16)$$

$$\frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} = -4\pi G(\rho + 3p) \quad (5.17)$$

$$\frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = 0 \quad (5.18)$$

Now, by approaching more and more to the application for the universe and for the free fall, we consider ρ and p not related to the position and we look for solutions with separable variables for the (5.15)---(5.18) , like: $U = R^2(t) \cdot f(r)$ and $V = S^2(t) \cdot g(r)$; now, the (5.18) needs that:

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{R}}{R} ; \text{ so we choose: } S=R . \text{ Now we redefine } r: \bar{r} = \sqrt{g(r)} \rightarrow g = \bar{r}^2 \text{ and } f \rightarrow \bar{f}(\bar{r}) \rightarrow$$

$$U = R^2(t) \cdot f(r) \text{ and } V = R^2(t) \cdot r^2 ; \quad (5.19)$$

so doing, the (5.15) becomes:

$$-\frac{f'}{rf^2} - 2\dot{R}^2 - \ddot{R}R = -4\pi GR^2(\rho - p) \quad (5.20)$$

and the (5.16) becomes:

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{f\bar{r}^2} - \frac{f'}{2f^2\bar{r}} - 2\dot{R}^2 - R\ddot{R} = -4\pi GR^2(\rho - p) \quad (5.21)$$

Now, from the (5.20) we get: $-2\dot{R}^2 - \ddot{R}R = -4\pi GR^2(\rho - p) + \frac{f'}{rf^2}$, while from the (5.21) we get:

$-2\dot{R}^2 - R\ddot{R} = -4\pi GR^2(\rho - p) + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{fr^2} + \frac{f'}{2f^2r}$, from which, out of comparison, between the last two, we get:

$$-4\pi GR^2(\rho - p) + \frac{f'}{rf^2} = -4\pi GR^2(\rho - p) + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{fr^2} + \frac{f'}{2f^2r}, \quad (5.22)$$

$$\text{that is: } -\frac{f'}{rf^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{fr^2} - \frac{f'}{2f^2r}. \quad (5.23)$$

Now we see that both sides of the (5.23) were into the (5.22) summed together with the quantity $-4\pi GR^2(\rho - p)$, which is constant by supposition (the supposition of constancy of ρ and p has been made some lines above, after the (5.18)). Now, also the two sides of the (5.23) will be constant and such a constant we can name it $-2k$, that is:

$-\frac{f'}{rf^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{fr^2} - \frac{f'}{2f^2r} = -2k$. Now, we notice that the only solution is $f(r) = \frac{1}{(1 - kr^2)}$, as one can easily check by substitution. So:

$$U = R^2(t) \cdot f(r) = \frac{R^2(t)}{(1 - kr^2)} \quad \text{and} \quad V = r^2 R^2(t). \quad (5.24)$$

At last, if we get the (5.9), we have: $d\tau^2 = dt^2 - U(r, t)dr^2 - V(r, t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) =$

$$= dt^2 - \frac{R^2(t)}{(1 - kr^2)} dr^2 - r^2 R^2(t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{(1 - kr^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (5.25)$$

(Robertson-Walker Metric)

Now, by inserting all the (5.24) into the (5.17), we get:

$$3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R, \quad (5.26)$$

while all the (5.20) and (5.21) yield: $\ddot{R}R + 2\dot{R}^2 = 4\pi G(\rho - p)R^2 - \frac{f'}{rf^2} = 4\pi G(\rho - p)R^2 - 2k$,

$$\text{that is: } \ddot{R}R + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)R^2 \quad (5.27)$$

Now, by removing $\ddot{R}$ from the (5.26) and (5.27), we get:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \quad (5.28)$$

The (5.26) and (5.28), that we write again below, are the COSMOLOGICAL FRIEDMANN'S EQUATIONS:

$$\begin{cases} 3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R \\ \dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \end{cases} \quad (5.29)$$

By removing the convention $c=1$, we get:

$$\begin{cases} 3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3\frac{p}{c^2})R \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \end{cases} \quad (5.30)$$

and by a rearrangement, we get:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\frac{p}{c^2}) \\ (\frac{\dot{R}}{R})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} \end{cases} \quad (5.31)$$

which are exactly the same that can be calculated starting from the Classical Newton's Theory.

The Fluid Equation:

-preamble: the energy-momentum tensor as a function of the determinant g:

We have the equation for the derivative of a vector:

$$V_{;\mu}^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} V^{\lambda}, \quad (5.32)$$

$$\text{where: } \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}}, \quad (5.33)$$

as being the affine connection with two identical indexes and being the indexes varying from 1 to 4 (or from 0 to 3), then the last two terms between brackets are the same thing (with ρ and μ exchanged) and so they cancel; (we would have made the same reasoning between the first and the third and the second survived ...).

$$\text{Now we notice that: } \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln g; \quad (5.34)$$

$$\text{In fact, } g_{\rho\mu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \text{ and } g^{\rho\mu} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \text{ (if we consider the simple case of a 2x2 matrix)}$$

and according to the formulas for the inversion of a matrix, we have:

$$g^{11} = g_{22} / g, \quad g^{12} = g^{21} = -g_{12} / g = -g_{21} / g,$$

$$g^{22} = g_{11} / g; \quad |g_{\rho\mu}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} [g_{11}g_{22} - (g_{12})^2] = \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{\lambda}} g_{22} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^{\lambda}} g_{11} - 2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^{\lambda}} = g[g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{\lambda}} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^{\lambda}} + 2g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^{\lambda}}] = \\ &= gg^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}}; \text{ so, according to the (5.34), the (5.33) becomes:} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln g = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \sqrt{g} \text{ and so the (5.32) becomes:}$$

$$V_{;\mu}^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} V^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \sqrt{g} V^{\mu}.$$

Now, if we examine the derivative of a rank 2 tensor:

$$T_{;\lambda}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda k}^{\mu} T^{k\nu} + \Gamma_{\lambda k}^{\nu} T^{\mu k}, \quad (\text{generic}) \text{ and with } \lambda=\mu: \quad (5.35)$$

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} T^{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} T^{\mu\lambda}. \quad (5.36)$$

If we get the energy-momentum tensor from the (5.13), we have:

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^{\mu}U^{\nu} \text{ and by applying to it the (5.36), we get:}$$

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} T^{\nu\lambda} = [pg^{\mu\nu}]_{;\mu} + [(p + \rho)U^{\mu}U^{\nu}]_{;\mu} \quad (5.37)$$

That is: $T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\sqrt{g}(p+\rho)U^\mu U^\nu] + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu (p+\rho)U^\nu U^\lambda$ (5.38)

In fact, the first term between square brackets in the (5.37) yields just one contribution, as the second contribution is zero $\boxed{((g^{\mu\nu})_{;\nu} = 0)}$; in fact, as an example, let's consider the (5.35) about the derivative of a rank 2 tensor, in the following well known alternative version:

$T_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} T_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho T_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho T_{\rho\mu}$; now, if we apply it to $g_{\mu\nu}$, we get:

$g_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}$, but we proved that: $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}$ so: $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$. And

similarly also for the other cases, such as $g^{\mu\nu}$ indeed, we have: $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

Now, as the mass Energy is conserved, we have, according to the (5.37):

$0 = T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\sqrt{g}(p+\rho)U^\mu U^\nu] + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu (p+\rho)U^\nu U^\lambda$ and by setting $\mu=\nu=t$ and being:

$U^t = 1, U^i = 0, \Gamma_{tt}^\mu = \Gamma_{t\lambda}^\mu = 0, g^{tt} = -1, |g_{\rho\mu}| = g = g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|g_{tt}| = R^6(t)r^4(1-kr^2)^{-1}\sin^2\theta,$

(rif. above pages), we have: $0 = T_{;t}^{tt} = \frac{\partial p}{\partial t} g^{tt} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{g}(p+\rho)U^t U^t] + \Gamma_{t\lambda}^t (p+\rho)U^t U^\lambda$, that is:

$-\frac{\partial p}{\partial t} g^{tt} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{g}(p+\rho)]$, so: $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{R^6(t)r^4(1-kr^2)^{-1}\sin\theta}} \frac{\partial}{\partial t}$.

$\cdot [\sqrt{R^6(t)r^4(1-kr^2)^{-1}\sin\theta}(p+\rho)] = \frac{1}{\sqrt{R^6(t)}} \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{R^6(t)}(p+\rho)]$, so again:

$R^3(t) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [R^3(t)p(t) + R^3(t)\rho(t)]$, from which: $R^3 \dot{p} = 3R^2 \dot{R}(p+\rho) + R^3(\dot{p} + \dot{\rho}) \rightarrow$

$3R^2 \dot{R}p + 3R^2 \dot{R}\rho + R^3 \dot{\rho} = 0 \rightarrow 3R^2 \frac{dR}{dt} p + 3R^2 \frac{dR}{dt} \rho + R^3 \frac{d\rho}{dt} = 0$ now, by dividing all by $\frac{dR}{dt}$:

$3R^2 \rho + R^3 \frac{d\rho}{dR} = -3R^2 p \rightarrow \frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3R^2 p$. (fluid equation) (5.39)

The fluid equation is known in this version: $\boxed{\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{R}}{R} (\rho + \frac{p}{c^2})}$, but this one is exactly the (5.39); in

fact, in the (5.39) we remove the convention $c=1$, so: $\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3R^2 \frac{p}{c^2}$. Moreover, we develop

the derivative in the last one: $R^3 \frac{d\rho}{dR} + 3\rho R^2 = -3R^2 \frac{p}{c^2}$; now, if we multiply all by $\frac{dR}{dt} (= \dot{R})$, we

get: $R^3 \frac{d\rho}{dt} + 3\rho \dot{R} R^2 = -3\dot{R} R^2 \frac{p}{c^2}$, that is: $R^3 \dot{\rho} + 3\rho \dot{R} R^2 = -3\dot{R} R^2 \frac{p}{c^2}$, from which, in the end:

$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{R}}{R} (\rho + \frac{p}{c^2})$ indeed.

Appendixes:

App. 1: The Special Theory Of Relativity.

Contents of App. 1:

-Contents of App. 1.

- App.1-Introduction.

-App.1-Chapter 1: Fundamental introductory concepts.

App.1-Par. 1.1 Galilean transformations.

App.1-Par. 1.2: The (Relativistic) Lorentz Transformations.

App.1-Par. 1.3: The contraction of length, or of Lorentz.

App.1-Par. 1.4: Time dilation (Twin Paradox).

App.1-Par. 1.5: The four-vector position.

App.1-Par. 1.6: Relativistic Law of Transformation of Velocities.

App.1-Par. 1.7: The Proper Time $d\tau$ of a particle.

-App.1-Chapter 2: The relativity of energies.

App.1-Par. 2.1: The energy-momentum four-vector (or linear momentum).

App.1-Par. 2.2: The velocity four-vector.

App.1-Par. 2.3: The four-force.

App.1-Par. 2.4: $E_0 = m_0 c^2$.

App.1-Par. 2.5: Relativistic kinetic Energy.

-App.1-Chapter 3: Relativistic phenomena.

App.1-Par. 3.1: Time and gravity: gravity slows down the time!

App.1-Par. 3.2: Volume of moving solids.

App.1-Par. 3.3: The equation of waves, or of D'Alembert, holds in every inertial reference system.

App.1-Par. 3.4: The Fizeau experiment.

App.1-Par. 3.5: Relativistic Doppler Effect (longitudinal).

App.1-Par. 3.6: The Twin Paradox explained by the Relativistic Doppler Effect!

App.1-Par. 3.7: The Michelson and Morley experiment.

-App.1-Chapter 4: Relativistic Electrodynamics.

App.1-Par. 4.1: Magnetic force is simply a Coulomb's electric force(!).

App.1-Par. 4.2: The Current Density four-vector.

App.1-Par. 4.3: The Electromagnetic Field Tensor.

- App.1-SUBAPPENDIXES:

App.1-Subapp. 1: Lorentz Transformations in succession.

App.1- Subapp. 2: Transversal (relativistic) Doppler Effect.

App.1- Subapp. 3: The Transformations of the four-velocity.

App.1- Subapp. 4: The transformations of the four-force.

App.1- Subapp. 5: The acceleration four-vector and the transformations of the acceleration.

App.1-Introduction:

Time is just the name which has been assigned to a mathematical ratio relation between two different spaces; when I say that in order to go from home to my job place it takes half an hour, I just say that the space from home to my job place corresponds to the space of half a clock circumference run by the hand of minutes. The speed of light ($c=299.792,458$ km/s) is an upper speed limit, but neither by an unexplainable mystery, nor by a principle, but rather because a body cannot move randomly in the Universe where it's free falling with speed c , as it's linked to all the Universe around, as if the Universe were a spider's web that when the trapped fly tries to move, the web affects that movement and as much as those movements are wide ($v \sim c$), that is, just to stick to the web example, if the trapped fly just wants to move a wing, it can do that almost freely ($v < c$), while, on the contrary, if it really wants to fly widely from one side to the other on the web ($v \sim c$), the spider's web resistance becomes high (mass which tends to infinite etc). Or it's like being in a bus and running in it by a speed (with respect to the street) higher than that of the bus itself; you would get out of the bus, but getting out of the Universe doesn't make any sense, so you become part of the bus, which protrudes ahead, if you try to get out of it, so being inhesorably caught into the bus. Having the speed of light and not having a rest mass are equivalent concepts. In fact, the photon rest mass is zero and it's got the speed of light, indeed. Moreover, it has the same speed (c) for all inertial observers. First of all, the observer can carry out speed measurements by using the fastest thing he knows, the light, and this gives a first explanation of the constancy of c . Moreover, the photon cannot be either accelerated or decelerated (constancy of c) because accelerating an object

means fully interact with it, by catching it and throwing it again faster. I'm here denying the possibility to really catch a photon; I give an example: if I catch an insect by a net and then I leave the net, I cannot still say I stopped the fast flight of that insect, as it could go on flying fast also into the net, so showing us that it cannot be fully caught. If now we go back to the photon, it cannot either be absolutely caught by the matter, or accelerated; it is kept into the matter as heat, or orbiting around an electron or in whatever form you like, as well as forward and reflected waves (which are typically propagating) are trapped in a standing wave which is created by themselves when, for instance, you hit the free surface of the water in a basin!

Anyway, Einstein's theory is formally founded on two principles:

-Principle of di Relativity: *laws of physics have the same form in all inertial systems* (i.e. at relative movement with a constant speed); as it doesn't make any sense an absolute movement with respect to a standing ether which does not exist (see Par. 3.7) all reference systems are equal laboratories to verify in all laws of physics; so there aren't any privileged reference systems (except for, in my opinion, that of the center of mass of the Universe).

Anyway, the Michelson and Morley experiment (App.1-Par. 3.7) represented the end of the ether and opened the doors to STR.

-Principle of Constancy of the Speed of Light: *the speed of light in vacuum has always the same value $c=300.000$ km/s.*

Therefore, no matter if you chase it at 299.000 km/s or if you run away from it still with that speed; light in vacuum will run away or chase you still at 300.000 km/s! ($c=299.792,458$ km/s)

In the opinion of the writer, there is something like a contradiction in the STR; the speed of light seems to be an "absolute" object, indeed, and not "relative", as we are here talking about "relativity". The point here is that speeds among objects in the Universe are relative with respect to themselves, but there is an absolute (or almost) speed c with which all objects in the Universe fall towards the centre of mass of it; from this the absolute essence of c . And here there is also an explanation of the reason why objects at rest have energy m_0c^2 (App.1-Par. 2.4), energy given to matter at rest by Einstein, unfortunately without telling us that such a matter is never at rest, as it's free falling with speed c towards the center of mass of the Universe, as chance would have it.

If a common man hears the speed of light is the same everywhere and for everybody (all inertial observers), even when they have relative movements at constant speed, nothing happens. On the contrary, if it's heard by a particular man like Einstein, what he can understand from that can be surprising. The following simple experiment, made by a light clock on a space ship, shows that the fact that the speed of light is c for "everybody" implies that time is relative, from which the Twin Paradox comes (App.1-Par. 1.4) etc:

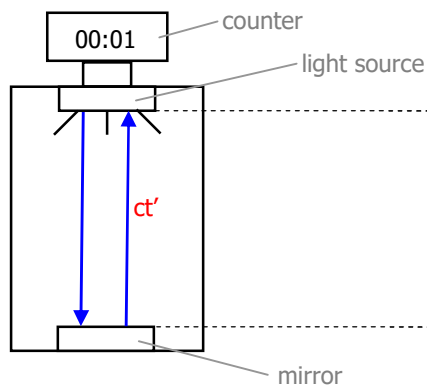


Fig. A1: Light clock not moving.

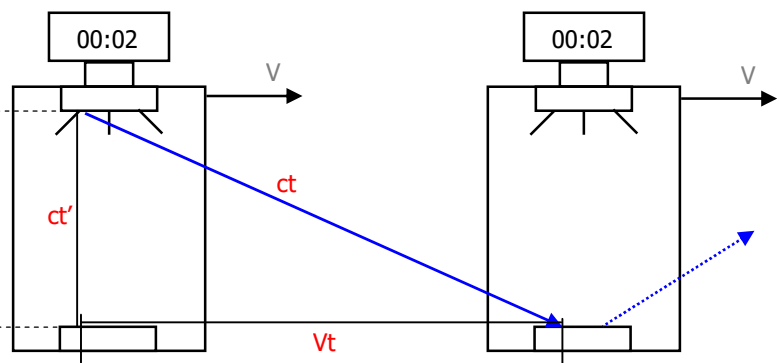


Fig. A2: Light clock moving at speed V.

As you can see in Fig. A1, every time light (blue arrows) goes from source to mirror and back, the light clock says, for instance, one second, or a certain time t' . The path in blue shown in Fig. A1 is seen by those who are not moving with respect to the clock, i.e. by who is on the space ship with the clock itself. On the contrary, those who are on the Earth and see the clock moving on the ship, will see the light travelling diagonally longer paths, as shown in Fig. A2, as the mirror moves while the light goes downwards, and the source moves, too, when the light goes back upwards. Now, as we are talking about light, the behaviour of it during its going downwards is not like that of a suitcase falling from the luggage compartment of a railway wagon, which is seen to fall vertically by the passenger on it and by a parabolic trajectory by the observers not moving, on the platform at the station, so taking the same time for both of them, as in the latter case (parabolic) the falling speed is higher; we are here talking about light, therefore its speed must be the same for all, and c ; but if it's so, then those who see the longer diagonal path must say that time taken by light to go down and up must be longer. Therefore, despite we're talking about just one clock and one event, those two observers come to different results, so to the relativity of time and to all its implications.

Using the Pythagorean Theorem on the triangle in Fig. A2, we have:

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 + V^2 t'^2, \text{ from which: } t' = t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \text{ and so, in general: } t' < t \text{ and } t' \text{ tends to zero when } V \text{ tends to } c!$$

I remind you that t' is the time of the astronaut who is travelling with the clock, while t is the time elapsed on the Earth. If all this is true for the fastest thing (light), then it's also true for standard hands clocks and also for the biologic ones (living beings)! In the seventies, by using very sensitive atomic clocks, they proved the time dilation on the Earth,

between two atomic clocks which were synchronized, at the beginning, after that one of them flew on a plane, undergoing a slight, but well felt, time dilation. However, it's possible to see a bright dot moving with a speed twice that of light by making a sweep of 90° in a second, with a laser beam towards the Moon, but this is not a transmission of an information with a speed higher than that of light; therefore, the relativity is not violated at all:

$$\omega = \frac{\pi/2}{1s} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} , \quad D_{\text{EARTH-MOON}} = d \cong 3,8 \cdot 10^8 \text{ m} , \quad v_{\text{Peripheral}} \cong \omega d \cong 6 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cong 2c!$$

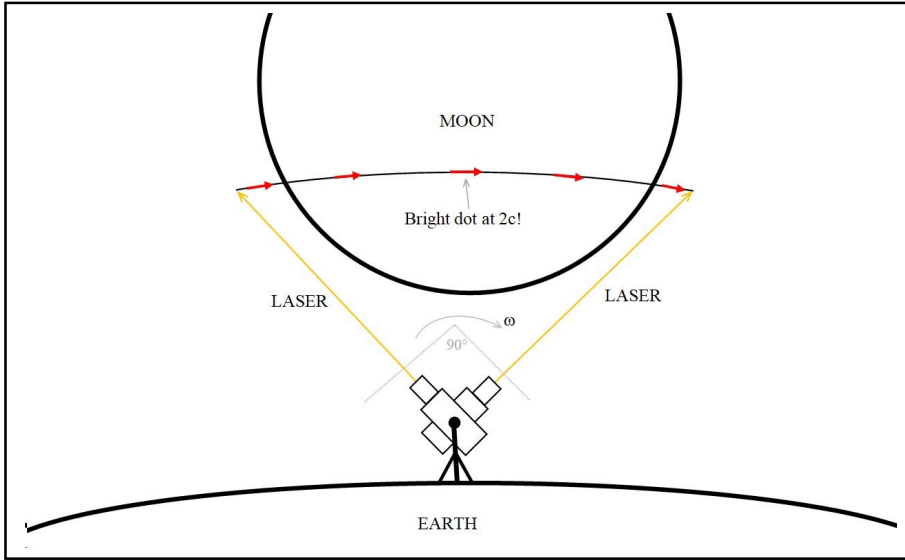


Fig. A.3: Bright dot at speed $2c$!

The rotated light clock.

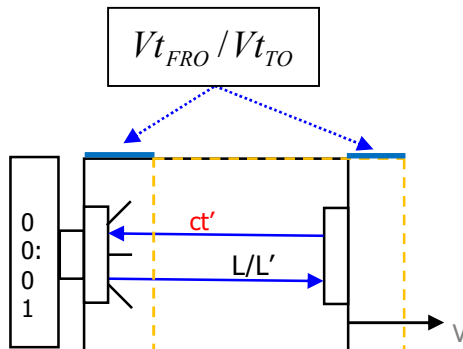


Fig. A.4: The rotated light clock.

If we rotate the light clock in Fig. A.1 like that in Fig. A.4, we obviously must have the time dilation anyway; on this purpose, we see that the path run by the light must not always be necessarily L for all the observers, but it will for all those who are on board in the spacecraft (those who see the clock still) and it is L' for all those who are on the Earth (those who see the clock moving). We will see that $L' < L$ (Lorentz Contraction).

Then, all the observers on the Earth will calculate as their own to and fro time for the light (and over their own still

clock, on the Earth): $t = t_T = \frac{2L}{c}$, and still those on the Earth who see through the spacecraft window, from a distance, will see an L' long clock (and for the time being we do not know yet its value) and they will figure out a "to" time for the light (from left to right) equal to t_{TO} and a "fro" one (from right to left) equal to t_{FRO} . But as long as the light runs its first "to" path along L' , for all those who are on the Earth the mirror will get farther from the source about an amount equal to Vt_{TO} and, conversely, during the return of the light to the source to run again L' , the source will get closer to the mirror about an amount equal to Vt_{FRO} . Therefore, during the "to" travel, the path S_{TO} will be longer and on the return S_{FRO} will be shorter. So:

$S_{TO} = L' + Vt_{TO}$ and $S_{FRO} = L' - Vt_{FRO}$, but it's about light, so it must have always the same velocity c for all, so we must also have that: $S_{TO} = ct_{TO}$ and $S_{FRO} = ct_{FRO}$, that is:

$$ct_{TO} = L' + Vt_{TO} \quad \text{and} \quad (A)$$

$$ct_{FRO} = L' - Vt_{FRO} \quad , \text{ and also} \quad (B)$$

$$t_{TO} + t_{FRO} = t' \quad (C)$$

Well, the (A) yields: $t_{TO} = \frac{L'}{c(1 - \frac{V}{c})}$, while the (B) yields: $t_{FRO} = \frac{L'}{c(1 + \frac{V}{c})}$ and finally, for the (C):

$$t_{TO} + t_{FRO} = t' = \frac{L'}{c(1 - \frac{V}{c})} + \frac{L'}{c(1 + \frac{V}{c})} = \frac{2L'}{c(1 - \frac{V^2}{c^2})} = \frac{2L'}{c\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} \quad .$$

We write it again:
$$t' = \frac{2L'}{c\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} \quad (D)$$

If now we put:
$$L = \frac{L'}{\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} \quad (E)$$

we get:
$$t' = \frac{2L}{c\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} = \frac{t}{\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}} \quad , \text{ that is: } t' = \frac{t}{\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}}$$

which is a reinterpretation (*) of the equation we got through the ordinary light clock, provided that we have

acknowledged the Lorentz Contraction given by the (E), that is: $L' = L\sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})}$ which tells us the clock on the spacecraft is shorter.

(*): a reinterpretation, as here t' is the time of the spaceship evaluated from the Earth, which is in fact shorter than t , because in the Twin Paradox, after the reunion, the twin who stayed on the Earth, very aged (a long t), acknowledges a t' of the travelling twin which is much shorter.

App.1-Chapter 1: Fundamental introductory concepts.

App.1-Par. 1.1: Galilean transformations.

They simply give the relations between space coordinates (and time), for two reference systems in relative motion, but in classical physics, where the speed of light is not an upper limit.

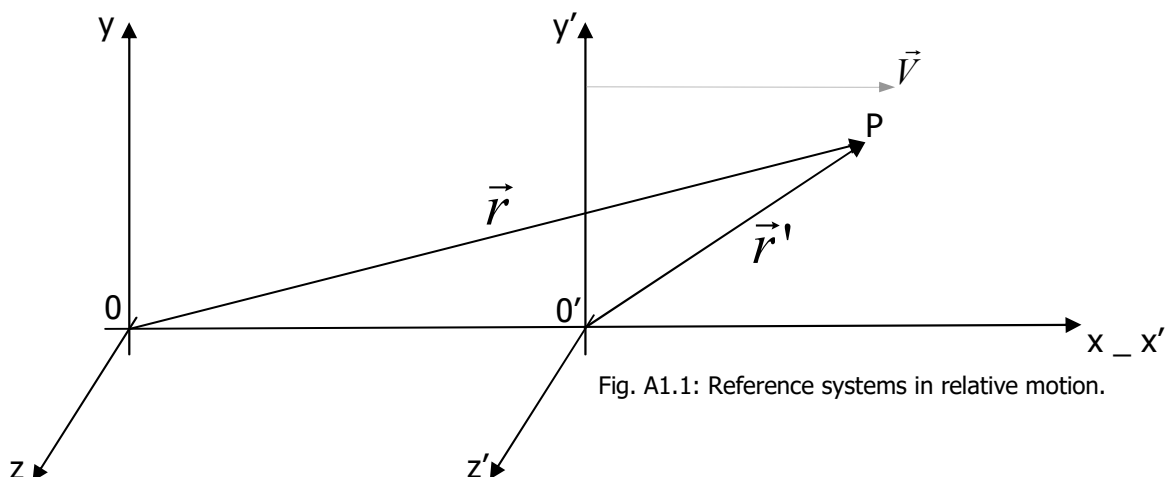


Fig. A1.1: Reference systems in relative motion.

We obviously have:

$$\vec{r} = \vec{r}' + 0\vec{0}' = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad (\text{A1.1})$$

from which, for the components ($t=t'$):

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$

and for the reverse ones, we obviously have:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (\text{A1.3})$$

(A1.2) and (A1.3) are the Galilean Transformations.

By deriving (A1.1), we have: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ which can be held as the theorem of summation of velocities in classical physics.

App.1-Par. 1.2: The (Relativistic) Lorentz Transformations.

We know that the Lorentz transformations were born before the Theory of Relativity (which is founded on them) and on an electromagnetic basis.

They correspond to the Galilean ones, but on a relativistic basis and they are in force as long as we say that the speed of light is an upper limit in the Universe and it's c for ($\sim$)every observer.

-FIRST PROOF:

if we suppose a relative motion along x , we correct the x components of the Galilean Transformations through a coefficient k , as follows:

$$x' = k(x - Vt) \quad (\text{A1.4})$$

$$x = k(x' + Vt') \quad (\text{A1.5})$$

Now, for a photon, we obviously have:

$$ct' = k(c - V)t \quad \text{and} \quad ct = k(c + V)t', \quad \text{as light has the same speed } c \text{ in both reference systems, from which, by}$$

mutual multiplication of the corresponding sides: $c^2 t t' = k^2 t t' c^2 (1 - \frac{V^2}{c^2})$, from which:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{A1.6})$$

Moreover, from (A1.5) we have: $t' = \frac{1}{V}(\frac{x}{k} - x')$ and using (A1.4) in it, we have:

$$t' = \frac{1}{V}[\frac{x}{k} - k(x - Vt)] = \frac{1}{kV}x - \frac{kx}{V} + kt = k[t - \frac{x}{V}(1 - \frac{1}{k^2})] = k[t - \frac{V}{c^2}x] \quad (\text{A1.7})$$

as, for (A1.6), we have: $(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{V^2}{c^2}$. By the same way which led us to (A1.7), we also get the expression for t .

Finally, here are the Lorentz Transformations:

$$\begin{cases} x' = \frac{(x - Vt)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{(t - \frac{V}{c^2}x)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (\text{A1.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(x' + Vt')}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{(t' + \frac{V}{c^2} x')}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right. \quad (\text{A1.9})$$

-SECOND PROOF:

We know that $c = \text{const}$ in all inertial reference systems. Now, with reference to Fig. A1.1, when $0=0'$ and $t=t'$, from the origin light is emitted through spherical waves and isotropically and so we can write that:

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad \text{and} \quad c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

as light has the same speed c in both reference systems. Therefore:

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad \text{and for rays along } x \text{ (} y=y' \text{ and } z=z' \text{):}$$

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2. \quad \text{Now we say } (i = \sqrt{-1}): \quad ix = \xi, \quad ix' = \xi', \quad ct = \eta \quad \text{and} \quad ct' = \eta'; \quad \text{we have:}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \xi'^2 + \eta'^2, \quad \text{whose solution is:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta \\ \eta' = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{array} \right. \quad (\text{A1.10})$$

and in a differential form:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi' = d\xi \cos \theta - d\eta \sin \theta \\ d\eta' = d\xi \sin \theta + d\eta \cos \theta \end{array} \right. \quad (\text{A1.11})$$

Now we notice that with respect to the origin "0", $\frac{dx}{dt} = 0$, as the reference system $(0, x, y, z)$ is not moving with respect

to itself. On the contrary, $\frac{dx'}{dt'} = -V$, as the system $(0', x', y', z')$ moves with speed V with respect to "0" and, as a

consequence: $\frac{d\xi}{d\eta} = 0$ and $\frac{d\xi'}{d\eta'} = -i \frac{V}{c}$, but from the ratios between (A1.11) we have that:

$$\frac{d\xi'}{d\eta'} = \frac{d\xi \cos \theta - d\eta \sin \theta}{d\xi \sin \theta + d\eta \cos \theta} = \frac{\frac{d\xi}{d\eta} \cos \theta - \sin \theta}{\frac{d\xi}{d\eta} \sin \theta + \cos \theta} = \frac{0 - \sin \theta}{0 + \cos \theta} = -\tan \theta \quad \text{and so:} \quad \tan \theta = i \frac{V}{c} = i\beta$$

but we know from trigonometry that: $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ and:

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{and so the (A1.10) become:}$$

$$\xi' = \frac{\xi - i\eta\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{and} \quad \eta' = \frac{i\xi\beta + \eta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{that is:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{(x - Vt)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{(t - \frac{\beta}{c} x)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right.$$

and so (A1.8) again. By the same way, we also get (A1.9).

App.1-Par. 1.3: The contraction of length, or of Lorentz.

The above equation (E) is already a proof. Moving objects with speeds close to that of light are shorter to not moving observers. If those observers make measurements to get the length of the running body, the best way is to use light sources (the fastest thing), by illuminating the bow and the stern of that body, in order to see the corresponding positions, moment by moment. But that light has a constant speed, and limited, too, and the result will be that of a shorter body. Reality or measuring appearance? Convince yourself immediately that (observed) reality and the measuring appearance are the same thing, and it must be so! Anyway, as the traveller spends a shorter time (time dilation), then with the same speed $\sim c$, he will think he just ran a shorter distance. Let l be the length of a segment in the O system:

$|x_B - x_A| = l$. In O' , according to Lorentz Transformations:

$$l' = |x'_B(t') - x'_A(t')| = \frac{|(x_B - Vt_B) - (x_A - Vt_A)|}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{|x_B - x_A|}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}} = l', \text{ as in system O the measurement of}$$

the segment makes sense if both ends are detected "simultaneously" ($t_A = t_B$).

When v tends to c , $\beta = v/c$ will tend to 1 and the radical will tend to zero, as well as l !

Therefore, the length l measured in O will be that measured in O' by a value less than 1, that is, the observer at rest (O) will detect a shorter object.

App.1-Par. 1.4: Time dilation (Twin Paradox).

It sounds strange, but time, too, can be, and is, relative. Of course, every observer, in himself, sees time going by still in the same way; if you move with a speed close to that of light, you will not hear your heart beating slower. The comparison between those two observers which were in relative motion will show the difference on how those two times went by.

So, according to Lorentz Transformation, in O' (moving system): $\Delta t' = t'_B - t'_A$, whilst in O (system at rest):

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{t'_B + x'_B \beta/c - t'_A - x'_A \beta/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ but, by assumption, } x'_A = x'_B, \text{ as in the system } O' (O', x', y', z') \text{ the}$$

clock is at rest, as it's travelling with the system O' itself; therefore:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

When v tends to c , $\beta = v/c$ will tend to 1 and the radical will tend to zero, as well as $\Delta t'$!

Two twins separate as one leaves for a space travel one month long and at speeds close to that of light; once back to the Earth, he sees the other twin thirty years older! (Twin Paradox)

At a speed of 260.000 km/s you have the halving, so the radical will be $1/2$ and those two times will go by one a half of the other.

See also the proof of the time dilation by the light clock (in the Introduction) and also that on a Doppler Effect basis (App.1-Par. 3.6).

App.1-Par. 1.5: The four-vector position.

Instead of writing the position vectors with the three classic components x , y and z , let's write them in a mathematically four-dimensional form, by adding time; this will be very useful. In the (justified) opinion of the writer, our Universe is three-dimensional and the adding of a fourth dimension is a purely mathematical operation; in fact, I defy you to show me the fourth dimension of a whatsoever object which is held four-dimensional. In the nowadays' STR, a real four dimension is believed!

Well, so: $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, which is the same as: (x, y, z, ct) .

By this new terminology, the Lorentz Transformations become:

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma x_1 - \beta \gamma x_4 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = -\beta \gamma x_1 + \gamma x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \gamma x'_1 + \beta \gamma x'_4 \\ x_2 = x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ x_4 = \beta \gamma x'_1 + \gamma x'_4 \end{cases} \quad (\text{A1.12})$$

where $\beta = V/c$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

You can prove the space-time distance between two points is invariant for Lorentz Transformations, i.e. it is the same in all inertial reference systems:

$$(\Delta x)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2 = (\Delta x')^2 = (\Delta x'_1)^2 + (\Delta x'_2)^2 + (\Delta x'_3)^2 - (\Delta x'_4)^2 \quad (A1.13)$$

(This expression is a kind of Pythagorean Theorem in four dimensions).

In order to prove that, use the Lorentz transformations in (A1.13), where there are Δx_i in place of x_i , and you check the equality.

In other words, three dimension length and time are relative, while their four-dimensional composition is absolute. That's why we said the definition of physical quantities by four components would have been useful.

We can then use the Lorentz transformations on all four-vectors, in the form of (A1.12).

If we use matrixes, Lorentz Transformations can be written in the following way:

(remember the matrix product, with the components of the row of the first matrix which are multiplied by the corresponding components of the column of the second matrix, then summing up those products to get the component of the product matrix, indeed)

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (A1.14)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \quad (A1.15)$$

while, for the tensor form:

(use the Einstein convention, according to which, if in a term an index is repeated, the summation on that index is understood)

$$x'_i = \alpha_i^k x_k \quad (i,k=1,2,3,4) \quad \text{on the right side, } k \text{ is repeated, so you make the summation on it} \quad (A1.16)$$

$$x_k = \alpha_k^i x'_i \quad (i,k=1,2,3,4) \quad (A1.17)$$

App.1-Par. 1.6: Relativistic Law of Transformation of Velocities.

If I'm walking with a speed of 5 km/h in a railway train car which is travelling with a speed of 100 km/h with respect to the platform, I'll have, with respect to the platform, a total speed of 105 km/h. This is classical physics. On the contrary, when those two speeds get close to that of light, the simple composition by algebraic summation cannot be used anymore, as it would show us a speed higher than that of light c , which must be impossible.

Therefore, we have, by definition:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = dx/dt \\ v_y = dy/dt \\ v_z = dz/dt \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = dx'/dt' \\ v'_y = dy'/dt' \\ v'_z = dz'/dt' \end{array} \right.$$

Now, by differentiating the Lorentz Transformations, we have:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{(dx' + V dt')}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \frac{(dt' + \frac{V}{c^2} dx')}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right.$$

from which:

$$\begin{cases} v_x = dx/dt = \frac{(dx' + Vdt')}{(dt' + \frac{V}{c^2} dx')} \\ v_y = dy/dt = \frac{dy' \sqrt{1-\beta^2}}{(dt' + \frac{V}{c^2} dx')} \\ v_z = dz/dt = \frac{dz' \sqrt{1-\beta^2}}{(dt' + \frac{V}{c^2} dx')} \end{cases}$$

If now we divide numerator and denominator of last equations by dt' , we have:

$$\begin{cases} v_x = \frac{(v'_x + V)}{(1 + \frac{Vv'_x}{c^2})} \\ v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{(1 + \frac{Vv'_x}{c^2})} \\ v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{(1 + \frac{Vv'_x}{c^2})} \end{cases} \quad (\text{A1.18}) \quad \text{and similarly:} \quad \begin{cases} v'_x = \frac{(v_x - V)}{(1 - \frac{Vv_x}{c^2})} \\ v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{(1 - \frac{Vv_x}{c^2})} \\ v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{(1 - \frac{Vv_x}{c^2})} \end{cases}$$

When $V/c \ll 1$ and $v'_x/c \ll 1$ we are in the classic case (galileian) of algebraic sum.

If we use again the example of the railway train car, where a guy walks inside, if we say $\underline{v}' = (v'_x, 0, 0, c)$ and $\underline{v} = (v_x, 0, 0, c)$, from (A1.18) we have:

$$v_x = \frac{(v'_x + V)}{(1 + \frac{Vv'_x}{c^2})} \quad (\text{A1.19})$$

and if $v'_x = V = c$, then $v_x = c$, and not $2c$! Therefore, if the train moves with a speed c and I run inside at c , as well, with respect to the platform, I'll have a resulting speed equal to c and not $2c$!

(1.19) represents the Relativistic Theorem of Addition of Velocities.

As an example: two rockets travel each with speed $c/2$ and meet; at which velocity v_x do they meet?

$$v_x = \frac{(c/2 + c/2)}{(1 + \frac{c^2}{4c^2})} = \frac{c}{5/4} = \frac{4}{5}c < c$$

App.1-Par. 1.7: The Proper Time $d\tau$ of a particle.

If a particle is at rest in (O', x', y', z') , i.e. if it moves in O' , indeed, i.e. if O' is its "proper" reference system, then: $dx' = dy' = dz' = 0$ and:

$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0 + 0 + 0 - c^2 dt^2 = -c^2 dt^2$, from which:

$$dt' = d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (\text{proper time, invariant, as so is } \frac{ds}{c}).$$

Therefore, when you make calculations on a particle, you are led to use for it its proper time, indeed:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma}.$$

App.1-Chapter 2: The relativity of energies.

App.1-Par. 2.1: The energy-momentum four-vector (or linear momentum).

We know from classical physics that the linear momentum is given by the product of the mass by the velocity. Now, in the relativistic case, for what has been said so far, we will define a 4-vector and then the velocity as dx/dt will have the proper time $d\tau$ instead of dt , which is typical of the particle, indeed, for which we are going to define the four-vector:

$$\underline{p} = (m_0 \frac{dx_1}{d\tau}, m_0 \frac{dx_2}{d\tau}, m_0 \frac{dx_3}{d\tau}, m_0 \frac{dx_4}{d\tau}) = (\frac{m_0}{1/\gamma} \frac{dx_1}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma} \frac{dx_2}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma} \frac{dx_3}{dt}, \frac{m_0}{1/\gamma} \frac{dx_4}{dt}) =$$

$$= (m \frac{dx_1}{dt}, m \frac{dx_2}{dt}, m \frac{dx_3}{dt}, m \frac{dx_4}{dt}) = (m\vec{v}, mc) = (\vec{p}, mc) = \underline{p}$$

where $\vec{v}$ is the (three-dimension) velocity vector, $\vec{p}$ is the three-dimension linear momentum,

$mc = m \frac{dx_4}{dt}$ is the 4-dimension component, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ is the proper time and $m = \frac{m_0}{1/\gamma} = \gamma m_0$ is the dynamic mass,

which is the rest mass only if $v=0$. We have just begun to introduce the concept of relative mass, which is increasing with speed, and becoming infinite when $v=c$. As already said before, the modules of 4-vectors are "absolute", i.e. they are invariant for Lorentz T.; in fact:

$$|\underline{p}|^2 = |\vec{p}|^2 - p_4^2 = m^2 v^2 - m^2 c^2 = -m^2 (c^2 - v^2) = -\frac{m_0^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})} (c^2 - v^2) = -m_0^2 c^2 = \text{constant, i.e. it's not}$$

depending on v . Let's write again the above equation: $m^2 v^2 - m^2 c^2 = -m_0^2 c^2$ or: $m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$, but mc^2 , where m as the dynamic mass (old nomenclature), is the total energy of the particle, as in the dynamic mass the rest mass is already included, as well as the increase of mass coming from the energy given to the particle.

By multiplying both sides by c^2 , we get: $m^2 c^4 = (m^2 v^2) c^2 + m_0^2 c^4$ or: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ (total energy)

This is the most general formula we have for the energy and is suitable for a relativistic particle indeed.

In Relativity there exist a Universe (mathematically 4-dimensional) described by 4-vectors, where quantities are not changing so arbitrarily with speed and where laws of nature preserve some consistency, no matter what the state of motion is.

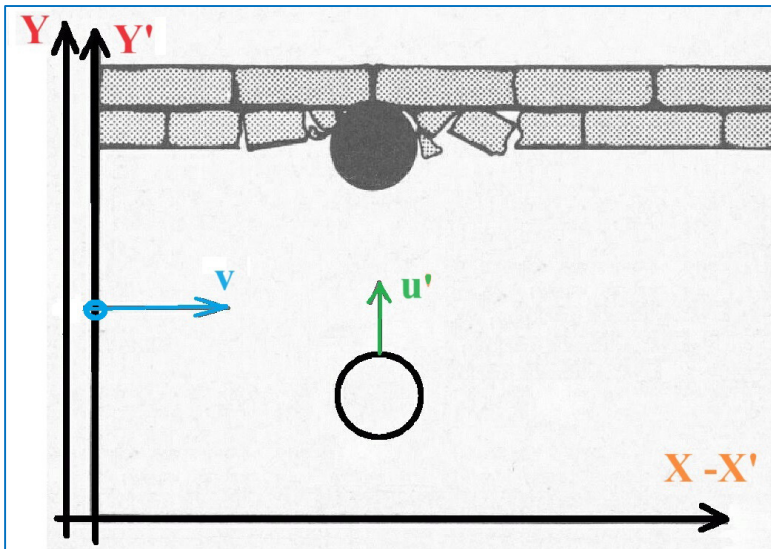
Therefore, a particle whose mass is m_0 has got a total energy:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{and "at rest" (} v = 0 \text{ and so } \gamma = 1 \text{) it has a "rest" energy: } \boxed{E_0 = m_0 c^2}$$

By this equation, we consider as already proved the famous Einstein's formula on the energy for the rest mass.

The shortest proof for $E_0 = m_0 c^2$.

Mass is relative



The cannonball.

With reference to the above figure, the frame $X'-Y'$ is that on board of a spacecraft which is moving along X with a relativistic velocity v ; inside such a spacecraft a cannonball is shot upwards along Y' , towards the top wall, with a low velocity $u' \ll c$. The damage on the wall is due to both the velocity $u' = \frac{dY'}{dt'}$ and the mass m' of the cannonball; in a

single expression, it's due to the impulse: $p' = m'u'$.

For those who are on the Earth (frame $X-Y$), the cannonball travels horizontally with a relativistic velocity v (along X) but it also has a low vertical velocity $u = \frac{dY}{dt}$, but along Y there is no relative motion between the two frames, so:

$dY' = dY$, while time changes, due to the time dilation and all what happens on board of the frame $X'-Y'$ appears as slowed down, in the frame $X-Y$'s point of view. Therefore, the cannonball, for $X-Y$, will have, as already said, a velocity

$$(*) : u = \frac{dY}{dt} = \frac{dY'}{dt' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dY'}{dt'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = u' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < u' \text{ and an impulse:}$$

$$p_{(?) } = mu = mu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < p' \text{ and here the physics would be violated (Principle of Relativity), as we would deal}$$

with an impulse lower than that on board and so the wall of bricks would be less damaged or even not damaged at all; so we would have two different looks of the same result. As the damage on the wall must be the same for both frames, then we are forced to consider the mass m seen by the frame $X-Y$ as larger than that seen by the frame $X'-Y'$, so we have:

$$m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (A)$$

$$\text{and so, finally: } p = mu = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} u' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m' u' = p' \text{ and the damage on the wall is conserved.}$$

So, having supplied kinetic energy to the cannonball (along X) made its mass change, so influencing also the computation of the damages made to the wall along Y . And all this is enough to allow us to support the equivalence between mass and energy (we supply an E which turns into a Δm ). Now, we know that the link between energy and mass is like:

$$E = kmv^2 \quad ([k] \cdot [m] = [kg]); \quad (B)$$

In fact, for instance, the classical kinetic energy is: $E = \frac{1}{2} mv^2$ and so on.

Now, the energy supplied to the cannonball caused a change ΔE of its kinetic energy and a change of its mass equal to:

$$\Delta m = m - m' = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m' = m' \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (C)$$

and as we know that energy supply (for the motion along X) caused Δm (the only active responsible), then, from the (B) and the (C), we have:

$$\Delta E_{relativistic} = k \cdot \Delta m \cdot v^2 = km'v^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = km'c^2 \left[\frac{v^2}{c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \right]. \quad (D)$$

Now, as the cannonball is still (on X') in the spacecraft, while it's moving along X with velocity v for the frame on the Earth, then, in case of a low velocity v ($v \ll c$, not relativistic), as ΔE we must have:

$$\Delta E_{classical} = \Delta E_k = E_{k_for_Earth} - E_{k_on_spacecraft} = \frac{1}{2} m'v^2 - \frac{1}{2} m'0^2 = \frac{1}{2} m'v^2 \quad (E)$$

Now, let's consider the factor $\left[\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\right]$ into the (D) and in a classical case ($v \ll c \rightarrow v^2/c^2 \ll 1$) we carry

out the Taylor Development in the variable $\frac{v^2}{c^2}$ and around the zero ($v^2/c^2 \sim 0$):

$$(f(x) = 1/\sqrt{1-x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots, \text{ so: } \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \cong \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \quad \text{and: } \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \cong \frac{1}{2}\frac{v^4}{c^4}$$

so the (D) becomes:

$$\Delta E_{(v \ll c)} = km'c^2\left[\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\right] \cong km'c^2\frac{1}{2}\frac{v^4}{c^4} = km'\frac{1}{2}\frac{v^4}{c^2} \quad (F)$$

and as we are by assumption, for this particular calculation, under the condition of $v \ll c$, then the (F) must match the

(E); therefore: $km'\frac{1}{2}\frac{v^4}{c^2} = \frac{1}{2}m'v^2$, that is: $k = \frac{c^2}{v^2}$ and at last, by going back to the relativistic (D):

$$\begin{aligned} \Delta E_{relativistic} &= km'c^2\left[\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\right] = \frac{c^2}{v^2}m'c^2\left[\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\right] = \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m'c^2 = \\ &= \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} = E - E_0 \end{aligned} \quad (G)$$

so the (G) ($\Delta E_{kinetic-relativistic} = E - E_0$) can be read by saying that for $v=0$ the cannonball has a rest energy

$E_0 = m'c^2$ anyway, and it will be increased by the motion (as well as its mass will do), so becoming $E = \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,

thank the kinetic energy supply (that given by the (G)). End of the proof!

(*): we are talking about a velocity $u = u'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, while the Law of Transformation of Velocities says that:

$$\left\{ \begin{aligned} v'_x &= \frac{(v_x - V)}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} \\ v'_y &= \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} \\ v'_z &= \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} \end{aligned} \right.$$

but considering the second one with $V=v_x$ (as, for the frame X-Y, all on board objects, on the frame X'-Y', have a velocity v_x which is equal to the velocity V of the whole spacecraft), we have:

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta^2)} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{which is indeed}$$

the equation we used, that is: $u' = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

App.1-Par. 2.2: The velocity four-vector.

We obviously define it as follows: $\underline{v} = \frac{dx}{d\tau}$, where we use the proper time $d\tau$ for reasons already shown. Numerator and denominator are both invariant, so also $\underline{v}$ is.

We have:

$$\underline{v} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau} \right) = \left(\gamma \frac{dx_1}{dt}, \gamma \frac{dx_2}{dt}, \gamma \frac{dx_3}{dt}, \gamma \frac{dx_4}{dt} \right) = (\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, \gamma c) = (\gamma \vec{v}, \gamma c),$$

$$\text{and so, as a module for such a 4-vector: } |\underline{v}|^2 = \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2 \text{ (constant!)}. \quad (\text{A2.1})$$

Par. 2.3: The four-force.

As in classical physics, force is the derivative of the linear momentum with respect to time, in relativity we define the 4-force as the derivative of the energy-momentum 4-vector with respect to time (proper time):

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = (F_1, F_2, F_3, F_4) = (\vec{F}, F_4) = \left(\frac{d}{d\tau} \vec{p}, \frac{d}{d\tau} (m_0 \gamma c) \right) = \left(\gamma \frac{d}{dt} (m_0 \vec{v}), \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma c) \right); \quad (\text{A2.2})$$

$$\text{so we have: } \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v}) = \gamma \cdot \vec{f} = \vec{F}, \quad (\text{A2.3})$$

$$\left(\frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v}) = \vec{f} \text{ is the "classic" force, and it's more so when } \gamma = 1 \right)$$

$$\text{and so: } \gamma \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) = \frac{\vec{F}}{m_0} = \frac{d}{d\tau} (\gamma \vec{v}), \text{ and by components:}$$

$$\gamma \frac{d}{dt} (\gamma v_i) = \frac{F_i}{m_0} = \frac{d}{d\tau} (\gamma v_i) \quad (i=x,y,z) \quad (\text{A2.4})$$

$$\text{and then, about the fourth component: } \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma c) = F_4 \quad (\text{A2.5})$$

$$\text{and so: } \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c) = \frac{F_4}{m_0} = \frac{d}{d\tau} (\gamma c). \quad (\text{A2.6})$$

Now, we differentiate (A2.1), that is, the following equation:

$$|\underline{v}|^2 = \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = \gamma^2 v_x^2 + \gamma^2 v_y^2 + \gamma^2 v_z^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2, \text{ so getting:}$$

$$0 = \left(\frac{d}{d\tau} (\gamma v_x)^2 + \frac{d}{d\tau} (\gamma v_y)^2 + \frac{d}{d\tau} (\gamma v_z)^2 - \frac{d}{d\tau} (\gamma c)^2 \right) = (2\gamma v_x \frac{d}{d\tau} (\gamma v_x) + 2\gamma v_y \frac{d}{d\tau} (\gamma v_y) + 2\gamma v_z \frac{d}{d\tau} (\gamma v_z) - 2\gamma c \frac{d}{d\tau} (\gamma c))$$

$$\text{that is: } 0 = (\gamma v_x \frac{d}{d\tau} (\gamma v_x) + \gamma v_y \frac{d}{d\tau} (\gamma v_y) + \gamma v_z \frac{d}{d\tau} (\gamma v_z) - \gamma c \frac{d}{d\tau} (\gamma c)), \text{ and, for (A2.4) and (A2.6):}$$

$$0 = (\gamma v_x \frac{F_x}{m_0} + \gamma v_y \frac{F_y}{m_0} + \gamma v_z \frac{F_z}{m_0} - \gamma c \frac{F_4}{m_0}) \text{ and for (A2.3) } (\gamma \cdot \vec{f} = \vec{F}):$$

$$0 = (\gamma v_x \frac{f_x}{m_0} + \gamma v_y \frac{f_y}{m_0} + \gamma v_z \frac{f_z}{m_0} - \gamma c \frac{F_4}{m_0}), \text{ that is:}$$

$$F_4 = \frac{\gamma}{c} (\vec{f} \cdot \vec{v}). \quad (\text{A2.7})$$

If now we go back to (A2.2), we finally have the 4-force, or Minkowski force:

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = (\gamma \vec{f}, \frac{\gamma}{c} (\vec{f} \cdot \vec{v})) \quad (\text{A2.8})$$

To have the transformation equations for such a 4-force, please see Subappendix 1.4.

Par. 2.4: $E_0 = m_0 c^2$.

According to (A2.5), we have: $\gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c) = F_4$, whilst for (A2.7) we have: $F_4 = \frac{\gamma}{c}(\vec{f} \cdot \vec{v})$. Therefore:

$$\gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c) = \frac{\gamma}{c}(\vec{f} \cdot \vec{v}), \text{ that is: } \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2) = \vec{f} \cdot \vec{v}, \text{ that is, again:}$$

$$d(m_0 \gamma c^2) = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = dL = dE \quad (\text{A2.9})$$

(A2.9) is exactly the expression for the energy in classical physics, if $\gamma = 1$; the integration of (2.9) with integration constant equal to zero yields:

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad (\text{A2.10})$$

In reality (A2.10) holds only for gained energies (as in particle accelerators), while for lost energies (collapsing Universe or Atomic Physics of electrons going down in energy levels) the following must be used:

$$E = \frac{1}{\gamma} m_0 c^2 \quad (\text{Rubino})$$

(see also the following link: <https://vixra.org/pdf/2202.0010v1.pdf>).

Therefore, a particle whose mass is m_0 has got a total energy:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{A2.11})$$

and "at rest" ($v = 0$ and so $\gamma = 1$) it has a "rest" energy:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (\text{A2.12})$$

App.1-Par. 2.5: Relativistic kinetic energy.

The difference between (A2.11) and (A2.12) obviously yields the pure kinetic energy of a particle:

$$E_K = E - E_0 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (\text{A2.13})$$

If now we develop, according to Taylor, the expression for $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, we get, for $v \ll c$ ($\beta \ll 1$):

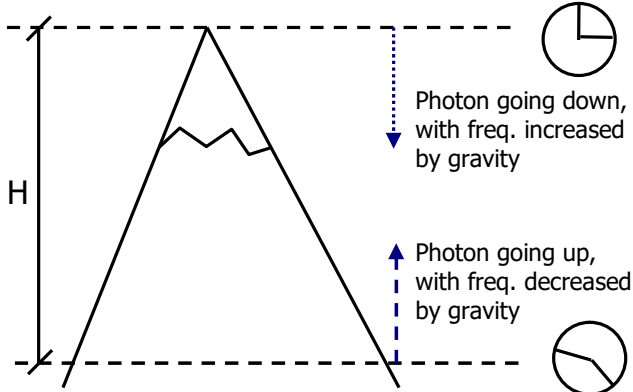
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots, \text{ that is: } (\gamma - 1) \cong \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \text{ and for (A2.13):}$$

$$E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (v \ll c) \text{ which is the well known classic expression (Newton's) for the kinetic energy!}$$

App.1-Chapter 3: Relativistic phenomena.

App.1-Par. 3.1: Time and gravity: gravity slows down the time!

Also gravity slows down the time! On a mountain time elapses faster than down in the valley. Of course, on the Earth, the difference is imperceptible, but on a neutron star or in a black hole, that effect is very strong.



$$\Delta E = m_0 g H \quad (\text{delta energy from the level difference})$$

$$\Delta E = h \Delta \nu \quad (\text{delta energy due to the freq. decrease of the photon}). \text{ From them: } \Delta \nu = m_0 g H / h.$$

$$\text{For a photon, } E = h \nu, \text{ but in relativity: } E = m_0 c^2,$$

$$\text{from which, for a photon: } m_0 = h \nu / c^2 \text{ and so,}$$

$$\text{for } \Delta \nu : \Delta \nu = \nu g H / c^2 \text{ and as time is the reciprocal of the frequency, we have: } \Delta \nu / \nu = \Delta t / t \text{ and so:}$$

$$\Delta t = \frac{g H}{c^2} t \quad \text{Therefore, over a time } t, \text{ we have a slow down } \Delta t \text{ due to gravity!}$$

Fig. A3.1: Mountain, gravity and time.

We know that the escape velocity of a celestial body whose mass is M and radius R is: $V = \sqrt{2GM/R}$. If on that body an object is cast vertically with the escape velocity, it will quit the gravitational field of that celestial body and will go towards the infinite, without falling down anymore.

A black hole is a body so compressed (big M and small R) that the escape velocity on its surface reaches the speed of light and so not even the light can escape, from which the name of black hole; moreover, for what above said, we can say that in a black hole time is approximately stopped!

App.1-Par. 3.2: Volume of moving solids.

Moving solids appear rotated.

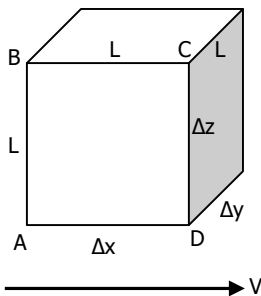


Fig. A3.2: Body seen at rest.

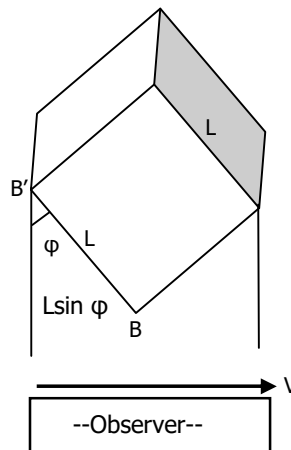


Fig. A3.3: Body seen moving.

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (\text{volume of the solid for an observer integral with it})$$

$$V' = \Delta x' \Delta y' \Delta z' = \Delta x \sqrt{1 - \beta^2} \Delta y \Delta z = V \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{volume of the solid for an observer who sees that solid in movement with speed } V, \text{ along } x).$$

Of course, for Lorentz Transformations, as the movement is along x , only Δx is contracted. On the other hand, the observer at rest sees point B with a delay with respect to A, and this delay is L/c , obviously. As a further consequence, B appears as moved back about a stretch which is $(L/c)V = \beta L$.

We have: $L \sin \phi = \beta L$, from which: $\sin \phi = \beta$ and $\phi = \arcsin \beta$.

Finally, that body appears rotated! And a sphere goes on appearing as a sphere.

App.1-Par. 3.3: The equation of waves, or of D'Alembert, holds in every inertial reference system.

Electromagnetic waves in vacuum, and so the light, too, propagates, as well known, respecting the wave equation:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 = \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \square \phi$$

Now, we preliminarily notice that, according to the Lorentz Transformations, we have (by deriving them):

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma V, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma \frac{V}{c^2}, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \dots = 0$$

According to mathematical analysis, we have, in O' : $\phi = \phi(\vec{r}', t')$, and so:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x'} + (-V)\gamma \frac{\partial \phi}{\partial t'} ; \text{ furthermore:}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{V^2}{c^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - \frac{2V}{c^2 - V^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'}$$
 and similarly, for the other coordinates:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -V\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t'} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left(V^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - 2V\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}$$

from which, by substitution in the wave equation, we have:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \quad \text{that is what we wanted to prove.}$$

App.1-Par. 3.4: The Fizeau experiment.

In 1849, a long time before the formulation of the Special Theory of Relativity by Einstein (1905), the French physicist A.H.L. Fizeau carried out studies on the speed of light in water and in moving fluids.

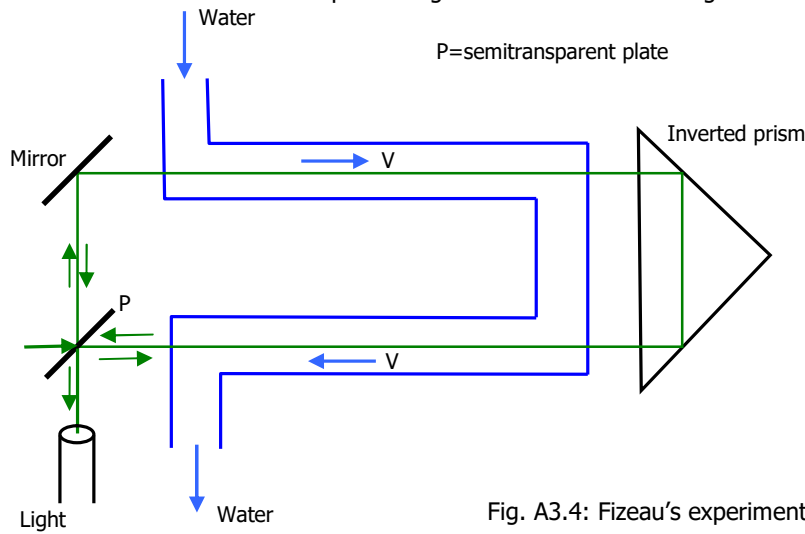


Fig. A3.4: Fizeau's experiment.

In water at rest, light has velocity $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,33} \cong 225.000 \text{ km/s}$, where $n=1,33$ is the refractive index of

water. If now water, or the fluid, in which we are going to measure the speed of light, flows with speed V , then, according to Fizeau's results, the total velocity of light in the flowing fluid is:

$$v = \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (\text{A3.1})$$

in total disagreement with classical physics, according to which we should more simply have: $v = \frac{c}{n} + V$.

Years later, STR has given a theoretical explanation of (A3.1). In fact, for the Theorem of Addition of Velocities given by (A1.19), we can write that:

$$v = \frac{\left(\frac{c}{n} + V \right)}{\left(1 + \frac{Vc}{nc^2} \right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V \right)}{\left(1 + \frac{V}{nc} \right)} ; \text{ now, we multiply numerator and denominator by } \left(1 - \frac{V}{nc} \right), \text{ and we have:}$$

$$v = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)}{\left(1 + \frac{V}{nc}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{nc}\right)}{1 - \left(\frac{V}{nc}\right)^2} = \frac{\frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{V^2}{nc}}}{1 - \left(\frac{V}{nc}\right)^2}, \text{ but quantities } \frac{V^2}{nc} \text{ on the numerator and } \left(\frac{V}{nc}\right)^2 \text{ on the denominator are both negligible } (<<1) \text{ with respect to the other terms and can be neglected indeed, from which the assertion: } v = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

App.1-Par. 3.5: Relativistic Doppler Effect (longitudinal).

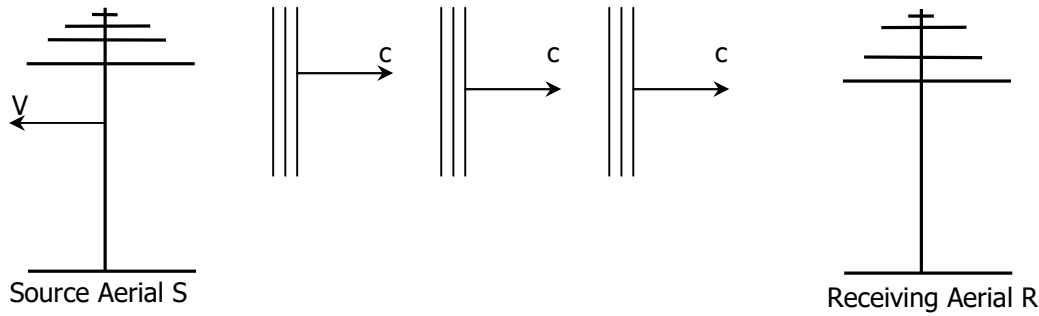


Fig. A3.5: Longitudinal Doppler Effect (example of a source S getting farther from R with speed V (β)).

The source aerial sends electromagnetic signals to the receiving one, and the periods is T_S ;
Because of the time dilation, the receiving aerial will receive them with a period T'_S , so that:

$$T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \text{ moreover, the fact that S is getting farther will cause a } \Delta T'_S \text{ among phase fronts, which is:}$$

$$\Delta T'_S = \frac{VT'_S}{c} = \frac{V}{c} \frac{T_S}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta \frac{T_S}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \text{ so, we'll totally have } T_R:$$

$$T_R = T'_S + \Delta T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \beta \frac{T_S}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{T_S}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 + \beta) = \frac{T_S}{\sqrt{(1 - \beta)\sqrt{1 + \beta}}} (1 + \beta) =$$

$$= \frac{T_S}{\sqrt{1 - \beta}} \sqrt{1 + \beta} = T_S \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} = T_R$$

$$\text{and we rewrite it here: } T_R = T_S \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}}; \text{ (S and R getting farther)} \quad (\text{A3.2})$$

The same holds if the receiver is the one who gets farther. If, then, S and R are getting closer, through the same reasonings which led us so far, the following holds:

$$T_R = T_S \frac{\sqrt{1 - \beta}}{\sqrt{1 + \beta}} \text{ (S and R getting closer).} \quad (\text{A3.3})$$

For a more general treatment of this subject, see Subappendix 1.2.

App.1-Par. 3.6: The Twin Paradox explained by the Relativistic Doppler Effect!

Say a twin leaves for a space flight with a velocity equal to $3/5 c = 180.000 \text{ km/s}$, getting far away from the Earth for 25 min (measured on the Earth) and then he comes back towards the Earth with the same velocity, so taking another 25 min. Out of simplicity, we neglect the acceleration and deceleration phases.

Now, in order to prove that the time dilation acts also on the cardiac (heart) rhythm of the travelling twin (but still in the opinion of the twin at rest on the Earth, and when the twins meet on the Earth, at the end of the flight), say, out of simplicity, both twins have one heartbeat per second and say the twin on the Earth transmits a radio pulse (whose speed is c) every second, i.e. every heartbeat, towards the space ship, in order to inform his travelling twin brother on his own cardiac rhythm. Now, remember that in the opinion of the "older" twin at rest on the Earth, the flight lasts, by supposition, $25 + 25 = 50 \text{ min}$ (3000 heartbeats), while, if the time dilation is true, for the "younger" travelling twin it lasts ($V = 3/5 c$, that is: $\beta = 3/5$):

$$T_{young} = T_{old} \sqrt{(1 - \beta^2)} = T_{old} \sqrt{(1 - \frac{V^2}{c^2})} = 50 \text{ min} \sqrt{(1 - \frac{9c^2}{25c^2})} = 40 \text{ min} (=2400 \text{ heartbeats})$$

Moreover, under a Doppler analysis of the phenomenon, we can say that for equation (A3.2), the twin on the Earth (old) transmits his heartbeats every second, but the flying twin will receive them, during the first "to" step of the flight, every two seconds; in fact:

$$T_{young}(to) = T_{old}(to) \frac{\sqrt{(1 + \beta)}}{\sqrt{(1 - \beta)}} = 1s \frac{\sqrt{1 + (3/5)}}{\sqrt{1 - (3/5)}} = 2s, \text{ so, in the "to" step, the flying twin, whose "to" flight time is}$$

20 min=1200s=1200 heartbeats, has received one heartbeat every 2s from his brother on the Earth, that is just 600 heartbeats.

Therefore, the flying twin, during his 20 min(=1200s) "to" flight, has counted on himself 1200 heartbeats, but has received only 600 from his brother on the Earth.

After 20 min of the flying twin, the direction of the flight is inverted and the return to the Earth starts, for another 20 min (still according to the time measured by the flying twin). During those further 20 min's return flight ("from"), on the contrary, the twin on the Earth still transmits every second, but the flying one now receives every half a second; in fact, for equation (A3.3):

$$T_{young}(from) = T_{old}(from) \frac{\sqrt{(1 - \beta)}}{\sqrt{(1 + \beta)}} = 1s \frac{\sqrt{1 - (3/5)}}{\sqrt{1 + (3/5)}} = 0,5s, \text{ so, during those further flyer's 20 min=1200s=}$$

=1200 heartbeats counted on himself, the flyer receives 2400 heartbeats from his brother on the Earth.

Therefore, the flying twin, during his further 20 min(=1200s) return flight, has obviously counted on himself another 1200 heartbeats and has received 2400 (!) from his brother from the Earth.

Sum up of the counts:

Totally, during the whole space flight, of 20+20=40 min, the flying twin has obviously counted 1200+1200=2400 heartbeats on himself and (a piece of!) 600+2400=3000 heartbeats from his twin brother on the Earth.

He must feel younger!!!

App.1-Par. 3.7: The Michelson and Morley experiment.

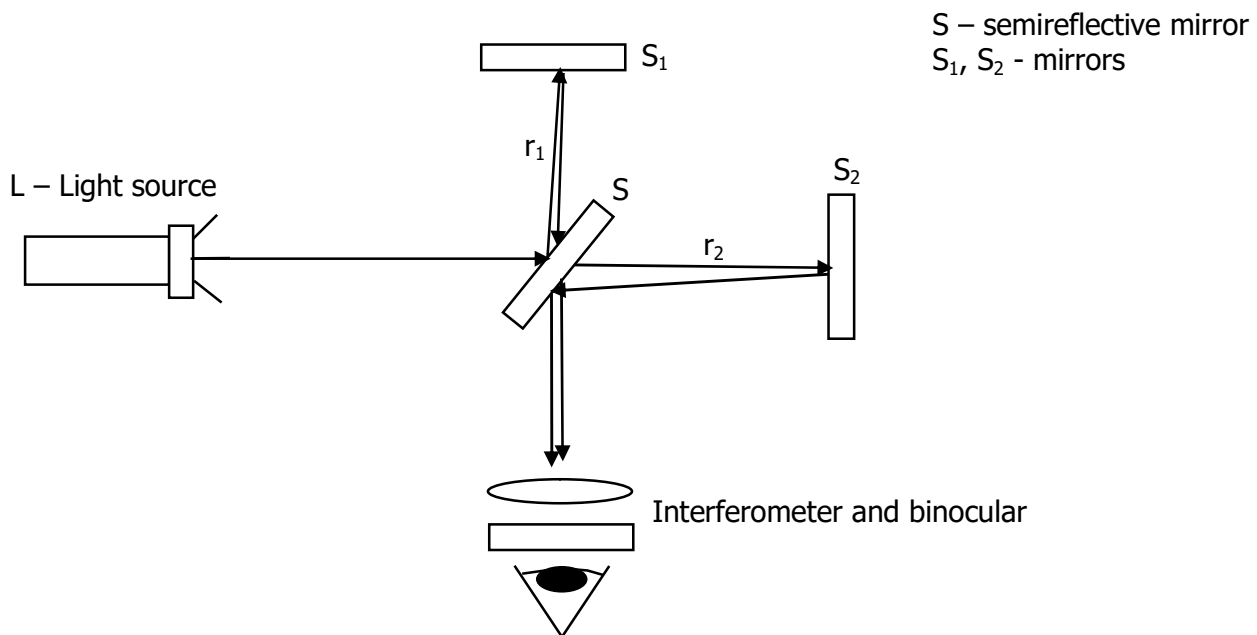


Fig. A3.6: Michelson's device (interferometer).

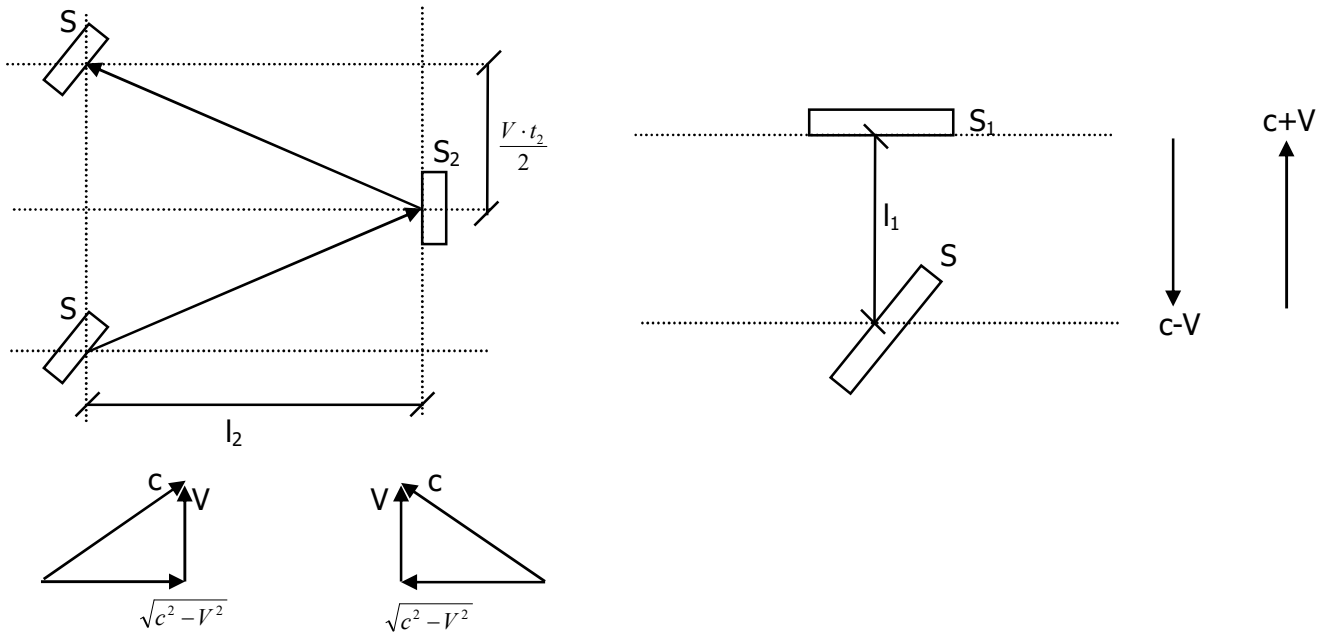


Fig. A3.7: Luminous paths and relevant velocities.

Before Einstein, they thought that electromagnetic waves, and so the light, had to propagate in a mean, as well as for sounds in the air. They supposed that the space was filled with an invisible and very light gas, the ether. The Earth rotates around the Sun with a speed V around 30 km/s, so it should move through the ether with such a speed and light emitted by a light source which is on the Earth itself should have, in general, a speed different from c ($c \pm V$ along the direction of rotation of the Earth and $\sqrt{c^2 - V^2}$ transversally).

In 1886 they started to prepare the experiment which should have proved the movement of the Earth through the ether. In Cleveland they stopped the street traffic during the experiment in order not to have vibrations; the device was put on a floating stone slab in a well of mercury, to easily rotate it of 90° without vibrations.

Now, if you put l_1 along the direction of rotation of the Earth, about the - to and fro - light path, we have:

$$t_1 = \frac{l_1}{c+V} + \frac{l_1}{c-V} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{(1-V^2/c^2)} \text{ and for the transversal path along } l_2:$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}}$$

If you make both rays enter an interferometer to make them interfere, indeed, they should arrive with a Δt :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} - \frac{l_1}{(1-V^2/c^2)} \right) \cong \frac{2}{c} [l_2(1+V^2/2c^2) - l_1(1+V^2/c^2)]$$

as we have $V/c \cong 10^{-4}$, $V^2/c^2 \cong 10^{-8}$ and $(1+x)^k \cong 1+kx$.

The wavelength of the used light was $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7} m$ and we know that λ corresponds to the full angle 2π ; therefore, we can write the following proportion, which involves the phase difference δ between the two rays and the path difference $c\Delta t$:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c\Delta t}{\delta}, \text{ from which: } \delta = \frac{2\pi c\Delta t}{\lambda}.$$

By fixing the one arm length and adjust the other arm one by a micrometric screw, you can make $c\Delta t$ of the same size of λ , so making the desired interference phenomenon.

Now, without bringing any change to the geometry of the device, rotate it of 90° ; the roles of l_1 and l_2 are so swapped and we'll have:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{\sqrt{(1-V^2/c^2)}} - \frac{l_2}{(1-V^2/c^2)} \right) \cong \frac{2}{c} [l_1(1+V^2/2c^2) - l_2(1+V^2/c^2)]$$

$$\text{and we should also have: } \frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{\delta - \delta'}{2\pi} = \frac{c\Delta t - c\Delta t'}{\lambda} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \frac{V^2}{c^2} = \frac{22m}{5,5 \cdot 10^{-7} m} 10^{-8} \cong 0,4, \text{ that is, through the}$$

rotation of the interferometer, you should see a shift of the fringes of interference of 0,4 times the distance λ between two subsequent maxima.

In reality, none of all that was observed, despite the accuracy of the devices was as good as to detect a $\frac{\Delta\delta}{2\pi} = 0,01$!

Michelson declared himself to be disappointed by that experiment, as he couldn't prove the movement of the Earth through the ether.

The question was solved in 1905 by an employee of the Patent Office of Berne, Albert Einstein, who suggested to cease searching for a proof of the movement of the Earth through the ether, for the simple reason that the ether is not existing!

App.1-Chapter 4: Relativistic Electrodynamics.

App.1-Par. 4.1: Magnetic force is simply a Coulomb's electric force(!).

Concerning this, let's examine the following situation, where we have a wire, of course made of positive nuclei and electrons, and also a cathode ray (of electrons) flowing parallel to the wire:

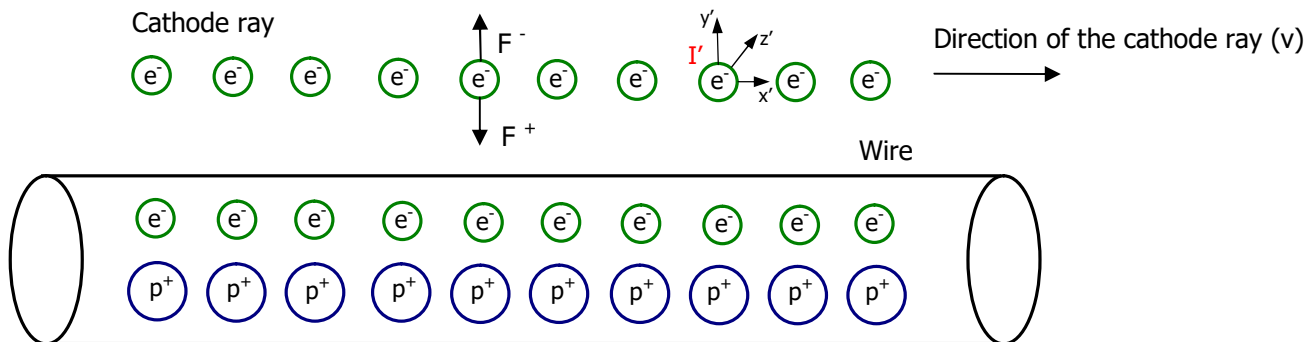


Fig. A4.1: Wire not carrying any current, seen from the cathode ray steady ref. system I' (x' , y' , z').

We know from magnetism that the cathode ray will not be bent towards the wire, as there isn't any current in it. This is the interpretation of the phenomenon on a magnetic basis; on an electric basis, we can say that every single electron in the ray is rejected away from the electrons in the wire, through a force F^- identical to that F^+ through which it's attracted from positive nuclei in the wire.

Now, let's examine the situation in which we have a current in the wire (e^- with speed u)

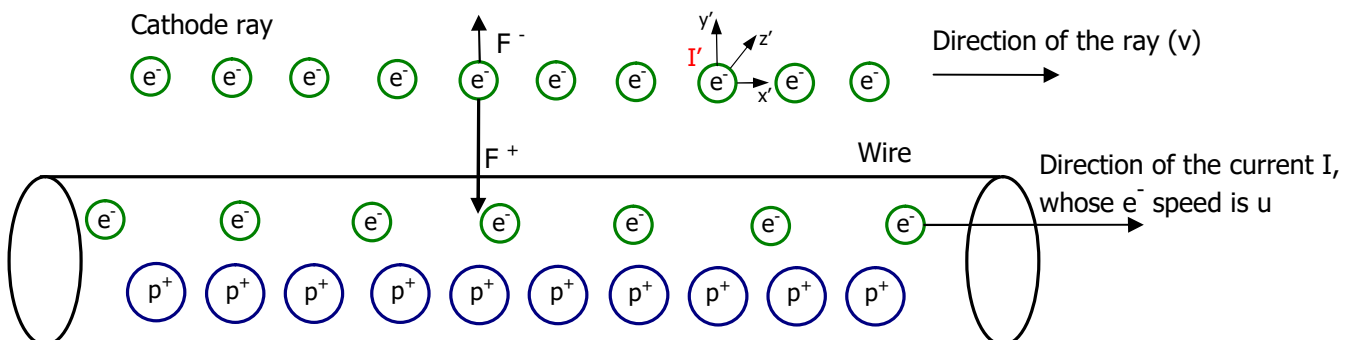


Fig. A4.2: Wire carrying a current (with e^- speed= u), seen from the cathode ray steady ref. system I' (x' , y' , z').

In this case we know from magnetism that the cathode ray must bend towards the wire, as we are in the well known case of parallel currents in the same direction, which must attract each other.

This is the interpretation of this phenomenon on a magnetic basis; on an electric basis, we can say that as the electrons in the wire follow those in the ray, they will have a speed lower than that of the positive nuclei, in the system I' , as such nuclei are still in the wire. As a consequence of that, spaces among the electrons in the wire will undergo a lighter relativistic Lorentz contraction, if compared to that of the nuclei's, so there will be a lower negative charge density, if compared to the positive one, so electrons in the ray will be electrically attracted by the wire.

This is the interpretation of the magnetic field on an electric basis. Now, although the speed of electrons in an electric current is very low (mm/s or even less), if compared to the relativistic speed of light, we must also acknowledge that the electrons are billions and billions..., so a small Lorentz contraction on so many spaces among charges, makes a substantial magnetic force to appear.

But now let's see if mathematics can prove we're quantitatively right on what asserted so far, by showing that the magnetic force is an electric one itself, but seen on a relativistic basis.

On the basis of that, let's consider a simplified situation in which an electron e^- , whose charge is q , moves with speed v and parallel to a nuclei current whose charge is Q^+ each (and speed u):

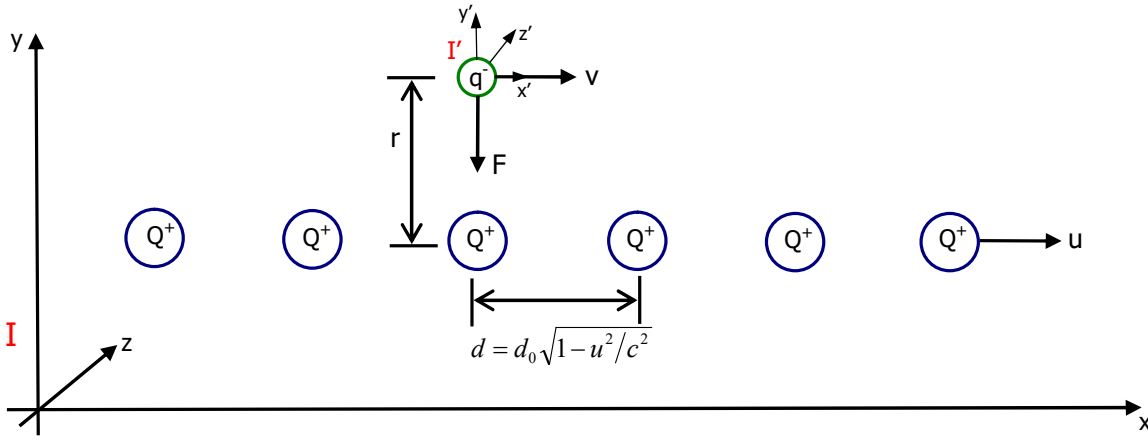


Fig. A4.3: Current of positive charges (speed u) and an electron whose speed is v , in the reader's steady system I .

a) Evaluation of F on an electromagnetic basis, in the system I :

First of all, we remind ourselves of the fact that if we have N charges Q in line and d spaced (as per Fig. A4.3), then the linear charge density λ will be:

$$\lambda = N \cdot Q / N \cdot d = Q/d \quad .$$

Now, still with reference to Fig. A3.3, in the system I , for the electromagnetics the electron will undergo the Lorentz force $F_l = q(E + v \times B)$ which is made of an originally electrical component and of a magnetic one:

$$F_{el} = E \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda}{2\pi r} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} \right) q \quad \text{due to the electric attraction from a linear distribution of charges } Q, \text{ and:}$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \mu_0 \frac{Q/t}{2\pi r} = \mu_0 \frac{Q/(d/u)}{2\pi r} = \mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \quad (\text{Biot and Savart}).$$

$$\text{So: } F_l = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} - v \mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \right) = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 uv \right) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad , \quad (\text{A4.1})$$

where the negative sign tells us the magnetic force is repulsive, in that case, because of the real directions of those currents, and where the steady distance d_0 is contracted to d , according to Lorentz, in the system I where charges Q have got speed u ($d = d_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$).

b) Evaluation of F on an electric base, in the steady system I' of q :

in the system I' the charge q is still and so it doesn't represent any electric current, and so there will be only a Coulomb electric force towards charges Q :

$$F'_{el} = E' \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda'}{2\pi r'} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d'}{2\pi r'} \right) q = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r'} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \quad , \quad (\text{A4.2})$$

where u' is the speed of the charge distribution Q in the system I' , which is due to u and v by means of the well known relativistic theorem of composition of speeds:

$$u' = (u - v) / (1 - uv/c^2) \quad , \quad (\text{A4.3})$$

and d_0 , this time, is contracted indeed according to u' : $d' = d_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2}$.

We now note that, through some algebraic calculations, the following equality holds (see (A4.3)):

$$1 - u'^2/c^2 = \frac{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - uv/c^2)^2} \quad , \text{ which, if replacing the radicand in (A4.2), yields:}$$

$$F'_{el} = E' \cdot q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda'}{2\pi r'} \right) q = \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d'}{2\pi r'} \right) q = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r'} \right) \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{A4.4})$$

We now want to compare (4.1) with (4.4), but we still cannot, as one is about I and the other is about I' ; so, let's scale F'_{el} in (A4.4), to I , too, and in order to do that, we see that, by definition of the force itself, in I' :

$$F'_{el}(\text{in } I') = \frac{\Delta p_{I'}}{\Delta t_{I'}} = \frac{\Delta p_I}{\Delta t_I \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{F_{el}(\text{in } I)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \text{ where } \Delta p_{I'} = \Delta p_I, \text{ as } \Delta p \text{ extends along } y, \text{ and not}$$

along the direction of the relative motion, so, according to the Lorentz transformations, it doesn't change, while Δt , of course, does. So:

$$F_{el}(in_I) = F'_{el}(in_I') \sqrt{1 - v^2/c^2} = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \sqrt{1 - v^2/c^2} =$$

$$= q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = F_{el}(in_I) \quad (A4.5)$$

Now we can compare (4.1) with (A4.5), as now both are related to the I system.
Let's write them one over another:

$$F_I(in_I) = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d}{2\pi r} - v\mu_0 \frac{uQ/d}{2\pi r} \right) = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 uv \right) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$F_{el}(in_I) = q \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q/d_0}{2\pi r} \right) \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = q \frac{Q/d_0}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{uv}{\epsilon_0 c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Therefore we can state that these two equations are identical if the following identity holds: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, and this identity is known since 1856. As these two equations are identical, the magnetic force has been traced back to the Coulomb's electric force, so the unification of electric and magnetic fields has been accomplished!!

Or, more simply:

what's the symbol equation of the "Theory" of Relativity? For sure, almost everybody will answer $E=mc^2$. But this equation looks like that of the kinetic energy of Newton ($(1/2)mv^2$); it's not so new. On the contrary, the most representative equation, which says we are really dealing with relativity, is the following:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ or, better, just the root } \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ or, more simply:}$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

This expression was already hidden into XVIII and XIX century's electromagnetism.

After simplifying a bit all reasonings which follows, we have a linear distribution of positive charges **n** (n charges per metre) and a single charge **q** at distance **d**, as shown in figure A4.4.

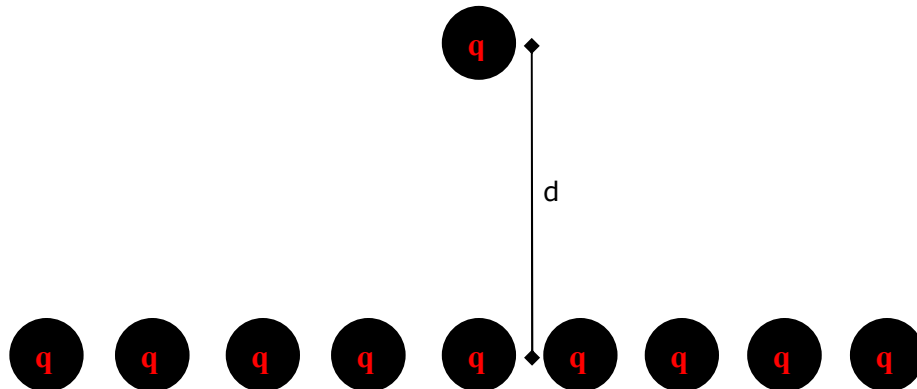
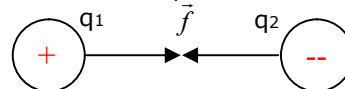


Fig. A4.4.

If the linear density of charge is **λ** [C/m], then, from the Law of Coulomb of 1785, that is:

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{r} \quad (\text{Coulomb-1785})$$



we can get the electric field **E** generated by such a charge distribution and the relevant repulsion force **F** on the single charge **q** is:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} \quad (\text{for Coulomb-1785}), \text{ where } \lambda = nq.$$

And in such a situation, all charges initially look still.

Now, if I (the observer) suppose I travel with speed v to the right, then I will see charges moving backwards, to the left, so I see electric currents, and we know from the XIX century magnetism that currents with the same directions attract each other (two electric wires carrying electric currents with the same directions attract each other; it's what's happening in all electric motors, every day). Therefore, not only we see the charge repulsed, but also magnetically attracted, towards the charge distribution.

According to the total Force of Lorentz, we'll have ($\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{t}$, for Biot-Savart-1820):

$$\vec{F}' = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv \hat{n}, \text{ but, by the definition of an electric current:}$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(n\Delta x)}{\Delta t} = \frac{q(nv\Delta t)}{\Delta t} = qnv = \lambda v \quad (\Delta x = v\Delta t \text{ is the space travelled}), \text{ then:}$$

$$\vec{F}' = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} qv \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q \lambda v^2}{2\pi d} \hat{n}. \text{ Now, we remind the well known equation for the velocity of}$$

$$\text{the electromagnetic waves } c \text{ in vacuum: } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299.792.458 \text{ m/s} \quad (1856)$$

and so: $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$, and we'll have, for the force on the single charge:

$$\vec{F}' = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{\mu_0 q \lambda v^2}{2\pi d} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{n} - \frac{q \lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{v^2}{c^2} \hat{n} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n}, \text{ that is:}$$

$$\vec{F}' = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{n} \quad ; \text{ here is, again, the symbol expression of the Relativity!}$$

Notice that $\vec{F}' \neq \vec{F}$, which means the observers (still one and moving one) are seeing two different situations...something's wrong. In order to tidy up calculations, all distances among charges must appear different to the observers, which means the distance must be a relative quantity to the observer and the same must be for time. The

relativistic expression $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ will appear in the equation for the new λ and also another relativistic one

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ for the evaluation of involved times and both of them will cancel with the new expression $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ just

appeared. You can notice the most recent equation we used in all this reasoning is about 1856, when Albert Einstein wasn't yet born! What's the truth? Are space and time to become relative to balance the appearing of a magnetic force effect, or, on the contrary, the magnetic force, not existing as a new force in itself, does not exist, but it's rather a delta of electric force due to the fact that space and time are relative? The right understanding is the latter, even though, formally, or mathematically, it doesn't make any difference.

App.1-Par. 4.2: The Current Density four-vector.

We obviously have the following equations on charge density:

$$\rho_0 = \frac{dQ}{dt_0}, \quad \rho = \frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{\sqrt{1 - \beta^2} dt_0} = \gamma \rho_0$$

Moreover, notice that the following equation holds; it shows the invariance of the electric charge:

$$\rho_0 dt_0 = \rho d\tau.$$

Moreover, we know from physics that the current density is:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

So, we are led to define the current density 4-vector in the following way:

$\underline{j} = (\vec{j}, \rho c) = (\gamma \rho_0 \vec{v}, \gamma \rho_0 c)$; note the similarity with the energy-momentum 4-vector:

$\underline{p} = (\vec{p}, mc) = (\gamma m_0 \vec{v}, \gamma m_0 c)$. Then, we have:

$|\underline{j}|^2 = |\vec{j}|^2 - j_4^2 = -\rho_0^2 c^2$ and moreover, as we can apply the Lorentz Transformations to a 4-vector, as said at App.1-

Par. 1.5 – eq. (A1.12), we have:

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1' = j_1 - \beta j_4 \\ j_2' = j_2 \\ j_3' = j_3 \\ j_4' = -\beta j_1 + j_4 \end{array} \right. \quad \text{or also:} \quad \left\{ \begin{array}{l} j_x' = \gamma(j_x - \rho V) \\ j_y' = j_y \\ j_z' = j_z \\ \rho' = \gamma(\rho - \frac{V}{c^2} j_x) \end{array} \right. \quad (\text{A4.6})$$

where $\beta = V/c$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Now, in order to show by 4-vectors and in a more compact way what shown in App.1-Par. 4.2, we consider a wire flown by a stationary current I in a reference system k and let I be directed along x; if, in such a system, we put a charge q whose speed is v along x, we'll have a movement of q by the only field B, as E=0, because, on an average, we have in a conductor as many positive charges as the negative ones are. On the contrary, if we place ourselves in a k' reference system which is moving with speed V=v with respect to k, in k' q is at rest and theoretically the magnetic force should disappear; but this is unacceptable for the Principle of Relativity (see the Introduction). An electric field must so appear in k'; in fact:

$\underline{j} = \underline{j}_+ + \underline{j}_- \quad , \quad \underline{j}_+ = (\vec{j}_+, c\rho_+) = (0, nqc) \quad [n] = [\text{number of } q \text{ involved}/\text{m}^3] \text{ and}$

$\underline{j}_- = (\vec{j}_-, c\rho_-) = (-nqv, -nqc) \quad , \text{ the first term is negative as the direction of } v \text{ is opposite to the conventional one for } I \text{ (as, here } q < 0) \text{ and the second one is still negative, as well, still because here, } q < 0.$

For the Lorentz Transformations (A1.12) we so have (v=V):

$$\begin{aligned} j_{+x}' &= -\gamma nqV & j_{-x}' &= \gamma(-nqv + nqV) \\ \rho_+' &= \gamma nq & \rho_-' &= \gamma(-nq + nq \frac{vV}{c^2}) \end{aligned}$$

and as now $\rho_+' \neq -\rho_-'$, an electric field must appear.

App.1-Par. 4.3: The Electromagnetic Field Tensor.

Preamble on tensors:

A vector is a tensor of rank 1.

For us it's enough to say that we get a rank 2 tensor when we make the product of the components of two vectors c and b:

$$c(c_i) = (c_1, c_2, c_3, c_4) \quad , \quad b(b_k) = (b_1, b_2, b_3, b_4) \quad \rightarrow \quad A_{ik} = c_i b_k$$

Through (A1.16) and (A1.17) we have seen how to express the Lorentz Transformations:

$$c_i = \alpha_i^l c'_l \quad (i, m = 1, 2, 3, 4) \quad \text{and} \quad b_k = \alpha_k^m b'_m \quad (k, l = 1, 2, 3, 4) \quad \text{and so:}$$

$$A_{ik} = c_i b_k = \alpha_i^l \alpha_k^m c'_l b'_m = \boxed{\alpha_i^l \alpha_k^m A'_{lm}} = A_{ik} \quad (\text{A4.7})$$

which is the transformation law for a rank 2 tensor.

Then, we also notice that we get a rank 2 tensor also when we derive the components of a vector b with respect to the x coordinate:

$$b_i = \alpha_i^l b'_l \quad , \quad x'_m = \alpha_m^k x_k \quad \gg \gg \quad \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} \rightarrow \alpha_m^k$$

$\frac{\partial b_i}{\partial x_k} = \frac{\partial b_i}{\partial x'_m} \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_m} (\alpha'_i b'_l) \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} = \alpha'_i \alpha_m^k \frac{\partial b'_l}{\partial x'_m}$; therefore, such a derivative transforms as the components of a rank 2 tensor and so it's a rank 2 tensor, as well.

Preamble on electromagnetism:

We know from the electromagnetism that electric and magnetic fields (induction vector B) can be expressed as a function of electrodynamic potentials ϕ and A:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ and} \quad (\text{A4.8})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A4.9})$$

$$\text{and we also know the Lorenz Condition: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (\text{A4.10})$$

$$\text{and also the Continuity Equation: } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\text{A4.11})$$

Still from electromagnetism, we also know that:

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} = \square \phi \quad \text{and} \quad (\text{A4.12})$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} = \square \vec{A} \quad (\text{A4.13})$$

and we remind ourselves that we already defined the current density 4-vector j:

$$\underline{j} = (\vec{j}, c\rho) = (j_x, j_y, j_z, c\rho) \quad (j_i = v_i \rho).$$

Now, we feel led to define the Potential Four-vector or Four-Potential $\underline{\Phi}$:

$$\underline{\Phi} = (A_x, A_y, A_z, \frac{\phi}{c}); \text{ in fact, so doing, (A4.12) and (A4.13) can be so summarized:}$$

$$\square \Phi_k = -\mu j_k \quad \text{and if we also define the four-divergence } div_4 = \vec{\nabla}_4 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial(ct)} = (\vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial(ct)})$$

we easily get:

$$\vec{\nabla}_4 \underline{j} = 0 \text{ for the Continuity Equation (A4.11) and } \vec{\nabla}_4 \underline{\Phi} = 0 \text{ for the Lorenz Condition (A4.10).}$$

Now, from (A4.8) and (A4.9), we have:

$$B_x = B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \quad E_x = E_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = c(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4}) \text{ etc; therefore, E and B}$$

cannot be expressed through two 4-vectors, but through a rank 2 four-tensor, as we proved the derivative of a vector is a 2-tensor:

$$F_{ik} = c(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}); \text{ let's write the components of } F_{ik} \text{ as a matrix:}$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -E_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -E_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}, \text{ and through (A4.7) we have proved that } F_{ik} \text{ transforms in the following}$$

$$\text{way: } F_{ik} = \alpha_i^l \alpha_k^m F'_{lm}. \quad (\text{A4.14})$$

Notice that F_{ik} is antisymmetric, that is: $F_{ik} = -F_{ki}$.

Then, of course:

$$F'_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB'_z & -cB'_y & -E'_x \\ -cB'_z & 0 & cB'_x & -E'_y \\ cB'_y & -cB'_x & 0 & -E'_z \\ E'_x & E'_y & E'_z & 0 \end{pmatrix}$$

If now we remind ourselves that on the right side of (A4.14) the summation over l and m is understood, as they are repeated there, and if we develop such an equation, we get the transformation of the electromagnetic field:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E'_y + VB'_z) \\ E'_z = \gamma(E'_z - VB'_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z) \\ B'_z = \gamma(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y) \end{cases}$$

and also its inverse:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - VB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + VB_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{V}{c^2} E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{V}{c^2} E_y) \end{cases}$$

SUBAPPENDIXES:

Subapp. 1: Lorentz Transformations in succession.

$\mathbf{k} \gg V \gg \mathbf{k}' \gg W \gg \mathbf{k}''$

We have three reference systems k , k' and k'' and V and W are the relevant relative velocities.

Through the following terminology: $\beta_1 = \frac{V}{c}$, $\beta_2 = \frac{W}{c}$, $\gamma_1 = 1/\sqrt{1-\beta_1^2}$, $\gamma_2 = 1/\sqrt{1-\beta_2^2}$, $U = \frac{V+W}{1+\frac{VW}{c^2}}$

and $\beta = \frac{U}{c}$, we have, for the Lorentz Transformations applied in succession:

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1(x' + Vt') & \text{with} & & t &= \gamma_1(t' + \frac{\beta_1}{c} x') & \text{and} \\ x' &= \gamma_2(x'' + Wt'') & \text{with} & & t' &= \gamma_2(t'' + \frac{\beta_2}{c} x'') & \text{and, by substitution:} \\ x &= \gamma_1\gamma_2(x'' + Wt'' + Vt' + \beta_1\beta_2 x'') = \gamma_1\gamma_2[(1 + \beta_1\beta_2)x'' + (V + W)t''] = \\ &= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2)(x'' + \frac{V+W}{1 + \beta_1\beta_2} t'') = x \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\text{and similarly: } t = \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2)(t'' + \frac{1}{c^2} \frac{V+W}{(1 + \beta_1\beta_2)} x''); \quad (\text{A.1.2})$$

Now, we see that:

$$\gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) = 1/\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)/(1 + \beta_1\beta_2)^2} = 1/\sqrt{[1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2)]/(1 + \beta_1\beta_2)^2} =$$

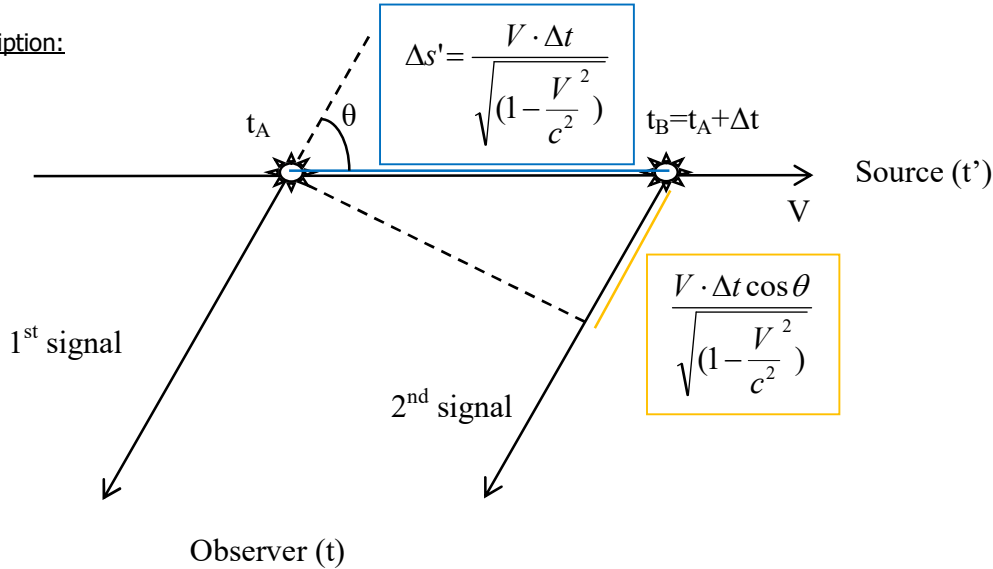
$= 1/\sqrt{1 - [(\beta_1 + \beta_2)/(1 + \beta_1\beta_2)]^2} = 1/\sqrt{1 - U^2/c^2} = \gamma$, and so (A.1.1) and (A.1.2) can be rewritten like that:

$$x = \gamma(x'' + Ut'') \quad \text{with} \quad t = \gamma(t'' + \frac{U}{c^2}x'') = \gamma(t'' + \frac{\beta}{c}x'') , \text{ so, instead of carrying out two Lorentz T.}$$

(γ_1, V and γ_2, W), you just make one, but using γ and U .

Subapp. 2: Transversal (relativistic) Doppler Effect.

Simple description:



Between the time t_A when a signal is emitted and the time t_B , a time Δt elapses, for the observer on the Earth. Now, for the moving source, the corresponding time is $\Delta t' = t'_B - t'_A$:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \text{ and a run distance, between A and B, which is: } \Delta s' = \frac{V \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \text{ The interval, for the observer,}$$

to receive the two signals emitted in A and B is $\Delta t' +$ (the time taken from the signal, whose velocity is c , to run the difference in the path) (in yellow), that is: $\frac{V \cdot \Delta t \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$; totally:

$$\Delta t_{obs} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V \cdot \Delta t \cos \theta}{c \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta \right) ; \text{ now, if } \Delta t \text{ is the time between two wave crests,}$$

then: $f = \frac{1}{\Delta t}$ and, consequently: $f_{obs} = \frac{1}{\Delta t_{obs}}$ and finally:

$$f_{obs} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta \right)} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{V_r}{c} \right)} , \text{ where } V_r \text{ is the radial velocity. If } \theta = 0, \text{ then } V = V_r \text{ and we fall into the}$$

Longitudinal Doppler Effect, already treated before:

$$f_{obs} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V_r^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{V_r}{c} \right)} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V_r}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{V_r}{c}}} = f \sqrt{\frac{1 - \frac{V_r}{c}}{1 + \frac{V_r}{c}}} . \text{ If, on the contrary, } \theta = \pi/2, \text{ then } \cos \theta = 0 \text{ and we have:}$$

$$f_{obs} = \frac{f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{(1 + \frac{V}{c} \cos \theta)} = f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad \text{that is the formula for the Transversal Doppler Effect, where the difference in}$$

frequency is given just by the time dilation and no longer by getting farther/closer effects.

Detailed description:

If we represent an electromagnetic wave propagating, through its electric field E:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}; \text{ such a field propagates along } \vec{r} \text{ and we know that } |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ and } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ so:}$$

$$|\vec{k}| \lambda = \omega T, \text{ that is: } |\vec{k}| = \omega \frac{T}{\lambda} = \boxed{\frac{\omega}{c} = |\vec{k}|}; \quad (\text{A.2.1})$$

$\underline{I} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ is evidently an invariant, but it can also be expressed as the product of two 4-vectors (invariants):
(position 4-vector and wave 4-vector) $\underline{I} = -\underline{r}(\vec{r}, ct) \cdot \underline{k}(\vec{k}, \omega/c)$.

We know, now, that for (A.2.1), $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ and let's take a light wave propagating in a system $k'(V)$ over the plane x', y'

and forming an angle θ' with x' ; the components of $\vec{k}'$ will be:

$$k'_1 = k' \cos \theta' = (\omega'/c) \cos \theta', \quad k'_2 = k' \sin \theta' = (\omega'/c) \sin \theta', \quad k'_3 = 0 \quad \text{and} \quad k'_4 = (\omega'/c) = k'.$$

For the Lorentz T., we have, on the contrary, in a system k:

$k_1 = \gamma(k'_1 + \beta k'_4)$, $k_2 = k'_2$, $k_3 = k'_3$ and $k_4 = \gamma(k'_4 + \beta k'_1)$; now, as also $k_3 = 0$, in the system k, too, the ray propagates on x,y; so, we have:

$\underline{k} = (\frac{\omega}{c} \cos \theta, \frac{\omega}{c} \sin \theta, 0, \frac{\omega}{c})$; now, we calculate ω and θ : on this purpose, from the transformation of k'_4 , we have:

$$\frac{\omega}{c} = \gamma \left(\frac{\omega'}{c} + \beta \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \right), \text{ or:}$$

$$\omega = \omega' \frac{(1 + \beta \cos \theta')}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega' \gamma (1 + \beta \cos \theta') \quad (\text{A.2.2})$$

while from the transformation of k'_1 , we have: $\frac{\omega}{c} \cos \theta = \gamma \left(\frac{\omega'}{c} \cos \theta' + \beta \frac{\omega'}{c} \right)$ and if we consider (A.2.2), we have:

$$\cos \theta = \frac{\omega'}{\omega} \gamma (\cos \theta' + \beta) = \frac{(\cos \theta' + \beta)}{(1 + \beta \cos \theta')} \quad (\text{A.2.3})$$

Then, we notice that the transformation of k'_2 and (A.2.2) yield:

$$\sin \theta = \frac{\omega'}{\omega} \sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{(1 + \beta \cos \theta')} \sin \theta' = \frac{\sin \theta'}{\gamma (1 + \beta \cos \theta')} \quad (\text{A.2.4})$$

and from (A.2.3) and (A.2.4) we also have: $\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}$, which is, then, (A.2.4) with θ' and θ swapped and with $(-\beta)$ in place of β ; all this, for the relativity of the movement.

Now, suppose a source ω' is at rest in a system $k'(\theta')$; then, from (A.2.3) we have:

$$\cos \theta' = \frac{(\cos \theta - \beta)}{(1 - \beta \cos \theta)} \quad (\text{useful to get } \theta \text{ immediately, from } \theta') \text{ (it's the (A.2.3) with } \theta' \text{ and } \theta \text{ swapped and with } (-\beta) \text{ in}$$

place of β), from which:

$$(1 + \beta \cos \theta') = \frac{(1 - \beta^2)}{1 - \beta \cos \theta} \quad \text{and (A.2.4) becomes:}$$

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta} \quad (\text{A.2.5})$$

Here ω' is the ω of the moving source and $\omega' \neq \omega$. Therefore, if in the system k you see the radiation under an angle $\theta = \pi$, this means that the radiation comes from right, from the system k' which is getting farther along the x axis, and so we can talk about a Longitudinal Doppler Effect (Par. 3.5) and, in this case, $\cos \theta = \cos \pi = -1$ and from (A.2.5)

$$\text{with the source getting farther } (\theta = \pi), \text{ we have: } \omega = \omega' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (\text{A.2.6})$$

>>> $T = T' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$, whilst, when the system k' getting closer ($\theta=0$ >>> $\cos \theta=1$), we have:

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (\text{A.2.7})$$

$$>>> T = T' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \text{ just like in App.1-Par. 3.5.}$$

Curio: by a series development on β ($\beta < 1$), (A.2.6) and (A.2.7) give: $\omega \cong \omega'(1-\beta)$ and $\omega \cong \omega'(1+\beta)$ so:

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega'} = \frac{\Delta \omega}{\omega'} = \mp \beta; \text{ this formula is very used in astrophysics and cosmology for the red shift (remember that } \omega = 2\pi\nu \text{ and } \lambda\nu = c).$$

In order to go from the case of the moving emitter to that of the moving observer and vice versa, you just swap β with $-\beta$ (V with $-V$) and ω' with ω . In any case, when there is an approaching (or a getting farther) situation, formulae for the Longitudinal Relativistic Doppler Effect are the same, no matter who is approaching.

If, on the contrary, system k sees the radiation coming under $\theta = \pi/2$, from the top, then we can talk about a TRANSVERSAL Relativistic Doppler Effect; in this case you don't have either a getting farther or an approaching situation, but the only Doppler kind effect is just due to the time dilation; in fact, also from (A.2.5), with $\theta = \pi/2$, we

have: $\omega = \omega' \sqrt{1-\beta^2}$. By developing, with $\beta < 1$, we have: $\omega \cong \omega'(1 - \frac{\beta^2}{2})$ (second degree in β , so, a lighter

effect, with respect to the longitudinal one). Such an effect was first observed by Ives in 1938 and this plainly proved the theory. Moreover, the diversity between θ' and θ also confirms the phenomenon of the light ABERRATION, according to which, if you are moving, you see light coming to you under a different angle, something like when you are driving a car in a rainy day and you see the rain falling askew on the windscreen. And from (A.2.3) and (A.2.4), we have:

$$\text{tg } \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1-\beta^2}}{(\cos \theta' + \beta)}.$$

Subapp. 3: The Transformations of the four-velocity.

We have defined the velocity 4-vector in App.1-Par. 2.2:

$$\underline{v} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau} \right) = \left(\gamma \frac{dx_1}{dt}, \gamma \frac{dx_2}{dt}, \gamma \frac{dx_3}{dt}, \gamma \frac{dx_4}{dt} \right) = (\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_y, \mathcal{V}_z, \mathcal{V}_c) = (\vec{\mathcal{V}}, \mathcal{V}_c) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

By applying the Lorentz T., we have: $u'_1 = \Gamma(u_1 - \beta u_4)$, $u'_2 = u_2$, $u'_3 = u_3$, $u'_4 = \Gamma(u_4 - \beta u_1)$;

now, you can see that Γ is defined by the V of the moving system $0'$ (and $\beta=V/c$), while γ is referred to the velocity v had by a particle in 0 , and γ' is to v' had by a particle in $0'$. Now, by replacing the u by the relevant values:

$$\gamma' v'_x = \Gamma(\mathcal{V}_x - \mathcal{V}_c), \quad \gamma' v'_y = \mathcal{V}_y, \quad \gamma' v'_z = \mathcal{V}_z, \quad \gamma' c = \Gamma(\mathcal{V}_c - \gamma \beta v_x);$$

$$\text{from the last one, we have: } \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{V}{c^2} v_x)}, \quad (\text{A.3.1})$$

and if you put it in the first three ones:

$$v'_x = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma(v_x - V), \quad v'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} v_y, \quad v'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} v_z, \text{ it yields the transformations of the velocities.}$$

For the case of the inverse transformations, in place of the (A.3.1), we'll have: $\frac{\gamma}{\gamma'} = \Gamma(1 + \frac{V}{c^2} v_x)$.

It follows from (A.3.1) that if the particle is at rest in 0 ($v=0 \Rightarrow \gamma = 1$), then $\gamma' = \Gamma$, from which $v' = -V$, that is, in 0' the particle has a velocity $-V$ (of course).

Subapp. 4: The transformations of the four-force.

At App.1-Par. 2.3 we have introduced the Minkowski Force, or 4-force: $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = (\mathcal{F}, \frac{\gamma}{c}(\vec{f} \cdot \vec{v})) = (F_1, F_2, F_3, F_4)$.

According to the Lorentz T.: $F'_1 = \Gamma(F_1 - \beta F_4)$, $F'_2 = F_2$, $F'_3 = F_3$, $F'_4 = \Gamma(F_4 - \beta F_1)$.

If now we introduce in such equations the components of the Minkowski Force, we have:

$$\gamma' f'_x = \Gamma(\mathcal{F}_x - \frac{\beta}{c} \gamma(\vec{f} \cdot \vec{v})), \quad \gamma' f'_y = \mathcal{F}_y, \quad \gamma' f'_z = \mathcal{F}_z, \quad \gamma'(\vec{f}' \cdot \vec{v}') = \Gamma(\gamma(\vec{f} \cdot \vec{v}) - V \mathcal{F}_x), \text{ from which:}$$

$$f'_x = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma(f_x - \frac{\beta}{c}(\vec{f} \cdot \vec{v})), \quad f'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} f_y, \quad f'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} f_z, \quad (\vec{f}' \cdot \vec{v}') = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma((\vec{f} \cdot \vec{v}) - V f_x), \text{ which, for (A.3.1),}$$

becomes:

$$f'_x = \frac{(f_x - \frac{\beta}{c}(\vec{f} \cdot \vec{v}))}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad f'_y = \frac{f_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad f'_z = \frac{f_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad (\vec{f}' \cdot \vec{v}') = \frac{(\vec{f} \cdot \vec{v}) - V f_x}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

which are the transformation equations of the 4-force.

Subapp. 5: The acceleration four-vector and the transformations of the acceleration.

Of course, the 4-vector acceleration can be defined as follows:

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{x}}{d\tau^2} = (\frac{d^2 x_1}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_2}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_3}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_4}{d\tau^2}) = \frac{dv}{d\tau} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

For the first three (space) components, we have: ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$a_\alpha = \frac{d}{dt}(\gamma v_\alpha) \frac{dt}{d\tau} = \gamma v_\alpha \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2 \frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{\dot{v}_\alpha}{1 - \beta^2} + \frac{v_\alpha (v\dot{v})}{c^2 (1 - \beta^2)^2}, \text{ as:}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}) = \gamma^3 \beta \dot{\beta} = \frac{\gamma^3 v \dot{v}}{c^2}. \text{ About } a_4:$$

$$a_4 = \frac{d}{dt}(\gamma c) \frac{dt}{d\tau} = c \gamma \frac{d\gamma}{dt} = \frac{c}{2} \frac{d\gamma^2}{dt} = c \gamma^4 \beta \dot{\beta} = \frac{(v\dot{v})}{c(1 - \beta^2)^2} \text{ and so:}$$

$$\underline{a} = (\gamma \frac{d}{dt}(\gamma v), \frac{c}{2} \frac{d\gamma^2}{dt}) = (\gamma^2 \dot{v} + \gamma^4 \beta \dot{\beta} v, \frac{(v\dot{v})}{(1 - \beta^2)^2}); \text{ notice that in the system where the particle is at rest, (} v=0,$$

$\beta=0$) we have: $a_1^{(0)} = \dot{v}_x$, $a_2^{(0)} = \dot{v}_y$, $a_3^{(0)} = \dot{v}_z$, $a_4^{(0)} = 0$, that is, the space part of $\underline{a}$ is equal to the common

three-dimensional one. Moreover: $|\underline{a}|^2 = \dot{v}^2 > 0$ and, as $|\underline{a}|^2$ is an invariant, the inequality is always true and so $\underline{a}$ is space-type.

In order to get the transformation equations for the acceleration, know that:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \text{ and } \dot{v}' = \frac{dv'}{dt'}; \text{ moreover, } v_x = v_x(t) \text{ and } v'_x = v'_x(t') \text{ (consistently). Then, let's name:}$$

$\beta_x = \frac{v_x}{c}$ and $\beta'_x = \frac{v'_x}{c}$; so, we get from (A1.18) that:

$$\frac{dv_x}{dv'_x} = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta\beta'_x)^2}, \quad \frac{dv_y}{dv'_y} = \frac{1 - \beta(\beta'_y \frac{dv'_x}{dv'_y} - \beta'_x)}{\gamma(1 + \beta\beta'_x)^2} \quad \text{and} \quad \frac{dv_z}{dv'_z} = \frac{1 - \beta(\beta'_z \frac{dv'_x}{dv'_z} - \beta'_x)}{\gamma(1 + \beta\beta'_x)^2}.$$

Then, from them, we have:

$$dv_x = \frac{dv'_x}{\gamma^2(1 + \beta\beta'_x)^2}, \quad dv_y = \frac{dv'_y - \beta(\beta'_y dv'_x - \beta'_x dv'_y)}{\gamma(1 + \beta\beta'_x)^2} \quad \text{and} \quad dv_z = \frac{dv'_z - \beta(\beta'_z dv'_x - \beta'_x dv'_z)}{\gamma(1 + \beta\beta'_x)^2};$$

if now we divide these equations by the following well known equation (of the Lorentz T.) $dt = \gamma(dt' + \frac{\beta}{c}dx')$, we

have:

$$a_x = \frac{1}{\gamma^3(1 + \beta\beta'_x)^3}a'_x, \quad a_y = \frac{a'_y + \beta(\beta'_x a'_y - \beta'_y a'_x)}{\gamma^2(1 + \beta\beta'_x)^3} \quad \text{and} \quad a_z = \frac{a'_z + \beta(\beta'_x a'_z - \beta'_z a'_x)}{\gamma^2(1 + \beta\beta'_x)^3}$$

which are the equations for the transformation of the accelerations, indeed.

At last, we notice those equations have got the velocity inside; therefore, if the three-dimension acceleration is constant, in an inertial reference system, it will change with time in all others!
