Nine Dots Puzzle extended to n_1Xn_2X…Xn_k points under house arrest

Marco Ripà (July 2013)

sPIqr Society, Roma, Italia
Email: marcokrt1984@yahoo.it

Abstract (En). Here is the second and last part of the generalized solution to the extended "Nine Dots Puzzle". In this paper I provide a non-trivial Lower Bound for the k-dimensional n_1 X n_2 X … X n_k points problem. In this way, you can build a range in which certainly will fall all the best possible solutions to the problem we are considering. In conclusion, I provide a few characteristic numerical examples in order to appreciate the quality of the result arising from the particular approach I have chosen.

Keywords: dots, straight line, inside the box, plane, upper bound, lower bound, graph theory, segment, points.

MSC2010: Primary 91A43; Secondary 05E30, 91A46.

Abstract (It). Ecco la seconda ed ultima parte della soluzione generalizzata al *problema dei nove punti*, il cosiddetto "Nine Dots Puzzle". Nel presente articolo andrò a definire un *Lower Bound* non banale per la versione k-dimensionale del problema degli n_1 X n_2 X … X n_k punti. In tal modo sarà possibile costruire un intervallo nel quale ricadono con assoluta certezza tutte le migliori soluzioni possibili al problema considerato. In conclusione, fornirò alcuni specifici esempi numerici al fine di far apprezzare la bontà dei risultati derivanti dal particolare approccio scelto.

Chiavi di ricerca: punti, linea, segmenti, inside the box, piano, limite superiore, limite inferiore, teoria dei grafi.

MSC2010: Primaria 91A43; Secondaria 05E30, 91A46.

1. Introduzione

Il presente articolo non è altro che la continuazione del precedente [http://vixra.org/pdf/1307.0021v2.pdf]: mi propongo dunque di definire un *Lower Bound* (piuttosto solido e non banale) per il problema degli n_1 X n_2 X … X n_k punti com'è stato presentato nell'appendice 5 del paper summenzionato.
Il Lower Bound in questione scaturirà da considerazioni generali e pressoché ovvie e, assieme all'*Upper Bound* già definito nell'altro paper, fornirà un intervallo nel quale si collocheranno tutte le migliori soluzioni possibili al problema (al variare di n_i e k nei naturali positivi).

2. Il problema degli n_1Xn_2X…Xn_k punti agli arresti domiciliari

Consideriamo innanzitutto la struttura della nostra griglia per k=3 ($n_1 \leq n_2 \leq n_3$): non è possibile intersecare più di $(n_3-1)+(n_2-1)=n_3+n_2-2$ punti con due linee consecutive; c'è però un'unica eccezione (che per comodità possiamo assumere come il caso delle prime due linee tracciate). In tale circostanza, è possibile intersecare n_3 punti con la linea iniziale ed n_2-1 con la successiva, proprio come avviene nel caso della soluzione della spirale rettangolare che ho proposto.
Osserviamo adesso che, giacendo (per definizione) ogni segmento su un piano, sarà necessario prevedere n_1-1 linee di collegamento tra i vari piani che vengono affrontati in successione (di qualsiasi tipo): non c'è modo di evitare di spendere meno di n_1-1 linee per collegare (al più) n_1-1 punti alla volta (sotto il vincolo definito in precedenza di connettere n_3+n_2-1 punti con i primi due segmenti rettilinei). Ciascuna di queste linee potrebbe interporsi tra altrettanti segmenti rettilinei capaci di connettere n_k-1 punti alla volta.

Ragionando nello stesso modo, vediamo che il risultato di cui sopra, nel caso a k dimensioni ($k \geq 3$), non muta nella sostanza.

Sia h_l il numero di segmenti rettilinei del nostro Lower Bound, per $k \geq 3$, risulta che

$$\prod_{i=1}^{k} n_i :\leq n_k + \sum_{j=1}^{k-2}(n_j-1)^2 + (n_k-1)\cdot\sum_{j=1}^{k-2}(n_j-1) + \left[h_l - 2\cdot\sum_{j=1}^{k-2}(n_j-1) - 1\right]\cdot\left\lfloor\frac{n_k+n_{k-1}}{2}-1\right\rfloor \qquad (\mathbf{1})$$

Svolgendo i calcoli, si perviene al seguente risultato:

$$\begin{cases} h_l \geq \left\lceil \dfrac{2}{n_k+n_{k-1}-2}\cdot\left[\prod_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{k-2} {n_j}^2 + (3-n_k)\cdot\sum_{j=1}^{k-2} n_j - n_k - k + 2 + (n_k+n_{k-1}-2)\cdot\sum_{j=1}^{k-2}(n_j-1)\right]\right\rceil + 1 \\ \qquad \boldsymbol{se} \quad \dfrac{n_k+n_{k-1}}{2} \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \\ h_l \geq \left\lceil \dfrac{2}{n_k+n_{k-1}-1}\cdot\left[\prod_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{k-2} {n_j}^2 + (3-n_k)\cdot\sum_{j=1}^{k-2} n_j - n_k - k + 2 + (n_k+n_{k-1}-1)\cdot\sum_{j=1}^{k-2}(n_j-1)\right]\right\rceil + 1 \\ \qquad \boldsymbol{se} \quad \dfrac{n_k+n_{k-1}+1}{2} \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \end{cases}$$

Ciò in virtù del fatto che, $\forall\, n_k, n_{k-1}$, $\left\lfloor\frac{n_k+n_{k-1}}{2}-1\right\rfloor \leq \left\lfloor\frac{n_k+n_{k-1}-1}{2}\right\rfloor$.

Quindi

$$h_l \geq \begin{cases} \left\lceil \dfrac{2}{n_k + n_{k-1} - 2} \cdot \left[\prod_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{k-2} {n_j}^2 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-2} n_j - n_k + n_{k-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-2} n_j - k + 2 \right) \right] \right\rceil + 1 \\ \qquad \boldsymbol{se} \quad \dfrac{n_k + n_{k-1}}{2} \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\} \\ \left\lceil \dfrac{2}{n_k + n_{k-1} - 1} \cdot \left[\prod_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{k-2} {n_j}^2 + \sum_{j=1}^{k-2} n_j - n_k + n_{k-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-2} n_j - k + 2 \right) - k + 2 \right] \right\rceil + 1 \\ \qquad \boldsymbol{se} \quad \dfrac{n_k + n_{k-1} + 1}{2} \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\} \end{cases} \qquad (\mathbf{2})$$

Si noti ora come sia possibile migliorare il risultato della **(2)** considerando che le linee di collegamento tra i vari piani non possano effettivamente intersecare n_i−1 punti ciascuna: per coprire tutti i piani della/e dimensione/i contraddistinta/e da meno punti allineati (i valori di n_i con pedice più basso) è possibile infatti intersecare n_i−1 punti con la prima linea, n_i−2 punti con la seconda, n_i−3 punti con la successiva, ecc…

Pertanto, con riferimento al caso tridimensionale, queste n_1−1 linee intersecheranno $\sum_{j=1}^{n_1-1}(n_1 - j) = \frac{n_1 \cdot (n_1 - 1)}{2}$ nuovi punti. Come già osservato, si può supporre che, al più, ognuna di essa si precederà e seguirà altrettanti segmenti rettilinei che intersecheranno n_k−1 punti. Dunque

$$\prod_{i=1}^{k} n_i :\leq n_k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} n_j \cdot (n_j - 1) + (n_k - 1) \cdot \sum_{j=1}^{k-2} (n_j - 1) + \left[h_l - 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-2} (n_j - 1) - 1 \right] \cdot \left\lfloor \frac{n_k + n_{k-1}}{2} - 1 \right\rfloor \qquad (\mathbf{3})$$

Perciò

$$h_l \geq \begin{cases} \left\lceil \dfrac{2}{n_k + n_{k-1} - 2} \cdot \left[\prod_{i=1}^{k} n_i - \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} {n_j}^2 + \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} n_j - n_k + n_{k-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-2} n_j - k + 2 \right) + k - 2 \right] \right\rceil + 1 \\ \qquad \boldsymbol{se} \quad \dfrac{n_k + n_{k-1}}{2} \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\} \\ \left\lceil \dfrac{2}{n_k + n_{k-1} - 1} \cdot \left[\prod_{i=1}^{k} n_i - \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} {n_j}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} n_j - n_k + n_{k-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-2} n_j - k + 2 \right) \right] \right\rceil + 1 \\ \qquad \boldsymbol{se} \quad \dfrac{n_k + n_{k-1} + 1}{2} \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\} \end{cases} \qquad (\mathbf{4})$$

In particolare (dalla **(4)**), se k=3, risulta

$$h_l \geq \begin{cases} \left\lceil \dfrac{2 \cdot n_3 \cdot n_2 \cdot n_1 - {n_1}^2 - n_1 - 2 \cdot n_3 + 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 2 \cdot n_2 + 2}{n_3 + n_2 - 2} \right\rceil + 1 \\ \qquad \boldsymbol{se} \quad \dfrac{n_3 + n_2}{2} \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\} \\ \left\lceil \dfrac{2 \cdot n_3 \cdot n_2 \cdot n_1 - {n_1}^2 + n_1 - 2 \cdot n_3 + 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 2 \cdot n_2}{n_3 + n_2 - 1} \right\rceil + 1 \\ \qquad \boldsymbol{se} \quad \dfrac{n_3 + n_2 + 1}{2} \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\} \end{cases} \qquad (\mathbf{5})$$

3. Conclusione

Per k=3, unendo la **(5)** con la **(10)-(14)** del precedente paper, otteniamo l'intervallo nel quale la soluzione esatta del problema andrà certamente a collocarsi.

Quanto ampio sia tale intervallo (e dunque quanto buono il presente risultato possa essere considerato) dipende anche dai particolari valori assunti da n_1, n_2 ed n_3 .

N.B.

Dalla **(5)** discende automaticamente che, $\forall\ n_i \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$,

$$h_l \geq \left\lceil \frac{2 \cdot n_3 \cdot n_2 \cdot n_1 - {n_1}^2 + n_1 - 2 \cdot n_3 + 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 2 \cdot n_2}{n_3 + n_2 - 1} \right\rceil + 1$$

Esempio 1: $n_1 = 10, n_2 = 13, n_3 = 15.$

$$155 \leq h \leq 253$$

Esempio 2: $n_1 = 10, n_2 = 21, n_3 = 174.$

$$378 \leq h \leq 419$$

Se k>3, l'intervallo è il seguente:

$$(\mathbf{4}) \leq h \leq\ (t+1) \cdot\ \prod_{j=1}^{k-3} n_j - 1$$

Dove t, il miglior limite superiore per il problema n_{k-2} X n_{k-1} X n_k, è il risultato esplicitato dalla **(10)-(14)** del precedente paper.

In questo caso, l'ampiezza dell'intervallo dipende anche dal particolare valore di k (più grande è, meno il *range* risulta stretto).

N.B.

Dalla **(4)** discende ovviamente che, $\forall\ n_i \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$,

$$h_l \geq \left\lceil \frac{2}{n_k + n_{k-1} - 1} \cdot \left[\prod_{i=1}^{k} n_i - \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} {n_j}^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} n_j - n_k + n_{k-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-2} n_j - k + 2 \right) \right] \right\rceil + 1$$

Esempio 3: $k = 4$; $n_1 = 10$, $n_2 = 16$, $n_3 = 18$, $n_4 = 48$ (dunque t = 575).

$$4328 \leq h \leq 5759$$

Se dovessi scommettere, fissando k:=3, punterei su qualsiasi quota superiore a $1+10^{-80}$ (10^{80} sono all'incirca gli atomi presenti nell'universo visibile) che "h_{best}", il numero di segmenti rettilinei associato alla miglior soluzione possibile, sia notevolmente più vicino all'Upper Bound che ho definito di quanto non possa esserlo rispetto alla sua controparte (matematicamente, scommetterei sul fatto che, per la stragrande maggioranza delle possibili combinazioni $[n_1, n_2, n_3]$, $\frac{h_u - h_{best}}{h_{best} - h_l} < 1$).

È interessante notare come, per alcuni particolari combinazioni, i due limiti coincidano, permettendoci così di ottenere una risoluzione assoluta e definitiva del problema considerato.

Ad esempio, per $k = 3$; $n_1 = n_2 = 3$, $n_3 = 61$, risulta che $h_l = h_u = h_{best} = 17$. *Idem* se $k = 3$; $n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 57$; infatti, $h_l = h_u = h_{best} = 23$.

Bibliografia

Ripà, M. & Remirez, P., *Il Nine Dots Puzzle esteso a nXnX…Xn punti*. viXra. 04-07-2013. http://vixra.org/pdf/1307.0021v2.pdf