Teoría hermítica de campo unificado de Einstein-Straus

Hermitian unified field theory of Einstein-Straus

DOI: 10.13140/RG.2.1.2834.6725

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. En el año 1945 Einstein inició una nueva investigación en la teoría de campo unificado, a la que llamamos teoría hermítica. Se supone un tensor métrico y una conexión cuyas componentes son números complejos y tienen la propiedad hermítica. En esencia es una teoría métrico-afín asimétrica. En tres investigaciones, una de ellas realizada conjuntamente con Straus, Einstein formuló las ecuaciones de la teoría hermítica de campo unificado. En este trabajo analizamos estas investigaciones, detallando y actualizando todos los cálculos.

Abstract. In 1945, Einstein began a new investigation into the unified field theory, which we call the Hermitian theory. A metric tensor and a connection whose components are complex numbers and have the Hermitian property. In essence it is an asymmetric metric-affine theory. In three studies, one conducted jointly with Straus, Einstein formulated the equations of Hermitian unified field theory. We analyzed this research, detailing and updating all calculations.

Contenido

La versión *v1* del artículo «La teoría hermítica de campo unificado de Einstein-Straus» fue publicada el día 2 de agosto de 2015

Teoría hermítica de campo unificado de Einstein-Straus

Hermitian unified field theory of Einstein-Straus

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

1.- Introducción

En el año 1923 Einstein desarrolla su primera teoría de campo unificado [16], que entiende debe ser una generalización de la teoría general de la relatividad. Era una teoría puramente afín, entendida como aquella en que los únicos potenciales de campo son las componentes de la conexión, mientras que el tensor métrico es una magnitud derivada. En el año 1925 Einstein plantea su primera teoría de campo unificado métrico-afín, cuyos potenciales son el tensor métrico y la conexión ambos asimétricos [1] [15], que llegará a ser, con posteriores aportaciones, la teoría final de Einstein [6] [8].

La teoría que a continuación analizamos es también una teoría métrico-afín asimétrica, pero planteada con números complejos y con la propiedad hermítica, que es requerida a las magnitudes que intervienen en la densidad lagrangiana (tensor métrico, conexión y tensor de Ricci). Se han desarrollado diversas enfoques de esta teoría, de aquí los varios nombres que ha recibido relacionado con Einstein, Straus, Schrödinger y Kaufman.

Fueron tres los trabajos de Einstein en la teoría que llamamos hermítica de campo unificado de Einstein-Straus. En el primero de ellos del año 1945 [3] desarrolla la matemática de la teoría, que se caracteriza por una nueva definición de la derivación covariante, obteniendo las ecuaciones de campo mediante un principio variacional pero añadiéndole *a priori* la condición de nulidad del vector de torsión, de donde resultaron problemas de incompatibilidad. Al año siguiente, conjuntamente con Straus, Einstein [4] plantea una nueva densidad lagrangiana obteniendo unas ecuacionnes de campo matemáticamente correctas, que ni en primera aproximación logra identificar con la teoría electromagnética maxweliana, aunque sí reproduce la Relatividad General.

Finalmente en el año 1948 Einstein vuelve a la teoría hermítica [5] y plantea la densidad lagrangiana de otra forma, consiguiendo que «el principio variacional usado no tenga condiciones añadidas», obteniendo, desde un punto de vista formal, una teoría más elegante pero con los mismos resultados que en el trabajo de Einstein-Straus.

Analizamos a continuación los tres trabajos citados de Einstein, detallando los cálculos que están ausentes en las investigaciones originales y haciendo una valoración crítica de algunos de sus resultados.

2.- Métrica y conexión

En la teoría de campo unificado que llamamos hermítica o de Einstein-Straus, el tensor métrico g_{ik} tiene componentes complejas y posee la propiedad hermítica *, es decir

$$g_{ik} = \overline{g}_{ki}$$

donde $\overline{g}_{ik}$ significa el complejo conjugado de g_{ik}. Si se descompone el tensor métrico como

$$g_{ik} = s_{ik} + i a_{ik}$$

encontramos que dada la propiedad de hermiticidad, la parte real s_{ik} es simétrica $s_{ik} = s_{ki}$ y la parte imaginaria a_{ik} es antisimétrica $a_{ik} = -a_{ki}$.

Si $g = \det(g_{ik})$ entonces $\overline{g} = \det\left(\overline{g_{ik}}\right)$ ya que el complejo conjugado de un producto es el producto de los

* Para la matemática implicada en las teorías de campo unificado véase Segura González, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campos*, eWT, 2015, descarga desde http://vixra.org/abs/1504.0085.

DOI: 10.13140/RG.2.1.2834.6725

complejos conjugados; por la propiedad de hermiticidad y dado que el determinante de una matriz es igual a la de su traspuesta se tiene

$$\overline{g} = \det\left(\overline{g_{ik}}\right) = \det\left(g_{ki}\right) = \det\left(g_{ik}\right) = g$$

lo que significa que g es un número real.

Vamos a exigir que g sea negativo, lo que significa que la signatura es lorentziana, es decir $(+---)$ o bien $(-+++)$. Esto es así porque los signos de la parte espacial tienen que ser los mismos y por tanto que g sea negativo significa que el signo de la parte temporal debe ser opuesto al de la parte espacial.

El signo del determinante g será el mismo independientemente del sistema de coordenadas elegido. En efecto, supongamos una transformación de un sistema de coordenadas K a otro K', caracterizado por la matriz $A = (A_k^i)$, entonces la ley de transformación del tensor métrico es

$$g'_{ik} = A_i^m A_k^n g_{mn}$$

o en forma matricial

$$G' = AGA^T$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A. Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes y que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta, nos queda

$$g' = \left[\det\left(A\right)\right]^2 g$$

como la matriz A es real, entonces los signos de g y g' coinciden.

Definimos las componentes contravariantes del tensor métrico por la relación

$$g_{ik} g^{rk} = \delta_i^r \tag{1}$$

que representa un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones como incógnitas (g^{rk}) y que tiene solución única puesto que el determinante de los coeficientes (g_{ik}) es distinto de cero. De (1) obtenemos

$$g^{it} g_{ik} g^{rk} = \delta_i^r g^{it} = g^{rt} \quad \Rightarrow \quad g^{it} g_{ik} = \delta_k^t .$$

Naturalmente g^{ik} es un tensor por serlo g_{ik} y δ_k^i y ser (1) una expresión válida en cualquier sistema de coordenadas, en efecto de $g'_{ik} g'^{rk} = \delta_i^r$ se deriva

$$A_i^m A_k^n g_{mn} g'^{rk} = \delta_i^r \quad \Rightarrow \quad A_k^n g_{mn} g'^{rk} = \delta_i^r B_m^i = B_m^r \quad \Rightarrow \quad g^{mt} A_k^n g_{mn} g'^{rk} = g^{mt} B_m^r$$

siendo A_k^i la matriz de la transformación de coordenadas de K [donde es válida (1)] a K' y B_k^i la matriz inversa; de lo anterior se sigue

$$A_k^n \delta_n^t g'^{rk} = g^{mt} B_m^r \quad \Rightarrow \quad g'^{rk} = B_m^r B_t^k g^{mt}$$

como queríamos demostrar.

Finalmente indiquemos que tensor g^{ik} también es hermítico: $\overline{g^{ik}} = g^{ki}$.

La conexión del espacio en la teoría de Einstein-Straus también tiene la propiedad de hermiticidad, es decir

$$\overline{\Gamma_{ik}{}^r} = \Gamma_{ki}{}^r .$$

Por esta propiedad se deriva que las componentes del tensor de torsión $\tau_{ik}{}^r$ son imaginarios puros, puesto que

$$\tau_{ik}{}^r = \Gamma_{ik}{}^r - \Gamma_{ki}{}^r = \Gamma_{ik}{}^r - \overline{\Gamma_{ik}{}^r},$$

e igual propiedad tendrá el vector de torsión

$$\tau_i = \tau_{ik}{}^k = \Gamma_{ik}{}^k - \Gamma_{ki}{}^k .$$

3.- La derivada covariante

En geometría de Riemann existe un tensor métrico y una conexión de componentes reales y simétricas, además la derivada covariante del tensor métrico es nula

$$D_r g_{ik} = \partial_r g_{ik} - g_{sk} \Gamma_{ir}{}^s - g_{is} \Gamma_{kr}{}^s = 0.$$

La expresión anterior corresponde a 40 ecuaciones independientes, dada la simetría del tensor métrico. Además, de la condición de simetría de la conexión (que son 24 ecuaciones) se obtienen en total 64 ecuaciones, tantas como componentes de la conexión, esto significa que de (2) podemos establecer una relación entre la conexión (2) y el tensor métrico y sus primeras derivadas.

En la geometría de la teoría de Einstein-Straus nos encontramos con una conexión no simétrica, lo que significa que podemos dar dos definiciones de derivada covariante de un vector (la + y la $-$)

$$D_i A^{\underset{+}{k}} = \partial_i A^k + A^s \Gamma_{si}^{\ \ k}; \qquad D_i A^{\underset{-}{k}} = \partial_i A^k + A^s \Gamma_{is}^{\ \ k}$$
$$D_i A_{\underset{+}{k}} = \partial_i A_k - A_s \Gamma_{ki}^{\ \ s}; \qquad D_i A_{\underset{-}{k}} = \partial_i A_k - A_s \Gamma_{ik}^{\ \ s},$$

las dos igualmente aceptables. El problema surge si se utilizan las dos simultáneamente, entonces nos encontramos con varias posibilidades de derivadas de un tensor. En la teoría de Einstein-Straus, de entre las seis posibilidades de la derivada covariante de un tensor de segundo orden se elije la siguiente

$$D_r A_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = \partial_r A_{ik} - A_{sk} \Gamma_{ir}^{\ \ s} - A_{is} \Gamma_{rk}^{\ \ s}.$$

Siguiendo los métodos habituales es fácil calcular otras derivadas covariantes, por ejemplo para un tensor de segundo orden contravariante tenemos

$$D_r A^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = \partial_r A^{ik} + A^{sk} \Gamma_{sr}^{\ \ i} + A^{is} \Gamma_{rs}^{\ \ k}.$$

4.- Derivada covariante de densidades tensoriales

Una densidad tensorial es el producto de un tensor (o un escalar o un vector) mulplicado por la raíz cuadrada del determinante de un tensor de segundo orden covariante. Un caso especial es cuando el determinante es el del tensor métrico, entonces dado, por ejemplo, un tensor A^k su densidad tensorial es

$$\boldsymbol{A}^k = \sqrt{g} A^k$$

donde se sobreentiende que consideramos el módulo de g para evitar un valor imaginario al hacer la raíz cuadrada.

Por la definición de determinante se encuentra que

$$\delta g = g g^{pq} \delta g_{pq}$$

entonces si la variación δ es la derivada covariante se tiene

$$D_r g = g g^{ik} D_r g_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \tag{3}$$

notemos que lo anterior es una definición, pues se podría haber tomado otra de las derivadas covariantes que se pueden construir. Con (3) es posible calcular las derivadas covariantes de las densidades tensoriales. Por ejemplo, la derivada covariante de una densidad vectorial es

$$D_r \boldsymbol{A}^{\underset{+}{k}} = D_r \left(\sqrt{g} A^{\underset{+}{k}} \right) = D_r \sqrt{g} A^k + \sqrt{g} D_r A^{\underset{+}{k}},$$

por (3) tenemos

$$D_r \boldsymbol{A}^{\underset{+}{k}} = \partial_r \boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^s \Gamma_{sr}^{\ \ k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{A}^k g^{pq} D_r g_{\underset{+}{p}\underset{-}{q}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{A}^k g^{pq} \partial_r g_{pq}$$

y por la definición de la derivada covariante del tensor métrico queda

$$D_r \boldsymbol{A}^{\underset{+}{k}} = \partial_r \boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^s \Gamma_{sr}^{\ \ k} - \frac{1}{2} \boldsymbol{A}^k \left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} + \Gamma_{rs}^{\ \ s} \right).$$

El resultado se puede extender a una densidad tensorial cualquiera, por ejemplo para el caso de la densidad de un tensor de segundo orden covariante se tiene

$$D_r \boldsymbol{A}_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = \partial_r \boldsymbol{A}_{ik} - \boldsymbol{A}_{sk} \Gamma_{ir}^{\ \ s} - \boldsymbol{A}_{is} \Gamma_{rk}^{\ \ s} - \frac{1}{2} \boldsymbol{A}_{ik} \left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} + \Gamma_{rs}^{\ \ s} \right).$$

Y para una densidad escalar

$$D_r \boldsymbol{A} = \partial_r \boldsymbol{A} - \frac{1}{2} \boldsymbol{A} \left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} + \Gamma_{rs}^{\ \ s} \right).$$

Finalmente, pongamos la expresión de la derivada covariante de la densidad del tensor métrico en forma contravariante

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = \partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk} \Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is} \Gamma_{rs}^{\ \ k} - \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{ik} \left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} + \Gamma_{rs}^{\ \ s} \right).$$

5.- El tensor de curvatura

El tensor de curvatura $R^k_{\ sir}$ de Riemann se obtiene por alguno de los procedimientos habituales. Encontramos dos de estos tensores, según la derivada que se utilice: la + o la $-$. Si utilizamos la primera de las derivadas

DOI: 10.13140/RG.2.1.2834.6725

encontramos (con un signo opuesto al utilizado por Einstein)

$$R^{k}{}_{sir}=\Gamma_{sr,i}^{k}-\Gamma_{si,r}^{k}+\Gamma_{sr}^{n}\Gamma_{ni}^{k}-\Gamma_{si}^{n}\Gamma_{nr}^{k}$$

pero si usamos la derivada $-$ entonces obtenemos como tensor de curvatura el complejo conjugado del anterior, por tanto es suficiente tomar uno de ellos (nosotro elegimos el primero) como el tensor de curvatura de la teoría.

El tensor de curvatura tiene dos contracciones, una de ellas da el tensor de Ricci y la otra la curvatura homotética. El tensor de Ricci es

$$R_{ik}^{*}=R^{r}{}_{ikr}=\Gamma_{ir,k}^{r}-\Gamma_{ik,r}^{r}+\Gamma_{ir}^{t}\Gamma_{tk}^{r}-\Gamma_{ik}^{t}\Gamma_{tr}^{r},$$

este tensor no es hermítico. En efecto, si a R_{ik}^{*} intercambiamos los índices *i, k* y luego calculamos el complejo conjugado no volvemos a encontrar R_{ik}^{*}. Buscamos un tensor hermítico derivado del tensor de Ricci, porque esta es una propiedad que requerimos para que la densidad lagrangiana sea real. La posibilidad que planteó Einstein es hallar el valor medio del tensor de Ricci con el traspuesto de su complejo conjugado, lo que garantiza que el tensor hallado sea hermítico

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\left(R_{ik}^{*}+\overline{R}_{ki}^{*}\right)=-\Gamma_{ik,r}^{r}+\Gamma_{ir}^{t}\Gamma_{tk}^{r}+\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ir,k}^{r}+\Gamma_{rk,i}^{r}\right)-\frac{1}{2}\Gamma_{ik}^{t}\left(\Gamma_{tr}^{r}+\Gamma_{rt}^{r}\right).$$

6.- El tensor de no-metricidad

La idea de Einstein es la de generalizar la teoría general de la Relatividad para llegar a una teoría unitaria. En este sentido extiende un resultado válido en el espacio de Riemann de la Relatividad General: la nulidad del tensor de no-metricidad $Q_{ikr}=D_{r}g_{ik}=0$, que en nuestro caso es

$$Q_{\underset{+-}{ik}r}=D_{r}g_{\underset{+-}{ik}}=\partial_{r}g_{ik}-g_{sk}\Gamma_{ir}^{s}-g_{is}\Gamma_{rk}^{s}=0, \tag{4}$$

que corresponde a una ecuación auxiliar que nos permite obtener la conexión en función del tensor métrico y sus primeras derivadas. Multiplicando (4) por $-g^{it}g^{mk}$ se encuentra que

$$D_{r}g^{\overset{ik}{+-}}=0.$$

De (3) y (4) encontramos que la derivada covariante del determinante del tensor métrico es nula.

7.- La primera densidad lagrangiana

Anteriormente hemos dado la matemática en que se basa la teoría que estamos examinando. El paso siguiente es buscar una densidad lagrangiana de la que se deriven las ecuaciones de campo a partir de un principio de mínima acción. Tres fueron las densidades lagrangianas planteadas por Einstein en el marco de su teoria.

En la primera de ellas buscó una densidad lagrangiana de la que debía derivarse la ecuación (4). Por (3) sabemos que $D_{i}\ln\sqrt{g}$ es un tensor, en efecto

$$D_{i}\ln\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g}}D_{i}\sqrt{g}=\frac{1}{2g}D_{i}g=\frac{1}{2}g^{pq}D_{i}g_{\underset{+-}{pq}},$$

como el último miembro es un tensor de segundo orden contravariante multiplicado por un tensor de tercer orden covariante, el resultado es un tensor covariante que llamamos S_{r}. Por la definición de la derivada covariante del tensor métrico se tiene

$$S_{i}=D_{i}\ln\sqrt{g}=\frac{1}{2}g^{pq}\partial_{i}g_{pq}-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{si}^{s}+\Gamma_{is}^{s}\right)$$

y como

$$\delta g=gg^{pq}\delta g_{pq}\qquad\Rightarrow\qquad\partial_{i}g=gg^{pq}\partial_{i}g_{pq}$$

entonces

$$S_{i}=\partial_{i}\ln\sqrt{g}-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{si}^{s}+\Gamma_{is}^{s}\right).$$

Su derivada covariante que llamaremos S_{ik}^{*} es

$$S_{ik}^{*}=D_{k}S_{\underset{+}{i}}=\partial_{k}\partial_{i}\ln\sqrt{g}-\frac{1}{2}\partial_{k}\left(\Gamma_{si}^{s}+\Gamma_{is}^{s}\right)-\partial_{s}\ln\sqrt{g}\,\Gamma_{ik}^{s}+\frac{1}{2}\Gamma_{ik}^{r}\left(\Gamma_{sr}^{s}+\Gamma_{rs}^{s}\right).$$

El tensor S_{ik}^{*} no es hermítico a consecuencia del segundo sumando. Entonces tenemos que hallar un nuevo tensor S_{ik} resultado del valor medio del tensor S_{ik}^{*} y del traspuesto de su complejo conjugado

$$S_{ik}=\frac{1}{2}\left(S^*_{ik}+\overline{S}^*_{ki}\right)=\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\partial_s\ln\sqrt{g}\Gamma_{ik}{}^s+\frac{1}{2}\Gamma_{ik}{}^r\left(\Gamma_{sr}{}^s+\Gamma_{rs}{}^s\right)-\frac{1}{4}\left(\Gamma_{si,k}^{\ \ s}+\Gamma_{is,k}^{\ \ s}+\Gamma_{ks,i}^{\ \ s}+\Gamma_{sk,i}^{\ \ s}\right),$$

que tiene la propiedad de ser un tensor hermítico.

Einstein buscó una densidad lagrangiana de la que se pudiera derivar (4). Para conseguir este objetivo definió el tensor

$$\hat{R}_{ik}=R_{ik}+S_{ik}=-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}{}^t\Gamma_{tk}{}^r+\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\partial_s\ln\sqrt{g}\Gamma_{ik}{}^s+\frac{1}{4}\left(\Gamma_{is,k}^{\ \ s}+\Gamma_{sk,i}^{\ \ s}-\Gamma_{si,k}^{\ \ s}-\Gamma_{ks,i}^{\ \ s}\right). \qquad (5)$$

La expresión (5) es diferente de la obtenida por Einstein, quien utiliza S^*_{ik} y no su expresión hermítica S_{ik} y además comete un error de cálculo. S_{ik} es el tensor que hay que usar para que la densidad lagrangiana sea una función real. La diferencia entre (5) y la correspondiente expresión de Einstein radica en el último sumando de (5). Nótese que todos los sumandos de (5) son hermíticos; el último además es antisimétrico.

La densidad lagrangiana se define por

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{g}^{ik}\hat{R}_{ik}, \qquad (6)$$

que depende de la conexión y su primera derivada, además del tensor métrico, de su primera y de su segunda derivada. Como tanto $\boldsymbol{g}^{ik}$ como $\hat{R}_{ik}$ son hermíticos, entonces

$$\overline{\boldsymbol{L}}=\overline{\boldsymbol{g}}^{ik}\overline{\hat{R}}_{ik}=\boldsymbol{g}^{ki}\hat{R}_{ki}=\boldsymbol{g}^{ik}\hat{R}_{ik}=\boldsymbol{L}$$

lo que significa que la densidad lagrangiana es una función real.

8.- Primeras ecuaciones de campo

En el año 1945 Einstein planteó su primera teoría hermítica de campo unificado, obteniendo las ecuaciones de campo por un método mixto, como luego veremos. El procedimiento no es correcto, como el mismo Einstein reconoció al año siguiente en el trabajo que publicó en colaboración con Straus. Exponemos a continuación la primera deducción de Einstein, que aunque no son correctas las ecuaciones finales, sus cálculos nos serán útiles posteriormente.

Las ecuaciones de campo se obtienen a partir de un principio variacional. La acción del campo es

$$I=\int\boldsymbol{L}\,d\Omega$$

donde $d\Omega$ es el producto de las diferenciales de las coordenadas. Si se varían arbitrariamente las componentes de la conexión y del tensor métrico, con la condición de que estas variaciones así como la variación de la primera derivada del tensor métrico se anulen en los límites del volumen de integración, entonces la variación de la acción es nula.

Debemos advertir de una condición que se no encuentra expresamente en el trabajo original de Einstein. La densidad lagrangiana (6) depende de las derivadas segundas del tensor métrico, lo que en general no ocurre en las teorías métrico-afín, por tanto es necesario poner como exigencia en el principio variacional que las variaciones de las primeras derivadas del tensor métrico se anulen en la superficie de integración.

La aplicación del principio variacional a la densidad lagrangiana (6) no reproduce (4) como pretendía Einstein, para ello necesitamos establecer previamente la condición

$$\tau_i=\Gamma_{is}{}^s-\Gamma_{si}{}^s=0 \qquad (7)$$

o sea, que el vector de torsión τ_i sea nulo. Con la condición (7), la expresión (5) coincide con la original de Einstein, es decir

$$\hat{R}_{ik}=R_{ik}+S_{ik}=-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}{}^t\Gamma_{tk}{}^r+\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\partial_s\ln\sqrt{g}\Gamma_{ik}{}^s,$$

el mismo autor impone también la condición (7) pero una vez obtenidas las ecuaciones de campo.

El principio de mínima acción es por tanto

$$\delta I=\delta\int\boldsymbol{g}^{ik}\hat{R}_{ik}d\Omega=\delta\int\boldsymbol{g}^{ik}\left(-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}{}^t\Gamma_{tk}{}^r+\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\partial_s\ln\sqrt{g}\Gamma_{ik}{}^s\right)d\Omega, \qquad (8)$$

estamos en una teoría métrico-afín, es decir que variamos tanto la conexión como el tensor métrico, obteniendo por tanto, dos conjuntos de ecuaciones, el primero es la ecuación auxiliar, o sea, la que nos relaciona la conexión con el tensor métrico y sus derivadas, mientras que el segundo conjunto son las ecuaciones de campo.

Al variar la conexión obtenemos

$$\delta I_1=\int\left[-\boldsymbol{g}^{ik}\left(\delta\Gamma_{ik}{}^r\right)_{,r}+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ir}{}^t\delta\Gamma_{tk}{}^r+\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}{}^t\Gamma_{tk}{}^r-\boldsymbol{g}^{ik}\partial_s\ln\sqrt{g}\,\delta\Gamma_{ik}{}^s\right]d\Omega=0$$

DOI: 10.13140/RG.2.1.2834.6725

al aplicar el teorema de Gauss

$$\int_V \partial_r\left(\sqrt{g}A^k\right)d\Omega=\int_\Sigma A^k dS_k$$

siendo dS_k el vector de superficie bidimensional el término

$$\int \partial_r\left(\sqrt{g}g^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^r\right)d\Omega=\int g^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^r dS_r$$

se anula, puesto que la variación de la conexión se anula en la superficie de integración y encontramos

$$\delta I_1=\int\left(\partial_r\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^r+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ir}{}^t\delta\Gamma_{tk}{}^r+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{tk}{}^r\delta\Gamma_{ir}{}^t-\boldsymbol{g}^{ik}\partial_s\ln\sqrt{g}\,\delta\Gamma_{ik}{}^s\right)d\Omega=$$
$$=\int\left(\partial_r\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}{}^i+\boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}{}^k-\boldsymbol{g}^{ik}\partial_r\ln\sqrt{g}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^r d\Omega=0$$

como la variación de la conexión es arbitraria obtenemos las ecuaciones

$$\partial_r\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}{}^i+\boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}{}^k-\boldsymbol{g}^{ik}\partial_r\ln\sqrt{g}=0 \tag{9}$$

o bien

$$\sqrt{g}\partial_r g^{ik}+g^{ik}\partial_r\sqrt{g}+\sqrt{g}g^{sk}\Gamma_{sr}{}^i+\sqrt{g}g^{is}\Gamma_{rs}{}^k-\sqrt{g}g^{ik}\partial_r\ln\sqrt{g}=0$$

de donde se deduce

$$\partial_r g^{ik}+g^{sk}\Gamma_{sr}{}^i+g^{is}\Gamma_{rs}{}^k=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad D_r g^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}=0. \tag{10}$$

El segundo grupo de ecuaciones de campo se obtiene haciendo la variación (8) respecto al tensor métrico

$$\delta I_2=\int\left(\hat{R}_{ik}\delta\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{ik}\delta\hat{R}_{ik}\right)d\Omega=\int\left[\hat{R}_{ik}\delta\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{ik}\partial_k\partial_i\left(\delta\ln\sqrt{g}\right)-\boldsymbol{g}^{ik}\partial_s\left(\delta\ln\sqrt{g}\right)\Gamma_{ik}{}^s\right]d\Omega=0, \tag{11}$$

volvemos a usar el teorema de Gauss; así el último de los sumandos del último miembro es

$$-\int\boldsymbol{g}^{ik}\partial_s\left(\delta\ln\sqrt{g}\right)\Gamma_{ik}{}^s d\Omega=-\int\partial_s\left(\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}{}^s\delta\ln\sqrt{g}\right)d\Omega+\int\partial_s\left(\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}{}^s\right)\delta\ln\sqrt{g}\,d\Omega=$$
$$=-\int g^{ik}\Gamma_{ik}{}^s\delta\ln\sqrt{g}\,dS_s+\int\partial_s\left(\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}{}^s\right)\delta\ln\sqrt{g}\,d\Omega=\int\partial_s\left(\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}{}^s\right)\delta\ln\sqrt{g}\,d\Omega,$$

donde la integral de superficie se anula porque en ella son nulas las variaciones del tensor métrico, por tanto también es nula la variación de su determinante. El segundo sumando del último término de (11) es

$$\int\boldsymbol{g}^{ik}\partial_k\partial_i\left(\delta\ln\sqrt{g}\right)d\Omega=\int\partial_k\left[\boldsymbol{g}^{ik}\partial_i\left(\delta\ln\sqrt{g}\right)\right]d\Omega-\int\partial_k\boldsymbol{g}^{ik}\partial_i\left(\delta\ln\sqrt{g}\right)d\Omega=$$
$$=\int g^{ik}\partial_i\left(\delta\ln\sqrt{g}\right)dS_k-\int\partial_i\left(\partial_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\ln\sqrt{g}\right)d\Omega+\int\partial_i\partial_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\ln\sqrt{g}\,d\Omega=$$
$$=\int g^{ik}\delta\left(\partial_i\ln\sqrt{g}\right)dS_k-\int\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\ln\sqrt{g}dS_i+\int\partial_i\partial_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\ln\sqrt{g}\,d\Omega,$$

tanto las variaciones del tensor métrico como las variaciones de sus primeras derivadas son nulas en los límites de integración, de tal forma que las dos integrales de superficie anteriores se anulan, por tanto tendremos

$$\delta I_2=\int\left(\hat{R}_{ik}\delta\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{ik}\delta\hat{R}_{ik}\right)d\Omega=\int\left\{\hat{R}_{ik}\delta\boldsymbol{g}^{ik}+\left[\partial_i\partial_k\boldsymbol{g}^{ik}+\partial_s\left(\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}{}^s\right)\right]\delta\ln\sqrt{g}\right\}d\Omega=0. \tag{12}$$

Hay que poner la variación del determinante del tensor métrico en función de la variación de la densidad del tensor métrico

$$\delta\ln\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g}}\delta\sqrt{g}=-\frac{1}{2}g_{pq}\delta g^{pq}=-\frac{1}{2\sqrt{g}}g_{pq}\delta\boldsymbol{g}^{pq}+\frac{1}{2\sqrt{g}}g_{pq}g^{pq}\delta\sqrt{g}=$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{g}}g_{pq}\delta\boldsymbol{g}^{pq}+2\delta\ln\sqrt{g}$$

por tanto

$$\delta\ln\sqrt{g}=\frac{1}{2\sqrt{g}}g_{pq}\delta\boldsymbol{g}^{pq},$$

volviendo a (12) y teniendo en cuenta que la variación del tensor métrico es arbitraria, nos queda

$$\hat{R}_{ik}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\partial_m\partial_n\boldsymbol{g}^{mn}+\partial_s\left(\boldsymbol{g}^{mn}\Gamma_{mn}{}^s\right)\right]g_{ik}=0 \tag{13}$$

que con (10) forman los dos conjuntos de ecuaciones de campo. (13) admite una simplificación. De la ecuación (9) se tiene poniendo $k=r$

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{ir} + \boldsymbol{g}^{sr}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ r} - \boldsymbol{g}^{ir}\partial_r \ln\sqrt{g} = 0 \tag{14}$$

ahora bien como

$$\partial_r \ln\sqrt{g} = \frac{1}{2} g^{pq}\partial_r g^{pq}$$

y al tener en cuenta (10) hallamos

$$\partial_r \ln\sqrt{g} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{rs}^{\ \ s} + \Gamma_{sr}^{\ \ s}\right)$$

que al sustituir en (14) queda

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{ir} + \boldsymbol{g}^{sr}\Gamma_{sr}^{\ \ i} = 0,$$

que nos sirve para simplificar (13) que nos queda

$$\hat{R}_{ik} = 0.$$

Como $S_i = 0$ por ser nula la derivada covariante del determinante del tensor métrico, entonces $\hat{R}_{ik}$ coincide con el tensor de Ricci hermítico R_{ik}. Resumiendo, las ecuaciones de campo de la primera teoría hermítica de campo unificado de Einstein son

$$\begin{aligned} D_r g^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} &= 0 \\ \tau_i &= 0 \\ R_{ik} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

que se les denomina sistema de ecuaciones fuertes (no deducibles de un principio variacional) y que distinguimos de las ecuaciones débiles que deduciremos más adelante. Primeramente notamos que hemos usado un método mixto, por una parte hemos impuesto la condición de nulidad del vector de torsión, que es uno de los tres grupos de ecuaciones de campo, y por otra parte hemos aplicado el principio de mínima acción para hallar los otros dos grupos de ecuaciones de campo. Este procedimiento no garantiza la compatibilidad de las ecuaciones *.

Al igual que ocurre en Relatividad General las ecuaciones (15) no pueden determinar unívocamente una solución para g_{ik} y $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$. En efecto, si g_{ik} fuera una solución de (15), también g'_{ik}, derivada de la anterior por una transformación de coordenades $x'^k = x'^k(x^i)$, debe ser solución de (15). Esto quiere decir que existen cuatro ecuaciones complementarias a (15), que en Relatividad General son las identidades de Bianchi. Como la ambigüedad de la solución es por las cuatro ecuaciones de transformación de las coordenadas $x'^k = x'^k(x^i)$ entonces debe de existir igual número de ecuaciones complementarias.

Puede elegirse una gauge determinada, es decir un determinado sistema de coordenadas y entonces quedará eliminada la ambigüedad. En Relatividad General es habitual utilizar el sistema de coordendas armónico, con lo cual se obtiene una definida solución para el tensor métrico, que además simplifica considerablemente las ecuaciones de campo. Podría pensarse que la segunda de las ecuaciones (15) define una gauge, pero es una ecuación covariante y no representa una condición coordenada, es decir no singulariza un sistema de coordenadas. Las condiciones coordenadas deben ser no covariantes, es decir válidas sólo en algunos sistemas de coordenadas, pero no en todos.

9.- La densidad lagrangiana y las ecuaciones de campo de Einstein-Straus

Advertido del error en la deducción de las ecuaciones (15), Einstein y Straus plantearon de nuevo la teoría, pero ahora aplicando exclusivamente el principio variacional, lo que garantiza que las ecuaciones que se obtienen son compatibles entre ellas.

La densidad lagrangiana de Einstein-Straus es

---

* El formalismo métrico para hallar las ecuaciones de la Relatividad General sigue este proceso mixto. Es decir, *a priori* se da una de las ecuaciones de campo $D_r g_{ik} = 0$, que nos permite obtener la relación entre la conexión y el tensor métrico; y luego se aplica el principio variacional para obtener el otro grupo de ecuaciones de campo $R_{ik} = 0$. Pero en este caso no hay incompatibiliad entre los dos grupos de ecuaciones, puesto que la conexión no aparece en la ecuación $R_{ik} = 0$ que depenen exclusivamente del tensor métrico.

Einstein dedicó varias investigaciones al problema de la compatibilidad de las ecuaciones de campo, en particular concluyó que el sistema de ecuaciones fuertes (15) «no es aceptable desde el punto de vista físico», Einstein, A.; Kaufman, B.: «Sur l'état actuel de la théorie générale de la gravitation», en *Louis de Broglie. Physicien et penseur*, Albin Michel, 1953, pp. 321-342.

DOI: 10.13140/RG.2.1.2834.6725

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik} + \mathfrak{h}^{i}\tau_{i} + b_{i}\mathfrak{g}^{[ik]}{}_{,k} \tag{16}$$

donde $\mathfrak{h}^{i}$ y b_i son multiplicadores de Lagrange, R_{ik} es el tensor de Ricci hermítico y τ_i es el vector de torsión definido por

$$\tau_i = \Gamma_{is}{}^{s} - \Gamma_{si}{}^{s}.$$

Nótese que $\mathfrak{g}^{[ik]}{}_{,k}$ es una densidad vectorial, en efecto de (4) se deduce

$$D_k\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}} - D_k\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ki}} = 2\partial_k\mathfrak{g}^{[ik]} - \mathfrak{g}^{(ik)}\tau_k, \tag{17}$$

como todos los sumandos son densidades vectoriales, entonces $\mathfrak{g}^{[ik]}{}_{,k}$ también tiene que ser una densidad vectorial. Este resultado garantiza que (16) es suma de densidades escalares y por tanto una densidad escalar, siempre y cuando $\mathfrak{h}^{i}$ sea una densidad vectorial y b_i un vector covariante.

Ahora aplicamos el principio variacional. Variamos respecto a $\mathfrak{h}^{i}$, b_i, $\Gamma_{ik}{}^{r}$ y $\mathfrak{g}^{ik}$. Al variar respecto a $\mathfrak{h}^{i}$ se halla

$$\tau_i = 0, \tag{18}$$

y al variar respecto a b_i se encuentra

$$\mathfrak{g}^{[ik]}{}_{,k} = 0. \tag{19}$$

Para hacer la variación respecto a $\Gamma_{ik}{}^{r}$ tenemos que usar la identidad de Palatini que por cálculo directo se comprueba que es

$$\delta R_{ik} = -D_r\left(\delta\Gamma_{\underset{+-}{ik}}{}^{\overset{r}{0}}\right) + \frac{1}{2}D_k\left(\delta\Gamma_{\underset{++}{ir}}{}^{r}\right) + \frac{1}{2}D_i\left(\delta\Gamma_{\underset{+-}{rk}}{}^{r}\right), \tag{20}$$

donde la derivada covariante del primer sumando es definida por

$$D_r\left(\delta\Gamma_{\underset{+-}{ik}}{}^{\overset{r}{0}}\right) = \partial_r\left(\delta\Gamma_{ik}{}^{r}\right) - \delta\Gamma_{sk}{}^{r}\Gamma_{ir}{}^{s} - \delta\Gamma_{is}{}^{r}\Gamma_{rk}{}^{s} + \delta\Gamma_{ik}{}^{s}\frac{1}{2}\left(\Gamma_{sr}{}^{r} + \Gamma_{rs}{}^{r}\right).$$

Para adaptar el teorema de Gauss a las derivadas covariantes que aparecen en (20) tenemos que comprobar previamente que se cumple

$$D_r\left(\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{+-}{ik}}{}^{\overset{r}{0}}\right) = \mathfrak{g}^{ik}D_r\left(\delta\Gamma_{\underset{+-}{ik}}{}^{\overset{r}{0}}\right) + \delta\Gamma_{ik}{}^{r}D_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}, \tag{21}$$

si definimos para simplificar la densidad vectorial

$$\mathfrak{H}^{\overset{r}{0}} = \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{+-}{ik}}{}^{\overset{r}{0}}$$

entonces teniendo en cuenta que

$$D_r H^{\overset{r}{0}} = \partial_r H^{r} + H^{s}\frac{1}{2}\left(\Gamma_{sr}{}^{r} + \Gamma_{rs}{}^{r}\right); \qquad D_r\sqrt{g} = \partial_r\sqrt{g} - \frac{1}{2}\sqrt{g}\left(\Gamma_{sr}{}^{r} + \Gamma_{rs}{}^{r}\right)$$

encontramos

$$D_r\mathfrak{H}^{\overset{r}{0}} = \partial_r\mathfrak{H}^{r} = \partial_r\left(\mathfrak{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{r}\right) \tag{22}$$

que es igual al resultado que se encuentra cuando se desarrolla el segundo miembro de (21), lo que significa que podemos, en este caso, aplicar la regla de Leibnitz de la derivación, la que será usada a la hora de aplicar el teorema integral de Gauss como veremos más adelante.

Ahora tenemos que comprobar si es aplicable la relación

$$D_k\left(\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{++}{ir}}{}^{r}\right) = \mathfrak{g}^{ik}D_k\left(\delta\Gamma_{\underset{++}{ir}}{}^{r}\right) + \delta\Gamma_{ir}{}^{r}D_k\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}, \tag{23}$$

procedemos igual que antes; definimos la densidad vectorial

$$\mathfrak{H}^{\underset{-}{k}} = \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{++}{ir}}{}^{r},$$

y encontramos que

$$D_k\mathfrak{H}^{\underset{-}{k}} = \partial_k\mathfrak{H}^{k} - \mathfrak{H}^{k}\tau_k \tag{24}$$

donde definimos $\tau_k = (\Gamma_{ks}{}^{s} - \Gamma_{sk}{}^{s})/2$ e igual resultado que en (24) se encuentra cuando se desarrolla la expresión (23), con lo que de nuevo demostramos que también para la segunda de las derivadas covariantes que aparece en (20) es de aplicación la regla de derivación de Leibnitz.

Utilizando el mismo razonamiento se encuentra que para el tercero de los sumandos de (20) se cumple

$$D_i\left(\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{+-}{rk}}^{\ r}\right)=\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}D_i\left(\delta\Gamma_{\underset{+-}{rk}}^{\ r}\right)+\delta\Gamma_{\underset{+-}{rk}}^{\ r}D_i\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}},$$

siempre y cuando definamos

$$\boldsymbol{H}^{\underset{+}{i}}=\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{+-}{rk}}^{\ r}$$

entonces hallamos

$$D_i\boldsymbol{H}^{\underset{+}{i}}=\partial_i\boldsymbol{H}^i+\boldsymbol{H}^i\tau_i. \tag{25}$$

Con los resultados (22), (24) y (25) el teorema de Gauss queda en cada caso

$$\int D_r\left(\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{+-}{ik}}^{\ \overset{r}{0}}\right)d\Omega=\int\partial_r\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ r}\right)d\Omega=\int g^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ r}dS_r$$

$$\int D_k\left(\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{++}{ir}}^{\ r}\right)d\Omega=\int\partial_k\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ r}\right)d\Omega-\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ r}\tau_k\,d\Omega=\int g^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ r}dS_k-\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ r}\tau_k\,d\Omega$$

$$\int D_i\left(\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{\underset{+-}{rk}}^{\ r}\right)d\Omega=\int\partial_i\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{rk}^{\ r}\right)d\Omega+\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{rk}^{\ r}\tau_i\,d\Omega=\int g^{ik}\delta\Gamma_{rk}^{\ r}dS_i+\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{rk}^{\ r}\tau_i\,d\Omega.$$

Ya estamos en condiciones de aplicar el principio de mínima acción a la densidad lagrangiana (16) para la variación de las componentes de la conexión

$$\delta I=\int\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}+\boldsymbol{h}^i\delta\tau_i\right)d\Omega=\int\left[\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^i\left(\delta\Gamma_{is}^{\ s}-\delta\Gamma_{si}^{\ s}\right)\right]d\Omega=0, \tag{26}$$

el primer sumando del último miembro es

$$\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}d\Omega=-\int\boldsymbol{g}^{ik}D_r\left(\delta\Gamma_{\underset{+-}{ik}}^{\ \overset{r}{0}}\right)d\Omega+\frac{1}{2}\int\boldsymbol{g}^{ik}D_k\left(\delta\Gamma_{\underset{++}{ir}}^{\ r}\right)d\Omega+\frac{1}{2}\int\boldsymbol{g}^{ik}D_i\left(\delta\Gamma_{\underset{+-}{rk}}^{\ r}\right)d\Omega$$

que al integrar por partes, aplicar el teorema de Gauss y tener en cuenta que en la superficie de integración la variación de la conexión es nula, obtenemos

$$\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}d\Omega=\int D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{ik}^{\ r}d\Omega-\frac{1}{2}\int D_k\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{ir}^{\ r}d\Omega-$$
$$-\frac{1}{2}\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ r}\tau_k\,d\Omega-\frac{1}{2}\int D_i\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}\delta\Gamma_{rk}^{\ r}d\Omega+\frac{1}{2}\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{rk}^{\ r}\tau_i\,d\Omega$$

agrupando todas las integrales anteriores

$$\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}d\Omega=\int\left(D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-\frac{1}{2}D_s\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}}\delta_r^k-\frac{1}{2}D_s\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{sk}}\delta_r^i-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{is}\delta_k^r\tau_s+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{sk}\delta_r^i\tau_s\right)\delta\Gamma_{ik}^{\ r}d\Omega.$$

Al añadir la segunda integral del último término de (26) encontramos

$$\delta I=\int\left(D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-\frac{1}{2}D_s\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}}\delta_r^k-\frac{1}{2}D_s\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{sk}}\delta_r^i-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{is}\delta_k^r\tau_s+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{sk}\delta_r^i\tau_s+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^i\delta_r^k-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^k\delta_r^i\right)\delta\Gamma_{ik}^{\ r}d\Omega,$$

y como la variación de la conexión es arbitraria, entonces para que la anterior integral sea nula debe de cumplirse

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-\frac{1}{2}D_s\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}}\delta_r^k-\frac{1}{2}D_s\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{sk}}\delta_r^i-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{is}\delta_k^r\tau_s+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{sk}\delta_r^i\tau_s+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^i\delta_r^k-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^k\delta_r^i=0 \tag{27}$$

que es el segundo grupo de ecuaciones de campo.

(27) se puede simplificar. Como ya se encontró, el vector de torsión es nulo, entonces (27) queda

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-\frac{1}{2}D_s\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}}\delta_r^k-\frac{1}{2}D_s\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{sk}}\delta_r^i+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^i\delta_r^k-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^k\delta_r^i=0, \tag{28}$$

al contraer la anterior ecuacion primero respecto a *r* y *k* y después respecto a *i* y *r* se encuentra

$$\begin{aligned}D_r\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}+\frac{1}{2}D_r\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}-\frac{3}{2}\boldsymbol{h}^i&=0\\D_r\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}+\frac{1}{2}D_r\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}+\frac{3}{2}\boldsymbol{h}^i&=0,\end{aligned} \tag{29}$$

y su suma es

$$D_r\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}+D_r\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}=0$$

DOI: 10.13140/RG.2.1.2834.6725

pero de (17), (18) y (19) se tiene que

$$D_r \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ir}} - D_r \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ri}} = 0$$

por tanto debe de cumplirse

$$D_r \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ir}} = 0$$

entonces de cualquiera de las ecuaciones (29) se deduce que $\mathfrak{h}^i = 0$ y llevando este resultado a (28)

$$D_r \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \tag{30}$$

que es el grupo de ecuaciones de campo resultante de la variación de la acción respecto a la conexión afín.

Finalmente vamos a variar la acción de la densidad lagrangiana (16) respecto a $\mathfrak{g}^{ik}$

$$\delta I = \int \left[R_{ik}\, \delta \mathfrak{g}^{ik} + b_i \frac{1}{2}\left(\delta \mathfrak{g}^{ik}{}_{,k} - \delta \mathfrak{g}^{ki}{}_{,k} \right) \right] d\Omega$$

integando por partes y aplicando el teorema de Gauss tenemos

$$\delta I = \int \left[R_{ik} + \frac{1}{2} b_{i,k} - \frac{1}{2} b_{k,i} \right] \delta \mathfrak{g}^{ik} d\Omega$$

y como la variación del tensor métrico es arbitraria, se encuentra para el cuarto grupo de ecuaciones de campo

$$R_{ik} + \frac{1}{2}\left(b_{i,k} - b_{k,i} \right) = 0$$

reuniendo encontramos que los cuatro grupos de ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}^{[ik]}{}_{,k} = 0 \\ &\tau_i = 0, \\ &D_r \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &R_{ik} + \frac{1}{2}\left(b_{i,k} - b_{k,i} \right) = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

por (17) vemos que la primera ecuación se deriva de la segunda y de la tercera. Entonces tendríamos 84 ecuaciones ($4 + 64 + 16$) y 84 variables ($\mathfrak{g}^{ik}$, $\Gamma_{ik}{}^{r}$ y b_i). Recordemos que al igual que en Relatividad General el anterior sistema de ecuaciones no puede determinar unívocamente la solución de los campos, lo que significa que además de (31) deben existir cuatro ecuaciones complementarias. Podemos eliminar las b_i de la tercera ecuación descomponiéndola en parte simétrica y antisimétrica, entonces las ecuaciones de campo quedan

$$\begin{aligned} &\tau_i = 0, \\ &D_r \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &R_{(ik)} = 0 \\ &R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

al que se le llama conjunto débil de las ecuaciones de campo; el último grupo de ecuaciones de (32) en realidad son sólo cuatro ecuaciones independientes, por lo tanto ahora tenemos un total de 82 ecuaciones y 80 variables (el tensor métrico y la conexión).

Las ecuaciones (32) son diferentes y más restrictivas que las (15) que obtuvo Einstein en su primera teoría hermítica de campo unificado. La primera ecuación (32), que ahora surge del principio variacional, tiene como consecuencia que la última de las ecuaciones de (32) sea más débil que la ecuación $R_{[ik]} = 0$ correspondiente al conjunto (15). También debemos señalar que la última ecuación (32) eleva en uno el grado de diferenciación, esto surge a consecuencia del último sumando de la densidad lagrangiana (16), que se introduce para conseguir la segunda ecuación de (32) al aplicar el principio variacional.

10.- Teoría linealizada

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General y las ecuaciones de Maxwell (en cierta medida) se pueden deducir de (32) en una primera aproximación. Supongamos

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik}$$

donde los γ_{ik} son pequeños y por tanto podemos despreciar sus cuadrados y η_{ik} es el tensor métrico de Minkowski de la Relatividad Especial, es decir la métrica del espacio-tiempo en ausencia de campos. Con esta suposición las dos primeras ecuaciones (32) quedan

$$\begin{gathered}\Gamma_{ir}{}^{r}-\Gamma_{ri}{}^{r}=0\\ \gamma_{ik,r}-\eta_{sk}\Gamma_{ir}{}^{s}-\eta_{is}\Gamma_{rk}{}^{s}=0,\end{gathered}\tag{33}$$

de la segunda de las ecuaciones anteriores se puede despejar la conexión, resultando

$$\Gamma_{ik}{}^{s}=\frac{1}{2}\eta^{sr}\left(\gamma_{ir,k}+\gamma_{rk,i}-\gamma_{ki,r}\right)$$

como se puede comprobar por cálculo directo. Con este último resultado la primera de las ecuaciones (33) queda

$$\frac{1}{2}\eta^{sr}\left(\gamma_{ir,s}+\gamma_{rs,i}-\gamma_{si,r}\right)-\frac{1}{2}\eta^{sr}\left(\gamma_{sr,i}+\gamma_{ri,s}-\gamma_{is,r}\right)=\eta^{sr}\left(\gamma_{[ir],s}+\gamma_{[is],r}\right)=0$$

donde se ha tenido en cuenta el carácter simétrico del tensor de Minkowski. De nuevo usando esta propiedad se encuentra

$$\eta^{sr}\gamma_{[ir],s}=0\quad\Leftrightarrow\quad\gamma_{[ir]}{}^{,r}=0.\tag{34}$$

En la aproximación considerada el tensor de Ricci hermítico es

$$R_{ik}=-\Gamma_{ik,r}^{\ r}+\frac{1}{2}\Gamma_{ir,k}^{\ r}+\frac{1}{2}\Gamma_{rk,i}^{\ r}$$

y puesto en función de γ_{ik}

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\eta^{rs}\left[-\gamma_{(is),k,r}-\gamma_{(sk),r,i}+\gamma_{sr,i,k}+\gamma_{ki,s,r}\right],$$

su parte simétrica es

$$R_{(ik)}=\frac{1}{2}\eta^{rs}\left[-\gamma_{(is),kr}-\gamma_{(sk),ri}+\gamma_{(sr),ik}+\gamma_{(ki),sr}\right]\tag{35}$$

y la parte antisimétrica

$$R_{[ik]}=\frac{1}{2}\eta^{rs}\gamma_{[ik],rs}.\tag{36}$$

Por tanto la tercera y cuarta ecuación de (32) en el caso considerado de teoría linealizada

$$\begin{gathered}\eta^{rs}\left[-\gamma_{(is),k,r}-\gamma_{(sk),r,i}+\gamma_{(sr),i,k}+\gamma_{(ki),s,r}\right]=0\\ \eta^{rs}\left\{\gamma_{[ik],p}+\gamma_{[kp],i}+\gamma_{[pi],k}\right\}_{,rs}=0.\end{gathered}\tag{37}$$

Entonces las ecuaciones de campo gravitatorio son

$$R_{(ik)}=0$$

idénticas a las ecuaciones de la gravitación de la Relatividad General en el vacío en la misma aproximación, si se supone que el campo gravitatorio viene expresado por $\gamma_{(ik)}$; mientras que las ecuaciones de campo electromagnético son

$$\begin{gathered}\gamma^{[ir]}{}_{,r}=0\\ \eta^{rs}\left\{\gamma_{[ik],p}+\gamma_{[kp],i}+\gamma_{[pi],k}\right\}_{,rs}=0\end{gathered}$$

siendo la intensidad de campo electromagnético $\gamma_{[ik]}$. La segunda de las anteriores ecuaciones no coincide con la correspondiente a la teoría de Maxwell que afirma que es nulo lo incluido en el paréntesis de esta ecuación. Por tanto nuestra teoría electromagnética es compatible con la de Maxwell aunque no al contrario. Sobre este asunto Einstein y Straus afirman que esta no era una objeción a la teoría ya que «no conocemos la correspondencia de las soluciones de las ecuaciones linealizadas con las soluciones rigurosas las cuales son regulares en todo el espacio. Es claro desde el comienzo que en una teoría de campo consistente la cual reclama ser completa (en contraste, por ejemplo a la teoría de la gravitación) solamente son consideradas aquellas soluciones que son regulares en todo el espacio. Si tales soluciones (no triviales) existen no es todavía conocido».

11.- La densidad lagrangiana de Einstein

En el año 1948 Einstein volvió a la teoría hermítica [5] y la replanteó de nuevo en un intento de disminuir el

DOI: 10.13140/RG.2.1.2834.6725

carácter más bien artificioso de la densidad lagrangiana (16). La densidad lagrangiana que adopta Einstein es

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} \tag{38}$$

donde R_{ik} es el tensor de Ricci hermítico. La nueva teoría sigue siendo métrico-afín, en el sentido de que tanto el tensor métrico como la conexión son potenciales del campo, debiéndose variar la acción respecto a ambas cantidades.

Según se dedujo en el epígrafe 9 la variación con respecto a la conexión da las ecuaciones

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{s}} \delta_r^k - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+}{s}\underset{-}{k}} \delta_r^i - \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{is} \delta_k^r \tau_s + \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{sk} \delta_r^i \tau_s = 0 \tag{39}$$

o desarrollando las derivadas covariantes

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk} \Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is} \Gamma_{rs}^{\ \ k} - \boldsymbol{g}^{sk} \Gamma_{(rs)}^{\ \ \ r} - \frac{1}{2}\left(\partial_s \boldsymbol{g}^{is} + \boldsymbol{g}^{ts} \Gamma_{ts}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{it} \Gamma_{st}^{\ \ s} - \boldsymbol{g}^{is} \Gamma_{(ts)}^{\ \ \ t} \right) \delta_r^k -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\partial_s \boldsymbol{g}^{sk} + \boldsymbol{g}^{tk} \Gamma_{ks}^{\ \ s} + \boldsymbol{g}^{st} \Gamma_{st}^{\ \ k} - \boldsymbol{g}^{sk} \Gamma_{(ts)}^{\ \ \ t} \right) \delta_r^i - \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{is} \delta_k^r \tau_s + \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{sk} \delta_r^i \tau_s = 0$$

si no existieran los dos últimos sumandos, entonces encontraríamos la ecuación que buscamos $D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = 0$. Esto significa que tendríamos que imponer la condición $\tau_i = 0$ la cual, como hemos visto, no podemos establecer porque no se garantiza la compatibilidad de las ecuaciones resultantes.

Buscamos bajo que condiciones el vector de torsión se anula. Al tomar la parte imaginaria de (39) se encuentra

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{[ik]} + \boldsymbol{g}^{(sk)} \Gamma_{[sr]}^{\ \ \ i} + \boldsymbol{g}^{[sk]} \Gamma_{(sr)}^{\ \ \ i} + \boldsymbol{g}^{(is)} \Gamma_{[rs]}^{\ \ \ k} +$$
$$\boldsymbol{g}^{[is]} \Gamma_{(rs)}^{\ \ \ k} - \boldsymbol{g}^{[sk]} \Gamma_{(rs)}^{\ \ \ r} - \frac{1}{2} \partial_s \boldsymbol{g}^{[is]} \delta_r^k - \frac{1}{2} \partial_s \boldsymbol{g}^{[sk]} \delta_r^i = 0$$

al contraer los índice k y r

$$\frac{1}{2} \partial_s \boldsymbol{g}^{[is]} - \boldsymbol{g}^{(is)} \Gamma_{[rs]}^{\ \ \ r} = 0$$

la condición necesaria y suficiente para que $\Gamma_{[rs]}^{\ \ \ r} = 0$ es que $\partial_s \boldsymbol{g}^{[is]} = 0$. Esta igualdad se cumple si suponemos

$$\boldsymbol{g}^{[ik]} = \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}^{ik} = \boldsymbol{g}^{(ik)} + \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r} \tag{40}$$

siendo $\boldsymbol{g}^{ikr}$ una densidad tensorial antisimétrica en sus tres índices, es decir que es nula si hay dos o tres índices iguales y en caso contrario el signo es positivo o negativo según haya una permutación par o impar de los índices. Por lo tanto, el tensor $\boldsymbol{g}^{ikr}$ tiene cuatro componentes independientes, las que tienen de índices (123), (134), (124) y (234). Entonces al cumplirse (40) el vector de torsión es nulo y $D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = 0$ que se convierte en el primer grupo de ecuaciones de campo.

El segundo grupo de ecuaciones de campo se obtiene haciendo la variación con respecto a $\boldsymbol{g}^{(ik)}$ y $\boldsymbol{g}^{ikr}$ de la acción formada por la densidad lagrangiana (38), es decir

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} \, d\Omega = \int \left(R_{(ik)} \delta \boldsymbol{g}^{(ik)} + R_{[ik]} \delta \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r} \right) d\Omega = 0$$

del primer sumando del último miembro se obtiene la ecuación

$$R_{(ik)} = 0,$$

para tratar el segundo sumando integramos por partes y aplicamos el teorema de Gauss

$$\int R_{[ik]} \delta \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r} \, d\Omega = \int \partial_r \left(R_{[ik]} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} \right) d\Omega - \int R_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = - \int R_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = 0,$$

ahora bien, no todas las componentes de $\delta \boldsymbol{g}^{ikr}$ son independientes, aunque sí son arbitrarias. Para sólo tener en cuenta las componentes independientes, antisimetrizamos $R_{[ik],r}$

$$\int R_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = \frac{1}{3} \int \left(R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} \right) \delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = 0$$

dada la arbitrareidad de $\delta \boldsymbol{g}^{ikr}$ encontramos

$$R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = 0 \tag{41}$$

nótese que ahora, por ejemplo, las ecuaciones derivadas de $\delta \boldsymbol{g}^{123}$, de $\delta \boldsymbol{g}^{321}$ y de las restantes combinaciones de los índices 1, 2 y 3 generan las mismas ecuaciones. Por tanto (41) corresponde a cuatro ecuaciones independientes.

Resumiendo las ecuaciones de campo de la teoría hermítica de Einstein de 1948 son

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0$$
$$\partial_s \boldsymbol{g}^{[is]} = 0 \quad \text{o} \quad \tau^i = 0$$
$$R_{(ik)} = 0$$
$$R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = 0$$

o sea las mismas ecuaciones que en la teoría de Einstein-Straus (32).

El elemento de línea del espacio-tiempo es

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{(ik)} dx^i dx^k$$

o sea, sólo interviene la parte simétrica (o real) del tensor métrico, de tal forma que ds^2 es un número real, positivo, negativo o nulo. Que el determinante de g_{ik} sea distinto de cero en todo punto, como antes hemos supuesto, no implica que el determinante de $g_{(ik)}$ sea también distinto de cero. Pero el determinante de $g_{(ik)}$ debe ser distinto de cero en todo punto, ya que en caso contrario no puede afirmarse que se mantendrá la signatura de $g_{(ik)}$.

Entonces no sólo hay que exigir que $g \neq 0$ sino también que el determinante de $g_{(ik)}$ sea distinto de cero y tenga en todo punto un valor negativo. Einstein en su investigación de 1948 da una demostración, que dice es obra de su asistente, por la cual si se supone que las componentes de la conexión son en todo punto determinadas por la segunda ecuación (32) entonces el determinante de $g_{(ik)}$ es distinto de cero en todo punto, la demostración es un tanto oscura y además no concluye que el valor de ese determinante tiene que ser negativo, propiedad que debe ser, por tanto, impuesta. Este asunto fue abordado por Einstein, en colaboración con Kaufman [7], algunos años después y que analizaremos en una posterior investigación.

Señalar finalmente que la teoría de Schrödinger [13] que utiliza tensor métrico y conexión asimétrico pero reales, llega a las mismas ecuaciones (32) que la teoría de Einstein-Straus, para lo que se exige poner las ecuaciones en función de una nueva conexión, derivada de la primitiva y que tiene la propiedad de tener nulo el vector de torsión. Añadir por último que las ecuaciones de Einstein-Straus también coinciden con las de Einstein-Kaufman [8] o ecuaciones finales de la teoría asimétrica de Einstein [6].

12.- Resumen

En esta investigación hemos analizado la teoría hermítica de Einstein tal como fue presentada en tres trabajos publicados en los años 1945, 1946 y 1948 [3], [4] y [5]. Se trata de una teoría métrico-afín asimétrica que puede ser planteada con componentes complejas de la métrica y de la conexión, o bien con componentes reales como hace Schrödinger [13].

Desarrollamos la matemática implicada en la teoría hermitica, basada en una definición de la derivación covariante diferente de la habitual. Fueron tres las densidades lagrangianas usadas y que se plantearon en los tres trabajos antes citados. El primer artículo de Einstein, que exponemos en los epígrafes 7 y 8, conduce a las ecuaciones de campo fuertes, no derivables de un principio variacional, que fueron corregidas en los dos trabajos siguientes, el primero de ellos realizado en colaboración con Straus, dando lugar al sistema débil de ecuaciones de campo.

Finalmente, en el año 1948 Einstein vuelve de nuevo a la teoría hermítica al reconocer el carácter un tanto artificioso de la densidad lagrangiana de Einstein-Straus y formular de nuevo el principio variacional aunque obteniendo las mismas ecuaciones de campo.

La teoría métrico-afín asimétrica se siguió desarrollando después de los trabajos que comentamos, convirtiéndose en la teoría de campo unificado final de Einstein y presentada en dos artículos escritos en colaboración con Kaufman [7] y [8].

13.- Bibliografía

[1] Einstein, A.: «Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elekctrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* **XXII** (1925) 414-419, traducción al inglés de A. Unzicker and T. Case con el título «Unified Field Theory of Gravitation and Electricity», descarga de www.alexander-unzicker.de/rep0.pdf.

[2] Einstein, A.: «Neue Möglichkeit für eine einsheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 224-227, 14 junio 1928.

[3] Einstein, Albert: «A generalization of the reltivistic theory of gravitation», *Annals of Mathematics* **46-4** (1945) 578-584.
[4] Einstein A.; Straus E. G.: «A generalization of the reltivistic theory of gravitation, II», *Annals of Mathematics* **47-4** (1946) 731-741.
[5] Einstein, Albert: «A generalized theory of gravitation», *Reviews of Modern Physics* **20-1** (1948) 35-39.
[6] Einstein, Albert: *El significado de la Relatividad*, Espasa-Calpe, 1971, pp. 166-195.
[7] Einstein, A.; Kaufman, B.: «Algebraic properties of the field in the relativistic theory of the asymmetric field», *Anals of Mathematics* **59-2** (1953) 230-244.
[8] Einstein, A.; Kaufman, B.: «A new form of the General Relativistic Field Equations» *Annals of Mathematics* **62-1** (1955) 128-138.
[9] Goenner, Hubert: «On the History of Unified Field Theories. Part. II (ca. 1930-ca. 1955)», *Living Review Relativity* **17** (2014) 1-241.
[10] Gregory, L. J. «The relationship between the Einstein.Strauss and the Einstein-Kaufman unified field theories», *Acta Physica Polonica* **B9-7** (1978) 607-612.
[11] Moffat, J. W.: «New theoy of gravitation», *Physical Review D* **19-12** (1979) 3554-3558.
[12] Narlikar, V.V.; Tiwari, R.: «On Einstein generalised theory of gravitation», *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15-3** (1948) 73-79.
[13] Schrödinger, E.: *Space-Time Structure*, Cambridge, 1991, pp. 108-112 y Segura González, Wenceslao: «The Theory Purely Affine of the Gravity and Electromagnetism of Schrödinger (IV)», http://vixra.org/abs/1503.0040, 2015.
[14] Segura González, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campos*, eWT, 2015.
[15] Segura González, Wenceslao: «La primera teoría métrico-afín de Einstein», vixra.org/abs/1506.0017, 2015.
[16] Segura González, Wenceslao: «Teoría de campo puramente afín de Einstein», http://vixra.org/abs/1505.0026, 2015.
[17] Straus, E. G.: «Some results in Einstein's Unified Field Theory», *Reviews of Modern Physics* **21-3** (1949) 414-420.