Assembly procedure of Collatz tree

Hajime Mashima

July 14, 2016

Abstract

"It multiplies the 1/2 when the number of nature is even. It is multiplied by 3 in the case of an odd number. Furthermore it adds 1. By repeating this calculation, it leads always to 1."

This is referred to as the Collatz problem(Collatz Conjecture).

Contents

1 introduction

Collatz problem は「経路は loop しないか?」、「任意の自然数から始めて必ず 1 になるか?」を真偽の判定とする。
演算は非線形的であるため、アプローチは難しいと考えられる。ここでは Collatz tree の特徴を解説してから帰納法を適用するための手順を示す。

1.1 Collatz tree の特徴

Table 1 の説明

Definition 1

- Collatz problem の経路を木に例え Collatz tree と呼ぶ。
- 列 $3(odd)+1$ の偶数を $node+$ とする。
- 2^n の行を trunk とする。(※ただし 1、2、4 は root とする。)
- $2^n \cdot 3(odd)$ の行を leef とする。
- trunk と leef を除いた行は branch とする。
- trunk、leef、branch の $node+$ に対応する cell を $node-$ とする。

Table 1: Collatz tree model

※ root	$node-(Colored)$							odd	$node+$
trunk	···	64	32	16	8	※ 4	※ 2	※ 1	※ 4
leef	···	192	96	48	24	12	6	**3**	10
branch	···	320	160	80	40	20	10	5	16
branch	···	448	224	112	56	28	14	7	22
leef	···	576	288	144	72	36	18	**9**	28
branch	···	704	352	176	88	44	22	11	34
branch	···	832	416	208	104	52	26	13	40
leef	···	960	480	240	120	60	30	**15**	46
branch	···	1088	544	272	136	68	34	17	52

- $node+$ の列には $node-$ の値が存在し、それを color でマーキングした。これは tree の分岐部に対応する。
  yellow の cell は 2 周期、magenta の cell は 4 周期、cyan の cell は 8 周期、green の cell は 16 周期、red の cell は 32 周期、blue の cell は 64 周期…と trunk の値の周期で $node+$ の列に分布している。
- $node+$ は 3 の倍数でないため leef は $node-$ を有さない。よって Collatz tree の末端であり、通常は leef を初期値とする。
- 2odd< 3odd+1 より、yellow の cell に限り $node-$ の上方に $node+$ が位置している。
- 色付でない cell は分岐部でないため省略しても良い。

【Collatz tree の組立て方】

1. Table の各行 trunk、leef、branch を切り分ける。
2. $node+$ の裏部分に接着剤をつけ $node-$ 同じ値の部分に貼り付ける。
   (leef から始めると良い。)

1.2 loop の有無に関して

Proposition 2 Collatz tree には root を除き loop は存在しない。

Proof 3 $x_n \neq 3(3m)+1$ とする。

Table 2: Collatz tree model

	node−							*odd*	*node+*
branch	$\cdots$	x_{n+2}		x_{n+1}		x_n	$\cdots$		

Theorem 4 (フェルマーの小定理) n を自然数、p が素数で n と p が互いに素であるとき

$$n^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$p=3$ では

$$n^2-1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$x_n = 3\left(3m+1\right)+1$ の時

$$x_{n+1} = 2^2\left(3\left(3m+1\right)+1\right)$$

$$\begin{aligned}
odd &= \frac{1}{3}\left(2^2\left(3\left(3m+1\right)+1\right)-1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(2^2\cdot 3\left(3m+1\right)+2^2-1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(2^2\cdot 3\left(3m+1\right)+3\right)\\
&= 2^2\left(3m+1\right)+1\\
&= 2^2\cdot 3m+2^2-1+2 \not\equiv 0 \pmod{3}
\end{aligned}$$

$$x_{n+2} = 2^4\left(3\left(3m+1\right)+1\right)$$

$$\begin{aligned}
odd &= \frac{1}{3}\left(2^4\left(3\left(3m+1\right)+1\right)-1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(2^4\cdot 3\left(3m+1\right)+2^4-1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(2^4\cdot 3\left(3m+1\right)+15\right)\\
&= 2^4\left(3m+1\right)+5\\
&= 2^4\cdot 3m+2^4-1+6\\
&= 2^4\cdot 3m+4^2-1+3\cdot 2 \equiv 0 \pmod{3}
\end{aligned}$$

$x_n = 3(3m+2)+1$ の時

$x_{n+1} = 2^2(3(3m+2)+1)$

$$\begin{aligned}
odd &= \frac{1}{3}\left(2^2(3(3m+2)+1)-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^2\cdot 3(3m+2)+2^2-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^2\cdot 3(3m+2)+3\right) \\
&= 2^2(3m+2)+1 \\
&= 2^2\cdot 3m+2^3-2+3 \\
&= 2^2\cdot 3m+2\left(2^2-1\right)+3 \equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}$$

$x_{n+2} = 2^4(3(3m+2)+1)$

$$\begin{aligned}
odd &= \frac{1}{3}\left(2^4(3(3m+2)+1)-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^4\cdot 3(3m+2)+2^4-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^4\cdot 3(3m+2)+15\right) \\
&= 2^4(3m+2)+5 \\
&= 2^4\cdot 3m+2^5-2+7 \\
&= 2^4\cdot 3m+2\left(4^2-1\right)+7 \not\equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}$$

x_n が leef の分岐部ならば x_{n+3} も leef の分岐部である。

$$\begin{aligned}
2^6 x_n &= x_{n+3} \\
x_n &= 3^2 m_1 + 1 \text{ とおけるので} \\
x_{n+3} &= 2^6\cdot 3^2 m_1 + 2^6 = 2^6\cdot 3^2 m_1 + 3^2\cdot 7+1 \\
&= 3^2 m_2 + 1 \qquad (m_2 = 2^6 m_1 + 7)
\end{aligned}$$

よって $3n$ でない自然数から Collatz 経路を逆に進むと leef が必ず存在する。 (1)

Table 3: leef を初期値にとした場合

leef	$node+A$					
branch	$node-A$	$node+B$				
	branch	$node-B$	$node+C$			
		branch	$node-C$	$node+D$		
			branch	$node-D$	$node+E$	
					$\vdots$	$\ldots$

$node-$ に対応する偶数は $node+$ に 1 つ存在している。
leef を初期値とした場合、leef は $node-$ を有さないため loop にならない。

(1) より任意の $3n$ でない自然数は特定の leef を初期値として得られる。よって root を除き loop は存在しない。 □

1.3 root の繋がりに関して

Proposition 5 yellow cell の $node(+ \to -)$ 連鎖は有限回で停止する。

Example 6 p.10 参照

$$
\begin{aligned}
15 &= 2n_1 + 1 \\
46(\text{yellow cell}) &= 3\left(2n_1 + 1\right) + 1 \\
&= \frac{3 \cdot 2\left(2n_1 + 1\right)}{2} + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
70(\text{yellow cell}) &= \frac{3}{2}\left(3\left(2n_1 + 1\right) + 1\right) + 1 \\
&= \frac{3^2 \cdot 2\left(2n_1 + 1\right)}{2^2} + \frac{3}{2} + 1 \\
70 - 46 &= \frac{3\left(3 - 2\right)\left(2n_1 + 1\right)}{2} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{6n_1 + 3}{2} + \frac{3}{2} \\
&= 3\left(n_1 + 1\right) \\
\frac{70 - 46}{6} &= \frac{\left(n_1 + 1\right)}{2} = \text{even steps}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
106(\text{yellow cell}) &= \frac{3}{2}\left(\frac{3^2\left(2n_1 + 1\right)}{2} + \frac{3}{2} + 1\right) + 1 \\
&= \frac{3^3 \cdot 2\left(2n_1 + 1\right)}{2^3} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3}{2} + 1 \\
106 - 70 &= \frac{3^2\left(3 - 2\right)\left(2n_1 + 1\right)}{2^2} + \frac{3^2}{2^2} \\
&= \frac{3^2\left(2n_1 + 2\right)}{2^2} \\
&= \frac{3^2\left(n_1 + 1\right)}{2} \\
\frac{106 - 70}{6} &= \frac{3\left(n_1 + 1\right)}{2^2} = \text{even steps}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
160(\text{red cell}) &= \frac{3}{2}\left(\frac{3^3\,(2n_1+1)}{2^2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3}{2}+1\right)+1 \\
&= \frac{3^4\cdot 2\,(2n_1+1)}{2^4}+\frac{3^3}{2^3}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3}{2}+1 \\
160-106 &= \frac{3^3\,(3-2)\,(2n_1+1)}{2^3}+\frac{3^3}{2^3} \\
&= \frac{3^3\,(2n_1+1)}{2^3}+\frac{3^3}{2^3} \\
&= \frac{3^3\,(2n_1+2)}{2^3} \\
&= \frac{3^3\,(n_1+1)}{2^2} \\
\frac{160-106}{6} &= \frac{3^2\,(n_1+1)}{2^3} = \text{odd steps}
\end{aligned}
$$

$node+$ の yellow cell は 2 周期なので、

連鎖している時は $node(+\to-)$=even steps である。よって

連鎖が停止する時は $node(+\to-)$=odd steps となる。

r を自然数として一般式は以下となる。

$$
node(+\to-)=\frac{3^{r-1}\,(n+1)}{2^r}\ \text{steps}
$$

$(n+1)$ は有限値なので連鎖していくと有限回で odd になり停止する。 (2)

Example 7 仮に k =odd として、$(n+1)=2^{100}k$ ならば

$$
\begin{aligned}
node(+\to-) &= \frac{3^0\cdot 2^{100}k}{2} = \text{even steps(連鎖)} \\
node(+\to-) &= \frac{3\cdot 2^{100}k}{2^2} = \text{even steps(連鎖)} \\
node(+\to-) &= \frac{3^2\cdot 2^{100}k}{2^3} = \text{even steps(連鎖)} \\
&\vdots \\
node(+\to-) &= \frac{3^{98}\cdot 2^{100}k}{2^{99}} = \text{even steps(連鎖)} \\
node(+\to-) &= \frac{3^{99}\cdot 2^{100}k}{2^{100}} = \text{odd steps(停止)}
\end{aligned}
$$

1.4 Collatz tree の組立て手順

以下に 1〜4 の手順を示す。

1. 全ての leef を *node−* に貼り付ける。

2. *node+* が yellow の全ての branch を *node−* に貼り付ける。
   ((2) より、*node+* が yellow の全ての branch は有限回で *node−* に貼り付ける事が可能である。)

Table 4: Collatz tree model

※ root	node−							*odd*	node+
trunk	···	64		16		※ 4	※ 2	※ 1	※ 4
leef	···								
branch	···		160		40		10	5	16
branch	···								
leef	···								
branch	···								
branch	···	832		208		52		13	40
leef	···								
branch	···		544		136		34	17	52
branch	···								
leef	···								
branch	···								
branch	···	1600		400		100		25	76
leef	···								
branch	···		928		232		58	29	88
branch	···								
leef	···								
branch	···								
branch	···	2368		592		148		37	112
leef	···								
branch	···		1312		328		82	41	124
branch	···								
leef	···								
branch	···								
branch	···	3136		784		196		49	148
leef	···								
branch	···		1696		424		106	53	160
branch	···								
leef	···								
branch	···								
branch	···	3904		976		244		61	184

3. *node+* が yellow でないものに関して、貼り付ける *node+* よりも貼り付けられる branch の *node+* が大きいものを全て貼り付ける。

Example 8 $node + (t_n < s_n)$

$$
\begin{array}{llllll}
\text{trunk} & & & node- & \| & node+4 \\
\\
\text{branch } a_n & node- & \| & node+t_n & & \\
& & & \vdots & & \\
\text{branch } b_n & & & node- & \| & node+s_n
\end{array}
$$

4. 最後に全ての $node + s_n$ を $node - s_n$ に貼り付ける。

Example 9 $node + (s_n > s_{n-1})$

$$
\begin{array}{llllll}
\text{trunk} & node - \cdots 256 \quad 64 \quad 16 & & & \| & node+4 \\
\text{branch } b_1 & & & node-s_1 & \| & node+16 \\
& & & & \vdots & \\
\text{branch } b_2 & & & node- & \| & node+s_1 \\
& & & \vdots & & \\
& node-s_2 & \| & node+ & & \\
& & & & \vdots & \\
\text{branch } b_3 & & & node- & \| & node+s_2 \\
& & & \vdots & & \\
& node-s_3 & \| & node+ & & \\
& & & & \vdots & \\
\text{branch } b_4 & & & node- & \| & node+s_3 \\
& & & \vdots & &
\end{array}
$$

自然数は無限降下する事はないので、任意の自然数は必ず root へ繋がっている。

$node + s_n > node + s_{n-1} > node + s_{n-2} > node + s_{n-3} \cdots > \text{root}$

Table 5: Collatz tree model

※ root	*node−*						*odd*	*node+*
trunk	···	64		16		※ 4	※ 2	※ 1	※ 4
leef	···							**3**	10
branch	···		160		40		10	5	16
branch	···	448		112		28		7	22
leef	···							**9**	28
branch	···		352		88		22	11	34
branch	···	832		208		52		13	40
leef	···							**15**	46
branch	···		544		136		34	17	52
branch	···	1216		304		76		19	58
leef	···							**21**	64
branch	···		736		184		46	23	70
branch	···	1600		400		100		25	76
leef	···							**27**	82
branch	···		928		232		58	29	88
branch	···	1984		496		124		31	94
leef	···							**33**	100
branch	···		1120		280		70	35	106
branch	···	2368		592		148		37	112
leef	···							**39**	118
branch	···		1312		328		82	41	124
branch	···	2752		688		172		43	130
leef	···							**45**	136
branch	···		1504		376		94	47	142
branch	···	3136		784		196		49	148
leef	···							**51**	154
branch	···		1696		424		106	53	160
branch	···	3520		880		220		55	166
leef	···							**57**	172
branch	···		1888		472		118	59	178
branch	···	3904		976		244		61	184
leef	···							**63**	190
branch	···		2080		520		130	65	196
branch	···	4288		1072		268		67	202
leef	···							**69**	208
branch	···		2272		568		142	71	214
branch	···	4672		1168		292		73	220
leef	···							**75**	226
branch	···		2464		616		154	77	232
branch	···	5056		1264		316		79	238
leef	···							**81**	244
branch	···		2656		664		166	83	250
branch	···	5440		1360		340		85	256