

Relativité Générale 2.0

CLAUDE LATOURRE, NOVEMBRE 2015

Depuis plus d'un siècle, les équations de la Relativité Générale ont évoluées au gré des observations de l'Univers. Ces changements se sont exprimés à travers la constante cosmologique (Λ) qui fut d'abord ajoutée côté espace-temps pour rendre l'Univers stationnaire puis retirée lorsque l'on observa l'évolution de celui-ci. Plus récemment, elle réapparue du côté énergie-impulsion pour traduire l'expansion accélérée de l'Univers. Pourtant, leurs contractions permettent d'exprimer exactement la valeur de la constante cosmologique : $\Lambda = -1/4 (R + \kappa T)$ et de définir entièrement les équations de la Relativité Générale : $(R_{\mu\nu} - 1/4 g_{\mu\nu} R) = \kappa (T_{\mu\nu} - 1/4 g_{\mu\nu} T)$ sans faire appel à d'autre concept : Énergie sombre, Quintessence...

HISTORIQUE DES ÉQUATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Initialement (Einstein, 1915), la première version des équations de la Relativité Générale mettaient en relation la métrique d'espace-temps $g_{\mu\nu}$, le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, la courbure scalaire R , le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ et s'énonçait sans constante cosmologique :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) R(x) = \kappa T_{\mu\nu}(x) \quad (\text{RG 1.0})$$

Un peu plus tard (Einstein, 1917), pour refléter un Univers stationnaire, elle est apparue du côté espace-temps, comme facteur de la métrique :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) R(x) - \Lambda^{sta} g_{\mu\nu}(x) = \kappa T_{\mu\nu}(x) \quad (\text{RG 1.1})$$

Ensuite (Hubble, 1929), pour traduire l'expansion de l'Univers, elle en fut révoquée :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) R(x) = \kappa T_{\mu\nu}(x) \quad (\text{RG 1.0})$$

Et plus récemment (Riess, 1998) (Perlmutter, 1999), pour modéliser l'accélération de cette expansion, elle apparait du côté énergie-impulsion :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) R(x) = \kappa T_{\mu\nu}(x) + \Lambda^{acc} g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{RG 1.2})$$

Et depuis, cette constante d'accélération d'expansion (Λ^{acc}), évaluée actuellement à 10^{-52} m^{-2} , fait l'objet de multiples interprétations (Peebles, 2003) : Énergie sombre, Quintessence...

Relativité Générale 2.0

REFORMULATION DES ÉQUATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

En contractant les équations avec la métrique inverse $g^{\mu\nu}$, on obtient :

$$R(x) - 2 R(x) = \kappa T(x) + \Lambda^{acc} 4$$

ce qui permet de fixer l'expression de la constante cosmologique :

$$\Lambda^{acc} = -\frac{1}{4} (R(x) + \kappa T(x))$$

que l'on remplace ensuite dans les équations :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) R(x) = \kappa T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} (R(x) + \kappa T(x)) g_{\mu\nu}(x)$$

pour donner, après simplifications :

$$\left(R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x) R(x) \right) = \kappa \left(T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x) T(x) \right) \quad (\text{RG 2.0})$$

Ainsi formulées, les équations de la Relativité Générale expriment simplement la proportionnalité entre tenseurs à trace nulle :

$$\boxed{\tilde{R}_{\mu\nu}(x) \approx \tilde{T}_{\mu\nu}(x)}$$

sans faire appel à d'autres concepts tels que l'énergie sombre ou la quintessence.

Remarquons au passage, qu'elles peuvent être vues comme étant un extrémum de la quantité :

$$(R(x) - \kappa T(x)) \sqrt[4]{-g(x)}$$

Relativité Générale 2.0

LIMITE DANS UN CHAMP GRAVITATIONNEL FAIBLE POUR DE FAIBLES VITESSES

Avec une métrique qui dévie faiblement de celle de Minkowski :

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

on obtient, comme composantes du tenseur de Ricci et comme courbure scalaire :

$$R_{00}(x) \cong \frac{\Delta V(x)}{c^2}; \quad R(x) \cong -2 \frac{\Delta V(x)}{c^2}; \quad \tilde{R}_{00}(x) \cong \frac{3}{2} \frac{\Delta V(x)}{c^2}$$

Tandis que le tenseur d'impulsion-énergie s'exprime, pour de petites vitesses :

$$T_{00}(x) \cong \rho(x)c^2; \quad T(x) \cong \rho(x)c^2; \quad \tilde{T}_{00}(x) \cong \frac{3}{4} \rho(x)c^2$$

Ainsi, de la composante (00) des équations de la Relativité Générale :

$$\tilde{R}_{00}(x) = \kappa \tilde{T}_{00}(x)$$

on déduit :

$$\frac{3}{2} \frac{\Delta V(x)}{c^2} \cong \frac{3}{4} \kappa \rho(x)c^2$$

ou encore :

$$2 \frac{\Delta V(x)}{c^2} - \kappa \rho(x)c^2 \cong 0$$

Et cela nous permet d'évaluer la constante d'accélération d'expansion :

$$\Lambda^{acc} = -\frac{1}{4} (R(x) + \kappa T(x)) \cong -\frac{1}{4} \left(-2 \frac{\Delta V(x)}{c^2} + \kappa \rho(x)c^2 \right) \cong 0$$

qui n'est donc pas significative à la limite des champs faibles.

Relativité Générale 2.0

SOLUTIONS STATIQUE À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE, DANS LE VIDE

La métrique statique à symétrie sphérique peut s'écrire de façon générale comme suit :

$$ds^2 = g_{tt}c^2dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 \quad \text{avec} \quad g_{tt} = -e^{\nu(r)}; g_{rr} = e^{\mu(r)}; g_{\theta\theta} = r^2; g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$$

Elle donne, comme composantes non nulles du tenseur de Ricci et comme courbure scalaire :

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{-\mu} \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu' - \nu')}{4} + \frac{\nu'}{r} \right] g_{tt}; \quad R_{\theta\theta} = e^{-\mu} \left[\frac{\mu' - \nu'}{2r} + \frac{e^\mu - 1}{r^2} \right] g_{\theta\theta}; \\ R_{rr} &= -e^{-\mu} \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu' - \nu')}{4} - \frac{\mu'}{r} \right] g_{rr}; \quad R_{\varphi\varphi} = e^{-\mu} \left[\frac{\mu' - \nu'}{2r} + \frac{e^\mu - 1}{r^2} \right] g_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad \text{et} \quad R = 2e^{-\mu} \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu' - \nu')}{4} - \frac{\mu' - \nu'}{r} - \frac{e^\mu - 1}{r^2} \right]$$

et, pour les composantes du tenseur de Ricci à trace nulle :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{tt} &= [A(r) + B(r)] g_{tt}; \quad \tilde{R}_{\theta\theta} = A(r) g_{\theta\theta}; \\ \tilde{R}_{rr} &= [-A(r) + B(r)] g_{rr}; \quad \tilde{R}_{\varphi\varphi} = A(r) g_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A(r) &= \frac{1}{2} e^{-\mu} \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu' - \nu')}{4} + \frac{e^\mu - 1}{r^2} \right]; \\ B(r) &= \frac{1}{2} e^{-\mu} \left[\frac{\mu' + \nu'}{r} \right] \end{aligned}$$

Dans le vide, ces composantes doivent être nulles, c'est à dire :

$$\frac{1}{2} e^{-\mu} \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu' - \nu')}{4} + \frac{e^\mu - 1}{r^2} \right] = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} e^{-\mu} \left[\frac{\mu' + \nu'}{r} \right] = 0$$

La deuxième relation est réalisée pour : $\nu' = -\mu'$ que l'on reporte dans la première :

$$e^{-\mu} \left[-\frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{2} + \frac{e^\mu - 1}{r^2} \right] = 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{(e^{-\mu} - 1)''}{2} + \frac{(e^{-\mu} - 1)}{r^2} = 0$$

qui admet comme solution :

$$e^{-\mu(r)} = 1 + \frac{\alpha}{r} + \beta r^2 \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta \quad \text{des constantes.}$$

Ce qui donne, comme métrique dans le vide :

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\alpha}{r} + \beta r^2\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{r} + \beta r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

On peut aussi en déduire la courbure scalaire et la constante d'accélération d'expansion :

$$R = 2e^{-\mu} \left[-\frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{2} - \frac{2\mu'}{r} - \frac{e^\mu - 1}{r^2} \right] = 4 \left[\frac{(e^{-\mu} - 1)'}{r} + \frac{(e^{-\mu} - 1)}{r^2} \right] = 12 \beta \quad \text{et} \quad \Lambda^{acc} = -\frac{1}{4} R = -3 \beta$$

Relativité Générale 2.0

BIBLIOGRAPHIE

Einstein, A. (1915). « Die Feldgleichungen der Gravitation ». *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , 844-847.

Einstein, A. (1917). « Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie ». *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* , 142-152.

Hubble, E. (1929). « A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae ». *National Academy of Sciences, Volume 15* , 168-173.

Peebles, P. &. (2003). « The Cosmological Constant and Dark Energy ». *Reviews of Modern Physics*, Volume 75 , 559.

Perlmutter, S. &. (1999). « Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae ». *The Astrophysical Journal, Volume 517* , 565-586.

Riess, A. G. (1998). « Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant ». *The Astronomical Journal, Volume 116* , 1009-1038.