Three Examples of Unbounded Energy for t > 0

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

We have different gifts, according to the grace given to each of us.
If your gift is prophesying, then prophesy in accordance with your faith;
if it is serving, then serve;
if it is teaching, then teach;
if it is to encourage, then give encouragement;
if it is giving, then give generously;
if it is to lead, do it diligently;
if it is to show mercy, do it cheerfully.
Love must be sincere. Hate what is evil; cling to what is good.
(Romans 12, 6-9)

Abstract – A solution to the 6th millenium problem, respect to breakdown of Navier-Stokes solutions and the bounded energy. We have proved that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $f(x,t)$ such that there is no physically reasonable solution to the Navier-Stokes equations for $t > 0$, which corresponds to the case (C) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute. Three examples are given.

Keywords – Navier-Stokes equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, physically reasonable solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, unbounded energy, millennium problem, uniqueness, non uniqueness, 15th Problem of Smale, blowup time.

§ 1 – Introduction

The second way I see to prove the breakdown solutions of Navier-Stokes equations, following the described in [1], refers to the condition of bounded energy, the finiteness of the integral of the squared velocity of the fluid in the whole space.

We can certainly construct solutions for

(1) $$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i,\ 1 \le i \le 3,$$

that obey the condition of divergence-free to the velocity (continuity equation to the constant mass density),

(2) $$div\ u \equiv \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$ (incompressible fluids)

and the initial condition

(3) $$u(x,0) = u^0(x),$$

where u_i, p, f_i are functions of the position $x \in \mathbb{R}^3$ and the time $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. The constant $\nu \geq 0$ is the viscosity coefficient, p represents the pressure and $u = (u_1, u_2, u_3)$ is the fluid velocity, measured in the position x and time t, with $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. The function $f = (f_1, f_2, f_3)$ has the dimension as acceleration or force per mass unit, but we will keep on naming this vector and its components by its generic name of force, such as used in [1]. It's the externally applied force to the fluid, for example, gravity.

The functions $u^0(x)$ and $f(x,t)$ must obey, respectively,

(4) $$|\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K}(1 + |x|)^{-K}$$ on $\mathbb{R}^3$, for any $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ and $K \in \mathbb{R}$,

and

(5) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}(1 + |x| + t)^{-K}$$ on $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, for any $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$, $m \in \mathbb{N}_0$ and $K \in \mathbb{R}$,

with $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$ (derivatives of order zero does not change the value of function), and a solution (p,u) from (1) to be considered physically reasonable must be continuous and have all the derivatives, of infinite orders, also continuous (smooth), i.e.,

(6) $$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)).$$

Given an initial velocity u^0 of C^∞ class, divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$) on $\mathbb{R}^3$ and an external forces field f also C^∞ class on $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, we want, for that a solution to be physically reasonable, beyond the validity of (6), that $u(x,t)$ does not diverge to $|x| \to \infty$ and satisfy the bounded energy condition, i.e.,

(7) $$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx < C,$$ for all $t \geq 0$.

We see that every condition above, from (1) to (7), need to be obeyed to get a solution (p,u) considered physically reasonable, however, to get the breakdown solutions, (1), (2), (3), (6) or (7) could not be satisfied to some $t \geq 0$, in some position $x \in \mathbb{R}^3$, still maintaining (4) and (5) validity.

A way to make this situation (breakdown) happens is when (1) have no possible solution to the pressure $p(x,t)$, when the vector field $\phi: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ in

(8) $$\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + f = \phi$$

is not gradient, not conservative, in at least one $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$. In this case, to $\phi = (\phi_1, \phi_2\,, \phi_3)$ not to be gradient, it must be

(9) $$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i},\ i \neq j,$$

to some pair $(i,j), 1 \leq i,j \leq 3$, $x \in \mathbb{R}^3$ and time t not negative (for details check, for example, Apostol[2], chapter 10).

If we admit, however, that (1) has a possible (p,u) solution and this also obey (2), (3) and (6), the initial condition $u^0(x)$ verifies (2) and (4), the external force $f(x,t)$ verifies (5) and both $u^0(x)$ and $f(x,t)$ are C^∞ class, we can try get a breakdown solutions in $t \geq 0$ violating the condition (7) (bounded energy), i.e., choosing $u^0(x)$ or $u(x,t)$ that also obey to

(10) $$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx \to \infty, \text{ for some } t \geq 0.$$

The official description of the problem to this (C) case of breakdown solutions is given below:

(C) Breakdown solutions of Navier-Stokes on $\mathbb{R}^3$. Take $\nu > 0$ and $n = 3$. Then there exist a smooth and divergence-free vector field $u^0(x)$ on $\mathbb{R}^3$ and a smooth external force $f(x,t)$ on $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfying

(4) $$|\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K}(1+|x|)^{-K} \text{ on } \mathbb{R}^3, \forall \alpha, K,$$

and

(5) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}(1+|x|+t)^{-K} \text{ on } \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \forall \alpha, m, K,$$

for which there exist no solutions (p,u) of (1), (2), (3), (6), (7) on $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

It's clear to see that we can solve this problem searching valid velocities which the integral of its square in all space $\mathbb{R}^3$ is infinite, or also, as shown in (8), searching functions ϕ non gradients, where the pressure p won't be considered a potential function to some instant $t \geq 0$. We understand that the α, m shown in (4) and (5) just make sense to $|\alpha|, m \in \{0,1,2,3,4,\dots\}$ and the negatives K can be neglected because it does not limit the value of functions u^0, f and its derivatives when $|x| \to \infty$ or $t \to \infty$, with $C_{\alpha K}, C_{\alpha m K} > 0$.

§ 2 – The Schwartz Space S

The inequation (4) brings implicitly that $u^0(x)$ must belong to the vectorial space of rapidly decreasing functions, which tend to zero for $|x| \to \infty$, known as Schwartz space, $S(\mathbb{R}^3)$, named after the French mathematician Laurent Schwartz (1915-2002) which studied it [3]. These functions and its derivatives of all orders are continuous (C^∞) and decrease faster than the inverse of any polynomial, such that

(11) $$\lim_{|x|\to\infty} |x|^k D^\alpha \varphi(x) = 0$$

for all $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i non negative integer, and all integer $k \geq 0$. α is a multi-index, with the convention

(12) $$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

D^0 is the operator identity, D^α is a differential operator. An example of function of this space is $u(x) = P(x)e^{-|x|^2}$, where $P(x)$ is a polynomial function.

The following properties are valid [4]:

1) $S(\mathbb{R}^n)$ is a vector space; it is closed under linear combinations.

2) $S(\mathbb{R}^n)$ is an algebra; the product of functions in $S(\mathbb{R}^n)$ also belongs to $S(\mathbb{R}^n)$ (this follows from Leibniz' formula for derivatives of products).

3) $S(\mathbb{R}^n)$ is closed under multiplication by polinomials, althrough polynomials are not in S.

4) $S(\mathbb{R}^n)$ is closed under differentiation.

5) $S(\mathbb{R}^n)$ is closed under translations and multiplication by complex exponentials ($e^{ix\cdot\xi}$).

6) $S(\mathbb{R}^n)$ functions are integrable: $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty$ for $f \in S(\mathbb{R}^n)$. This follows from the fact that $|f(x)| \leq M(1+|x|)^{-(n+1)}$ and, using polar coordinates, $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+1)} dx = C\int_0^\infty (1+r)^{-n-1}\, r^{n-1} dr < \infty$, i.e., the function $|f|$ decreases like r^{-2} (and $(1+r)^{-2}$) at infinity and a finite integral is produced.

By $S(\mathbb{R}^3)$ definition and previous properties we see that, as $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$, then $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} M(1+|x|)^{-4} dx \leq C\int_0^\infty (1+r)^{-2}\, dr < \infty$ and squared

$|u^0(x)|$ and $M(1+|x|)^{-4}$ we come to the inequality $\int_{\mathbb{R}^3}|u^0(x)|^2dx<\infty$, that contradicts (10).

Another way to check this is that the set $S(\mathbb{R}^n)$ it is contained in $L^p(\mathbb{R}^n)$ for all p, $1\le p<\infty$ ([5]-[9]), and in particular for $p=2$ and $n=3$ follows the finiteness of $\int_{\mathbb{R}^3}|u^0(x)|^2dx$.

Therefore, if the condition (7) is disobeyed, as we propose in this article, will be for $t>0$, for example, finding some function $u(x,t)$ like $u^0(x)v(x,t)$, $v(x,0)=1$, or $u^0(x)+v(x,t)$, $v(x,0)=0$, with $\int_{\mathbb{R}^3}|v(x,t)|^2dx\to\infty$ and $\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2dx\to\infty$.

§ 3 – Example 1

Really, choosing $u^0(x)\in S(\mathbb{R}^3)$ and $f(x,t)\in S(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$, obeying this way (4) and (5), remembering that we do not need have $u,p\in S(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$ as a solution, but only $u,p\in C^\infty(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$, then it is possible to build a solution to the velocity like $u(x,t)=u^0(x)e^{-t}+v(t)$, with $v(0)=0$, such that $\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2dx\to\infty$, because when $\int_{\mathbb{R}^3}[|u^0(x)|^2e^{-t}+2u^0(x)\cdot v(t)]dx\ge 0$, for example, when each component of $u^0(x)$ has the same sign of the respective component of $v(t)$ or the product between them is zero or $\int_{\mathbb{R}^3}u^0(x)\cdot v(t)dx\ge 0$, we will have $\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2dx\ge\int_{\mathbb{R}^3}|v(t)|^2dx=|v(t)|^2\int_{\mathbb{R}^3}dx\to\infty$, with $v(t)\ne 0$, $t>0$. We must also choose u,u^0 such that $\nabla\cdot u=\nabla\cdot u^0=0$.

In particular, we choose, for $1\le i\le 3$,

(13.1) $$u^0(x)=e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}(x_2x_3,x_1x_3,-2x_1x_2),$$
(13.2) $$v_i(t)=w(t)=e^{-t}(1-e^{-t}),$$
(13.3) $$u_i(x,t)=u_i^0(x)e^{-t}+v_i(t),$$
(13.4) $$f_i(x,t)=\left(-u_i^0+e^{-t}\sum_{j=1}^3u_j^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^3v_j\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}-\nu\nabla^2u_i^0\right)e^{-t},$$

which results to $p(x,t)$, as the only unknown dependent variable yet to be determined,

(14) $$\nabla p+\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$

and then

(15) $$p(x,t)=-\frac{dw}{dt}(x_1+x_2+x_3)+\theta(t).$$

The resulting pressure has a general time dependence $\theta(t)$, should be class $C^\infty([0,\infty))$ and we can assume limited, and diverges at infinity ($|x| \to \infty$), but tends to zero at all space with the increased time (unless possibly $\theta(t)$), due to the factor e^{-t} that appears in the derivative of $w(t)$,

(16) $$\frac{dw}{dt} = e^{-t}(2e^{-t} - 1).$$

In this example $\int_{\mathbb{R}^3} u^0(x) \cdot v(t) dx = 0$, and so $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx \to \infty$ for $t > 0$, as we wanted. Simpler it would be to choose $u^0(x) = 0$.

Interesting to note that there is no discontinuity in velocity, no singularity (divergence: $|u| \to \infty$), however diverges the total kinetic energy in the whole space, $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2\, dx \to \infty,\ t > 0$. We had as input data $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, but the solution $u \notin L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, as $p \notin L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$.

§ 4 – Example 2 – General Idea

Another interesting example, using the same previous initial velocity, but making v explicitly depend on the position coordinates x_1, x_2 in the direction e_1, e_2, besides time t, and be equal to zero in the direction e_3, with $v(x,0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, $v \not\equiv 0$ (v not identically zero), and also obeys all the conditions (1) to (6), is, for $1 \le i \le 3$,

(17.1) $$u^0(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}(x_2x_3, x_1x_3, -2x_1x_2),$$

(17.2) $$v(x,t) = e^{-t}w(x,t),$$

(17.3) $$w(x,t) = (w_1(x_1,x_2,t), w_2(x_1,x_2,t), 0),$$
$$w(x,0) = 0,\ \nabla \cdot w = 0,\ w_3 = v_3 = 0,\ w \not\equiv 0,$$

(17.4) $$u_i(x,t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(x,t) = [u_i^0(x) + w_i(x,t)]e^{-t},$$

(17.5) $$\begin{aligned} f_i(x,t) &= \left(-u_i^0 + e^{-t}\textstyle\sum_{j=1}^3 [u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0 \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right)e^{-t} \\ &= \left(-u_i^0 + \textstyle\sum_{j=1}^3 [e^{-t}u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right)e^{-t}, \end{aligned}$$

which results for $p(x,t)$ and $v(x,t)$, as unknowns still to be determined,

(18) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu\nabla^2 v_i,$$

the Navier-Stokes equations without external force.

We know that for $n = 2$ the equation (18) has a solution whose existence and uniqueness is already demonstrated ([10]-[13]), therefore, we will transform our three-dimensional system (18) in a two-dimensional system in v, which offers as solution a pressure p and a velocity v, *a priori*, with spatially two-dimensional domain, i.e., in the variables (x_1, x_2, t). Resolved, by hypothesis, the equation (18) above, with $v(x, 0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, but v not identically zero, we add the third spatial coordinate $v_3 \equiv 0$ in the definitive solution for $u(x, t)$, spatially three-dimensional, in (17.4), and calculate the external force in (17.5). Choosing $v \in S(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ or v polinomial, sine, cosine or their sums to be used in (18), we guarantee that $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, obeying up (5), with $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$, according (4). Making v limited in module (norm in Euclidean space) we make that u not diverge at $|x| \to \infty$, which is a physically reasonable and desirable condition in [1]. Then build a velocity v not identically zero, with $v(x, 0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, such that it is relatively simple to solve (18), which is limited in module, can (preferably) go to zero at infinity in at least some situations and can be integrated in $\mathbb{R}^2$, it is C^∞ class and satisfies (5).

Equation (18) also admit a general time dependence to the pressure that is of the form

(19) $$p(x, t) = p_1(x_1, x_2, t) + \theta(t),\ x \in \mathbb{R}^3,$$

i.e., besides the conventional solution p_1 to the pressure of the two-dimensional problem of the Navier-Stokes equations (18) in the independent variables (x_1, x_2, t), add to p a generic parcel $\theta(t)$ only dependent on the time and/or a constant as the definitive pressure solution in the original three-dimensional problem, as we have seen in (15).

The infinitude of the total kinetic energy in this second example, occurs due to the integration of a two-dimensional function ($|v|^2$ or $|w|^2$) not identically zero in the infinite three dimensional space ($\mathbb{R}^3$).

The total kinetic energy of the problem is, for $v = e^{-t} w$,

(20) $$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-2t} |u^0|^2 + 2e^{-t} u^0 \cdot v + |v|^2) dx \\ &= e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^3} (|u^0|^2 + 2u^0 \cdot w + |w|^2) dx. \end{aligned}$$

Although $\int_{\mathbb{R}^3} (|u^0|^2 + 2u^0 \cdot w) dx$ is finite, by the properties of functions belonging to the Schwartz space and integrable (the case $u^0 = 0$ is elementary), the third parcel in (20) will be infinite in $\mathbb{R}^3$ for $v, w \not\equiv 0$, though the function can converge and be finite in $\mathbb{R}^2$, that is, if $|v|$ is not identically zero and $t > 0$,

(21) $$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 dx \right) dx_3 = C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \to \infty,$$

hence, for strictly positive and finite t,

(22) $$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \to \infty, t > 0, v \not\equiv 0,$$

the violation of condition (7).

§ 5 – Example 2 – Exact Solution

Let us now solve (18) explicitly, first in the domain $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$. In the example 3 your domain will be $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. We show that a solution of the type

(23) $$v(x_1, x_2, t) = (X(x_1 - x_2)T(t),\ X(x_1 - x_2)T(t)),$$

with a given pressure such that

(24) $$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} = aQ(x_1 - x_2)R(t) + b,$$

a, b constants, $a \neq 0, Q$ a function of the difference of the spatial coordinates, R a function of time, Q, R not identically zero functions, solve (18) and eliminate the non-linear term, in which case if $T(0) = 0$ resolves (17) and the original system (1), (2), (3). X and T not identically zero, of course.

If $v_i = v_j = V$ in (18), we have to the nonlinear terms

(25) $$\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} V \frac{\partial V}{\partial x_j} = V \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j}.$$

Doing $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0$ in (25) eliminates the nonlinear term, equality which is true when the necessary condition incompressible fluid imposed by us, $\nabla \cdot v = 0$, is satisfied, i.e.,

(26) $$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0.$$

Defining $V(x, t) = X\big(\xi(x)\big)T(t)$, with $x \in \mathbb{R}^n$, then

(27)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} = T(t) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X(\xi(x))}{\partial x_j} = T(t) \sum_{j=1}^{n} X'(\xi) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j} = T(t)X'(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j}.$$

Functions $\xi(x)$ such that $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j} = 0$ then result in $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0$, according (27), following the example of $\xi = x_1 - x_2$ in spatial dimension $n = 2$, as it was used in (23).

Substituting (24) in (18), already no nonlinear terms $\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, and for simplicity making $a = 1, b = 0$, comes

$$(28)\qquad Q(x_1 - x_2)R(t) + \frac{\partial V}{\partial t} = \nu\nabla^2 V,$$

with $V = X(x_1 - x_2)T(t)$. We thus transform a system of n partial differential equations nonlinear in a single linear partial differential equation.

Defining $\xi = x_1 - x_2$, equation (28) becomes

$$(29)\qquad Q(\xi)R(t) + X(\xi)\frac{dT}{dt} = \nu T\nabla^2 X(\xi).$$

We want to get a function $T(t)$ such that $T(0) = 0$, in order that in $t = 0$ we have $v(x, 0) = 0$, according (23). Let us choose, for example, among other possibilities endless,

$$(30)\qquad T(t) = (1 - e^{-t})e^{-t},$$

limited function in range $0 \le T(t) \le 1,\ t \ge 0$, going to zero for $t \to \infty$.

Thus, by (29), with

$$(31)\qquad \frac{dT}{dt} = e^{-t}(2e^{-t} - 1),$$

comes

$$(32)\qquad Q(\xi)R(t) + X(\xi)e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \nu(1 - e^{-t})e^{-t}\nabla^2 X(\xi).$$

Defining $Q(\xi) = X(\xi)$ in (32), to separate our equation with the traditional method of separation of variables used in D.P.E. theory,

$$(33)\qquad [R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1)]X(\xi) = \nu(1 - e^{-t})e^{-t}\nabla^2 X(\xi).$$

The linear partial differential equation (33) may be resolved by some alternative combinations:

$$(34)\qquad \begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm\nu(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

or

$$(35)\qquad \begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nu\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

or more generally, with $\nu_1 \cdot \nu_2 = \nu > 0,\ \nu_1, \nu_2 > 0$,

$$(36)\qquad \begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm\nu_1(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nu_2\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

The differential equation of second order in X, depending on which of the signals we use to $\pm$, The differential equation of second order X in the above systems, depending on which of the signals we use to $\pm$ leads us to the Helmholtz equation (negative sign) or a moving steady state governed by Schrödinger equation independent of time (positive signal or negative).

Not intending to use any specific boundary condition for $X(\xi)$ and we do make use of series and Fourier integrals, we choose here the negative sign in $\pm$ (the option should be the same in both equations system), and let us make X be a trigonometric function, sum of sine and cosine in ξ, i.e.,

(37) $$X(\xi) = A\,cos(B\xi) + C\,sen(D\xi).$$

With $\xi = x_1 - x_2$ we have

(38) $$\begin{aligned}\nabla^2 X &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)[A\,cos(B\xi) + C\,sen(D\xi)] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[A\,cos(B\xi) + C\,sen(D\xi)] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[A\,cos(B\xi) + C\,sen(D\xi)] \\ &= -2[AB^2\,cos(B\xi) + CD^2\,sen(D\xi)].\end{aligned}$$

From $X(\xi) = -\nu_2 \nabla^2 X(\xi)$ in (36) comes

(39) $$\nu_2 = \frac{1}{2B^2} = \frac{1}{2D^2},\ \nu_1 = 2B^2\nu = 2D^2\nu,\ \ |B| = |D|,$$

whatever the values of A and C (if $A = C = 0$ or $B = D = 0$ we have the trivial and unwanted solution $v(x,t) \equiv 0$).

The solution for $R(t)$ obtained is then, using $\nu_1 = 2B^2\nu$ given in (39) and the negative sign in (36),

(40) $$R(t) = -e^{-t}[2B^2\nu(1 - e^{-t}) + 2e^{-t} - 1],$$

being $R(0) = -1$.

From (23), (30) and (37) comes up as a possible solution, for $x \in \mathbb{R}^3$ and implicitly introducing the third coordinate space $v_3 \equiv 0$ into v, to

(41) $$\begin{aligned}v(x,t) &= X(x_1 - x_2)T(t)(1,1,0) \\ &= [A\,cos(B\xi) + C\,sen(\pm B\xi)](1 - e^{-t})e^{-t}(1,1,0),\end{aligned}$$

which as we can see is not actually a single solution for speed, because of the endless possibilities that we had to set the time dependence $T(t)$, as well as the temporal dependence $X(\xi)$, $\xi = x_1 - x_2$, beyond the arbitrary constants A, B, C in (41). Even without uniqueness of solution, it meets the requirements we expected: it is limited, continuous of class C^∞, equal to zero at the initial time, tends to zero with increasing time, and has divergent null ($\nabla \cdot v = 0$). Furthermore, when used in the expression (17.5) obtained for the external force, it does not remove to the force f the condition that belong to Schwartz space in relation to space $\mathbb{R}^3$ and to the time, i.e., $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, as can be shown of the S properties that we saw in section § 2 above.

The pressure is obtained by integrating (24) with respect to the difference $\xi = x_1 - x_2$, with $a = 1, b = 0, Q(\xi) = X(\xi)$ and $R(t)$ given in (40),

$$
\begin{aligned}
(42) \qquad p(x,t) - p_0(t) &= R(t) \int_{\xi_0}^{\xi} Q(\xi) d\xi \\
&= -e^{-t}[2B^2 \nu(1 - e^{-t}) + 2e^{-t} - 1]\, S(\xi), \\
S(\xi) &= \frac{A}{B}[sen(B\xi) - sen(B\xi_0)] \pm \frac{A}{B}[cos(\pm B\xi) - cos(\pm B\xi_0)],
\end{aligned}
$$

where ξ_0 is the surface $\xi = \xi_0$ and where the pressure is p_0 at time t. Again we see that this solution is not unique, not only due solely to the function $p_0(t)$ and respective ξ_0, but also because of the arbitrary constants A and B, the signal $\pm$, beyond from the way $R(t)$ and $Q(\xi)$ were obtained, with a certain freedom of possibilities. $p_0(t)$ substitute the function $\theta(t)$ used in (15) and (19), our generic function of time, or a constant, which must be class $C^\infty([0,\infty))$ and we can assume limited.

Completing the main solution (p, u) that we seek to equation (1), we finally have

$$(43) \qquad u(x,t) = u^0(x)e^{-t} + v(x,t),$$

with $u^0(x)$ given in (17.1), $v(x,t)$ in (41) and $f(x,t)$ in (17.5).

The velocity (secondary) v we choose makes the velocity (main) u a function with some properties similar to it: u It is limited oscillating, contains a sum of sine and cosine of a difference in spatial coordinates and decays exponentially over time, or does, not belong to a Schwartz space over the position, nor is square integrable (violating so the inequality (7) in $t > 0$), but is continuous of class C^∞ and does not diverge when $|x| \to \infty$. Their behavior in relation to $x_1 - x_2$ and the divergence of the total kinetic energy obviously not withdraw of $f(x,t)$ the condition to be pertaining to $S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, equivalent to inequality (5), since it only depends on $u^0(x)$ and $v(x,t)$. We also have $v(x,0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, the validity of (1), (2), (3), (4) and (6), $u(x,0) = u^0(x)$, $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$, with $\nabla \cdot u = 0$ and $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, as we wanted.

§ 6 – The non uniqueness in $n = 2$ spatial dimension

What's with the proofs of uniqueness of solutions of the Navier-Stokes equations in spatial dimension $n = 2$?

Not possible to examine all the available proofs, you can at least understand that such proofs should not take into account the absence of the nonlinear term in the Navier-Stokes equations, $\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv ((u \cdot \nabla)u)_i, 1 \le i \le n$, and it was this lack that we use in our second example.

Similarly to this cause, also realize that different equations of the type Navier-Stokes equations with the absence of one or more terms of their complete equation, and which nevertheless have the same initial condition $u(x,0) = u^0(x)$, will probably, in the general case, different solutions $u(x,t)$ among them, and so there can be no uniqueness of solution from the full Navier-Stokes equation, with all terms. If all always presented the same and only solution would suffice for us to solve the simplest of them only, for example, $\nabla p = -\frac{\partial u}{\partial t}$ ou $\nabla p = \nu \nabla^2 u$ (Poisson Equation if $\nabla p \not\equiv 0$ or by Laplace if $\nabla p \equiv 0$) or $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u$ (Heat Equation with $\nabla p = 0$), all with $u(x,0) = u^0(x)$, and check if the sum of the other missing terms is zero to apply the solution u obtained in the reduced equation. If so, the solution of the reduced equation is also solution of the complete equation. Important example of this absence are the Euler equations, which differ from the Navier-Stokes equations by the absence of differential operator Laplacian applied to u, $\nabla^2 u \equiv \Delta u$, due to the viscosity coefficient be zero, $\nu = 0$.

It is easy to prove that the above three equations, as well as the equation $\nabla p + \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u$, not may actually have a unique solution, given only the initial condition for velocity $u(x,0) = u^0(x)$. On the contrary, the complete form of the Navier-Stokes equations, where we assume that $\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv ((u \cdot \nabla)u)_i \not\equiv 0$, $1 \leq i \leq n$, it has uniqueness of solution for $n = 2$ and at least a short period of time not null $[0, T]$ for $n = 3$, where T is known as *blowup time*. Let us add all of these equations the condition of incompressibility, $\nabla \cdot u = 0$.

This is so an interesting problem of Combinatorial Analysis applied to Mathematical Analysis and Mathematical Physics.

§ 7 – Uniqueness in $n = 2$ spatial dimension

We found in section § 5 that the system

$$(44) \qquad \begin{cases} \nabla p + \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \nabla^2 v \\ (v \cdot \nabla) v = 0 \\ \nabla \cdot v = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

has infinite solutions to the velocity of the form

$$(45) \qquad v(x,t) = X(\xi) T(t)(1,1), \xi = x_1 - x_2,$$

with $T(0) = 0$, however there are known proofs of the uniqueness of

(46) $$\begin{cases} \nabla p + \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = \nu \nabla^2 v \\ \nabla \cdot v = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

contradicting what we got.

No need to linger in the known proofs, exposing all its details, repeating his steps, you can be seen in Leray [10], Ladyzhenskaya [11], Kreiss and Lorenz [14], among others, that the proofs of existence and uniqueness are based on the complete form of the Navier-Stokes equations, for example (46), and not in a dismembered form of the Navier-Stokes equations, as (44).

The Navier-Stokes equations without external force with $n = 2$ are (using $x \equiv x_1$ and $y \equiv x_2$)

(47) $$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_1 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_2 \end{cases}$$

We can dispose the system up in a similar form to a system of linear equations,

(48) $$\begin{cases} u_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_1 - \dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ u_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_2 - \dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \end{cases}$$

and then in the form of a matrix equation,

(49) $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \\ \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Calling

(50) $$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

(51) $$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{pmatrix},$$

(52) $$B = \begin{pmatrix} \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \\ \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix},$$

the solution for U of the equation (49), $AU = B$, is

(53) $$U = A^{-1}B,$$

that for its existence and unique solution must be

(54) $$\det A = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x} \neq 0,$$

that is,

(55) $$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} \neq \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

rule should also be obeyed for $t = 0$ (again can lead us to cases (C) and (D) of [1] applying the method in matrix 3×3, i.e., $n = 3$, however, with appropriate choice of p or $\partial u/\partial t$ the system will be possible).

If we use the condition of incompressibility $\nabla \cdot u = 0$,

(56) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0,$$

i.e.,

(57) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

becomes the condition (55) in

(58) $$-\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

or equivalently,

(59) $$-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Since this condition must be valid for all t, in $t = 0$ must obey to

(60) $$-\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial x}$$

and

(61) $$-\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial y}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial x},$$

using $u(x, y, 0) = u^0(x, y) = (u_1^0(x, y), u_2^0(x, y))$.

If the initial velocity u^0 is such that either disobeyed (60) or (61) then either there is no solution to the system (47) (impossible system) or there will be a non-unique solution (indeterminate system), as in theory linear systems.

Defining

(62) $$U_1 = \begin{pmatrix} \nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

and

(63) $$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix},$$

the solution for u_1, u_2 will be

(64) $$u_1 = \frac{\det U_1}{\det A}$$

and

(65) $$u_2 = \frac{\det U_2}{\det A}.$$

Being

(66) $$\det U_1 = \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}$$

and

(67) $$\det U_2 = \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

with $\det A$ given in (54), then we have

(68) $$u_1 = \frac{\det U_1}{\det A} = \frac{\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}}{\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}$$

and

(69) $$u_2 = \frac{\det U_2}{\det A} = \frac{\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x}}{\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}.$$

Using the incompressibility equation in the determinant of A,

(70) $$u_1 = -\frac{\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}}{\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}$$

and

$$(71) \qquad u_2 = -\frac{\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x}}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}.$$

It is true that the solutions (equations) above are as or more complicated as the original equations (47), and seems there no use whatsoever in resolving them.

But this complicated form can be reached with more certainty to the following conclusion: the Navier-Stokes (and Euler) equations have a symmetry between the variables, both dependent as independent. The same can also be realized directly in (47).

The symmetry in this case of $n = 2$ is

(72.1) $\quad u_1 \leftrightarrow u_2$

(72.2) $\quad x \leftrightarrow y$

p and t being unchanged:

(73.1) $\quad p \leftrightarrow p$

(73.2) $\quad t \leftrightarrow t.$

This suggests, if not completely solves, the question of the solution of these equations. If the equations themselves are symmetrical with respect to certain transformations, so we hope that their solutions are also under these transformations. The same method can be applied also for $n \geq 3$, with the rule (e.g.)

(74.1) $\quad u_i \mapsto u_{i+1},\ u_{n+1} \equiv u_1,$

(74.2) $\quad x_i \mapsto x_{i+1},\ x_{n+1} \equiv x_1,$

(74.3) $\quad p \leftrightarrow p,$

(74.4) $\quad t \leftrightarrow t.$

In this case it is necessary that the initial condition $u(x,0) = u^0(x)$ also obey these symmetries, but remains unchanged the condition of incompressibility: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} = 0.$

If we provide $u_2(x,y,t)$ as input data in our system then we can conclude that the solution for u_1, supposedly symmetrical to u_2 by the rule (72) previous, is

(75) $\quad u_1(x,y,t) = u_2(y,x,t),$

i.e., we exchange x by y, and vice versa, in the solution previously given for u_2 and we equate to u_1 the result of this transformation. Lack get the pressure p or else if it has also been given, check that the variables $u_1,\ u_2,\ p$ really satisfy the original system.

The general form of the solution to the pressure p, which must satisfy

(76) $$\nabla p+\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u=\nu\nabla^2 u,$$

is

(77) $$p-p_0(t)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left[\nu\nabla^2 u-\frac{\partial u}{\partial t}-(u\cdot\nabla)u\right]\cdot dl,$$

where we assume that in the position $(x,y)=(x_0,y_0)$ and at the instant t the pressure is equal to $p_0(t)$. The integration occurs in any way between (x_0,y_0) and (x,y), because the pressure should be a potential function of the integral of (77) in order that (47) has solution.

It is also expected that p be symmetric with respect to variables x and y, in other words,

(78) $$p(x,y,t)=p(y,x,t),$$

as well as in 3 dimensions, using $x\equiv x_1, y\equiv x_2, z\equiv x_3$,

(79) $$p(x,y,z,t)=p(y,z,x,t)=p(z,x,y,t).$$

Of course (74), (75), (78) and (79) implicitly admits that we have rectangular symmetry in the initial and contour conditions of the system. Since this symmetry does not occur, for example, have another type of symmetry, spherical, cylindrical, or even none symmetry (general case), the equalities (74), (75), (78) and (79) do not need to be met. Thus, the solution for the case that there is none symmetry is still a problem to be solved, assuming that there is at least one solution (when the system is possible; as we said, it can be proved that the system is always possible, for example, with appropriate choice of p or $\partial u/\partial t$).

Finally then developed the foregoing, our example 3, which seeks a unique solution to the Navier-Stokes system with $n=3$, all terms of the equation, nonzero external force, and provides infinite total kinetic energy to the system (1) to (6) in $t>0$ will be based on the example 2, but again need to resort to the absence of non-linear term in the equation auxiliary with $n=3$. Since (18), the Navier-Stokes equation without external force, has as initial condition the zero initial velocity, the only possible velocity for your solution with all the terms is also the zero velocity due to the uniqueness of the solutions in the form complete this equation (abstracting constant generic pressures and/or time functions), solution that does not interest us. So, we need again that (18) does not have the non-linear term. The uniqueness of the main equation solution in three dimensions, however, at least in short time, is guaranteed because it contains all terms (again, except for not unique pressure), including the applied external force (which itself depends of not unique solution of the auxiliary equation with $n = 3$).

§ 8 – Example 3

The third example is a generalization of the example 2, with the velocity components v_2 and v_3 proportional to the component v_1,

(80.1) $$v_1 = X(\xi)T(t),\ \xi = x_1 + \frac{1}{\alpha}x_2 - 2\frac{1}{\beta}x_3,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,$$

(80.2) $$v_2 = \alpha v_1,$$

(80.3) $$v_3 = \beta v_1,$$

α and β non-zero constant. We could also use other coefficients combinations in the variables x_i in ξ, whenever $\nabla \cdot (\xi I) = 0$, with $I = (1,1,1)$. In the example 2 we use $\alpha = 1,\ \beta = 0$.

We will choose the components of the initial velocity u^0 with some property of symmetry. It is not easy to think of not constant velocities with symmetrical components u_i^0 and simultaneously whose divergent $\nabla \cdot u^0$ is null. The velocities with symmetry which the i-th component does not contain the i-th coordinate space, for all i (natural) in $1 \leq i \leq n$, fulfill this requirement: $\frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} = 0$. Alternatively we can use the known vector equality $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$, ie, choosing a vector u^0 that has a potential vector $\boldsymbol{A}$, i.e., $u^0 = \nabla \times \boldsymbol{A}$. So we choose primarily a vector $\boldsymbol{A}$ that has the symmetry properties we expect.

Be $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ the potential vector we want. Doing $A_1 = A_2 = A_3 = e^{-r^2}$, with $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, the value assigned to the initial velocity $u^0(x)$ will be

(81) $$u^0(x) = rot\ \boldsymbol{A} = 2e^{-r^2}(-x_2 + x_3, -x_3 + x_1, -x_1 + x_2).$$

Following the equations 17 of Example 2, let us now for $x \in \mathbb{R}^3$,

(82.1) $$v(x,t) = e^{-t}w(x,t),$$

(82.2) $$w(x,t) = \big(w_1(x_1,x_2,x_3,t), w_2(x_1,x_2,x_3,t), w_3(x_1,x_2,x_3,t)\big),$$
$$w(x,0) = 0,\ \nabla \cdot w = 0,\ w \not\equiv 0,$$

(82.3) $$u_i(x,t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(x,t) = [u_i^0(x) + w_i(x,t)]e^{-t},$$

(82.4) $$f_i(x,t) = \left(-u_i^0 + e^{-t}\textstyle\sum_{j=1}^3[u_j^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + w_j\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right)e^{-t}$$
$$= \left(-u_i^0 + \textstyle\sum_{j=1}^3[e^{-t}u_j^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right)e^{-t},$$

which results for $p(x,t)$ and $v(x,t)$, as unknowns variables still to be determined,

(83) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 v_i,$$

the Navier-Stokes equations without external force.

Equations (80) applied to (83) result in

(84) $$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \alpha \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \beta \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \nu \nabla^2 v_1 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_2} + \alpha \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha v_1 \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \alpha \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \beta \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \nu \alpha \nabla^2 v_1 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_3} + \beta \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \beta v_1 \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \alpha \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \beta \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \nu \beta \nabla^2 v_1 \end{cases}$$

As

(85) $$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= T(t) \frac{dX}{d\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right) \\ &= T(t) \frac{dX}{d\xi} (1 + 1 - 2) = 0, \end{aligned}$$

by the definition of ξ we use in (80.1), then (84) becomes

(86) $$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \nabla^2 v_1 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_2} + \alpha \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \alpha \nu \nabla^2 v_1 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_3} + \beta \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \beta \nu \nabla^2 v_1 \end{cases}$$

or equivalently,

(87) $$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = \nu \nabla^2 v_1 - \dfrac{\partial v_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = \alpha \left[\nu \nabla^2 v_1 - \dfrac{\partial v_1}{\partial t} \right] = \alpha \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_3} = \beta \left[\nu \nabla^2 v_1 - \dfrac{\partial v_1}{\partial t} \right] = \beta \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \end{cases}$$

Similar to what we saw in section § 5, equation (24) for $a = 1$ and $b = 0$, we will make the pressure to be defined as

(88) $$\frac{\partial p}{\partial \xi} = Q(\xi) R(t),$$

and the velocity

(89) $$v_i = c_i X\big(\xi(x)\big)\, T(t),\ \ c_1 = 1, c_2 = \alpha, c_3 = \beta,$$

with ξ defined in (80.1),

(90) $$\xi = x_1 + \frac{1}{\alpha} x_2 - 2 \frac{1}{\beta} x_3,\ \ \alpha \neq 0,\ \ \beta \neq 0.$$

Then it will be sufficient, besides the equation (88) to the pressure, solve one linear partial differential equation involving v_1, instead of a system of three nonlinear partial differential equations involving v_1, v_2, v_3.

The development of the solution here follows the same steps already seen in section § 5, equations (29) to (43), being the main change the expression for ξ given in (90), with increased dimensions and the proportionality between v_2, v_3 and v_1. We come to

$$(91) \qquad v(x,t) = X\left(x_1 + \frac{1}{\alpha}x_2 - 2\frac{1}{\beta}x_3\right)T(t)(1,\ \alpha,\ \beta)$$
$$= [A\ cos(B\xi) + C\ sen(\pm B\xi)](1 - e^{-t})e^{-t}(1,\ \alpha,\ \beta),\ \alpha, \beta \neq 0,$$

keeping valid the solutions (42) and (43) for the pressure p and velocity u, respectively. Initial velocity equal to (81). We also have the validity of $\nabla \cdot v = 0$ and the corresponding integral $\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx$ infinite, portion of kinetic energy total system (1) to (6).

§ 9 – Conclusion

All three examples obey the necessary conditions of divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$), smoothness (C^∞) and partial derivatives of u^0 and f of $C_{\alpha K}$ $(1 + |x|)^{-K}$ and $C_{\alpha m K}$ $(1 + |x| + t)^{-K}$ order, respectively. We conclude that we must have $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$ and $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$. To each possible $u(x,t)$ so that (3) is true, the external force $f(x,t)$ and the pressure $p(x,t)$ can be fittingly constructed, in C^∞ class, verifying (8), and in a way to satisfy all the necessary conditions, finding, this way, a possible solution to (1), (2), (3), (4), (5) and (6), and only (7) wouldn't be satisfied, for $t > 0$, according to (10). We then show examples of breakdown solutions to case (C) of this millennium problem. These examples, however, won't take to case (A) from [1], of existence and smoothness of solutions, because they violate (7) (case (A) also impose a null external force, $f = 0$).

An overview of the problem's conditions is listed below ($:\mathbb{R}^3$ and $:\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ representing the respective functions domains).

$\nu > 0, n = 3$		
$\exists u^0(x): \mathbb{R}^3$		smooth (C^∞), divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$)
$\exists f(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$		smooth (C^∞)
(4)	$\lvert\partial_x^\alpha u^0(x)\rvert \leq C_{\alpha K}(1+\lvert x\rvert)^{-K}: \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha, K$	
(5)	$\lvert\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)\rvert \leq C_{\alpha m K}(1+\lvert x\rvert+t)^{-K}: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, $\forall \alpha, m, K$	
$\nexists (p,u): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ /		
(1)	$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t), 1 \leq i \leq 3\ \ (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$	
(2)	$\nabla \cdot u = 0$	
(3)	$u(x,0) = u^0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$	
(6)	$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$	
(7)	$\int_{\mathbb{R}^3} \lvert u(x,t)\rvert^2 dx < C, \forall t \geq 0$	(bounded energy)

In all three examples the head velocity u we used was of the form

(92) $$u(x,t) = [u^0(x) + w(x)(1-e^{-t})]e^{-t};$$

in example 1, $w(x) = 1$, in example 2, $w(x) = X(\xi)(1,1,0)$, $\xi = x_1 - x_2$, and in example 3, $w(x) = X(\xi)(1,\alpha,\beta)$, $\xi = x_1 + \frac{1}{\alpha}x_2 - 2\frac{1}{\beta}x_3$, $\alpha, \beta\ cst. \neq 0$, examples 2 and 3 with $X(\xi) = [A\ cos(B\xi) + C\ sen(\pm B\xi)]$.

It's important that we also analyze the solution's uniqueness question. As $u^0(x)$ and $f(x,t)$ are given of C^∞ class, chosen by us, and satisfying (4) and (5), i.e., belonging to the Schwartz space, with $\nabla \cdot u^0 = 0$, claim that there is no solution (p,u) to the system (1), (2), (3), (6) and (7) might assume that we explored, or proved to, the infinite possible combinations of p and u, i.e., of (p,u). So we need that exists uniqueness of solution for the velocity that we build, eliminating other possible velocities for the same data used, $u^0(x)$ and $f(x,t)$, and involving in finite total kinetic energy.

The uniqueness of the solution (except due the pressure $p(x,t)$ with constant additional term or time-dependent $\theta(t)$, and other cases of non-uniqueness of pressure on x and $T(t)$) comes from classical results already known, for example described in the mentioned article of Fefferman [1]: the system of Navier-Stokes equations (1), (2), (3) it has unique solution for all $t \geq 0$ or only for a finite time interval $[0, T)$ depending on the initial data, where T is called "*blowup time*". When there is a solution with finite T then the velocity u becomes unbounded near the "*blowup time*".

We see that the existence of each our solution in the given examples are guaranteed by construction and direct substitution. Our velocities has no irregular behavior, any regularity loss, at no time t, in none position, that becomes one unlimited, infinite, even for $t \to \infty$ or $|x| \to \infty$, therefore, there can be no *"blowup time"* in the examples we gave, therefore the solutions found in the previous cases are unique at all times (unless pressure). But even if there were a finite T (in [14], [15] we see that $T > 0$), the uniqueness would exist in at least a small interval of time, which is enough to show that in this time range occurs the breakdown of Navier-Stokes solutions because it was disobeyed the limited kinetic energy condition (7), making the case (C) true.

We must understand that uniqueness is in the main velocity u (equation 1), it is not necessary that is also in secondary velocity v (equations 14, 18 and 83), which as we have seen in the examples 2 and 3 it can have infinite solutions, due to the absence of n nonlinear terms $\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Chosen a velocity v, however, applying in it the external force f (equations 13.4, 17.5, 82.4), results finally in the uniqueness of u (according 13.3, 17.4, 43, 82.3), solution of an equation with all the terms, of its kinetic energy and the corresponding divergence of the total kinetic energy $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2\, dx$ in $t > 0$ due to the term $\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2\, dx \to \infty$. The pressure p, we already know, It is not unique, but this does not change, qualitatively, the fact that the total kinetic energy of the system is infinite or not. This is better understood with examples 1 and 2: v being any constant or time dependent exclusively, or with $x \in \mathbb{R}$ or with $x \in \mathbb{R}^2$, since not identically zero, and whatever the pressure p, null or not, the condition (7) is violated due to integration of $|v|^2$ in the whole space $\mathbb{R}^3$.

§ 10 – Final Comments

It is not difficult to extend the results obtained earlier in the § 5 with the two-dimensional speed to a speed v with three non-zero spatial components, as we saw in section § 8.

In examples 2 and 3 we had to solve an ordinary differential equation to get $X(\xi)$. We will now, however, find a solution non unique for the velocity in the Navier-Stokes equations, but without solving any differential equation aid. You just have to make an integration necessary to obtain pressure. Out of curiosity, the initial speed may be different from zero, as well as the external force, and we are not concerned to seek just endless kinetic energies or velocities belonging to the Schwartz space. We are not looking now a *breakdown solution*, on the contrary, we seek endless (many) *solutions*.

We will solve the system (1), (2), (3) for the special case in which

(93) $$u(x_1, x_2, x_3, t) = X(x_1 + x_2 + x_3)T(t)\,(1, 1, -2) = X(\xi)T(t)J,$$
$$\xi(x) = x_1 + x_2 + x_3,\ J = (1, 1, -2),$$

being worth $\nabla \cdot (\xi J) = 0$. This gives us $\nabla \cdot u = \nabla \cdot u^0 = 0$ and the elimination of non-linear terms $(u \cdot \nabla)u \equiv \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\right)_{1\le i\le 3} = 0$ of the Navier-Stokes equations, with or without external force. So the solution of (1) will be reduced to the solution of one linear partial differential equation, the Heat Equation three-dimensional inhomogeneous,

(94) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} + f_i = \phi_i,\ 1 \le i \le 3,$$

need to be true

(95) $$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i},\ i \ne j.$$

As $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \xi}$, $\forall i$, as well the differential operators $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ and $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2$, $\forall i$, i.e., we have a pressure that may be expressed as a function of ξ, as well as the velocity components u, and the x_i are shown symmetrically and linearly relative to $\xi = x_1 + x_2 + x_3$, with the transformation of infinitesimal element of integration $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \xi}{\partial x_3}dx_3 = dx_1 + dx_2 + dx_3$, equality (95) is true, it is valid $\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$, and we have the following solution to the pressure:

(96) $$p(x,t) - p_0(t) = \int_{\xi_0}^{\xi(x)} \left(\nu \mathrm{T} \nabla^2 X - X\frac{dT}{dt} + f\right) d\xi,$$

with

(97) $$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3},$$

assuming that the force $f(x,t)$ is of the form $Y(\xi)Z(t)(1, 1, -2)$, such as $u(x,t) = X(\xi)T(t)(1, 1, -2)$. Let us consider $p_0(t)$ as the pressure at the instant t

and the surface $\xi = \xi_0$. This solves the system we wanted, since the integration in (96) is possible, and so we do not solve any intermediate ordinary differential equation to find $X(\xi)$, because we can prefix which the expression for $X(\xi)$ we want to use, among infinite possibilities, and such that have $u(x,0) = u^0(x)$.

Other combinations of the components of the vector J may be used, as well as other combinations of the coefficients of x_1, x_2, x_3 in ξ, provided that they eliminate non-linear terms and check it (2) and (95). Thus, more complex forms to ξ are also possible, in addition to linear, which provides a robust way to achieve solutions for u. For example, defining

(98) $$u_i = \alpha_i(x,t)u_1,\ 1 \le i \le n,\ \alpha_1 = 1,$$

the condition to be obeyed by X and ξ in order to eliminate the nonlinear terms is

(99) $$\alpha_i \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0,$$

for all i (natural) in $1 \le i \le n$. For each determined i liminates the nonlinear term of the line (or coordinate) i if (99) is satisfied.

One way to do (99) true is when

(100) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0.$$

When the α_i are constant or time dependent only the condition to be obeyed for ξ is

(101) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0,$$

which is in accordance with examples 2 and 3 above.

Including also the incompressibility condition for u, must be valid also the relation

(102) $$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\alpha_j u_1)}{\partial x_j} &= u_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ &= T(t)[X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j}] = 0.\end{aligned}$$

As (102) must be valid for all t, then we need to be valid

(103) $$X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0.$$

When the α_j are constant or time dependent only, the condition to be obeyed for ξ is equal to the condition (101) previous,

(104) $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0.$

Notice that the function $T(t)$ in (93) must not have singularities in case it is desired that the velocity u is regular, limited in module, notwithstanding, $T(t)$ singular, infinite for one or more values of time t, the function can be considered as a "highlighter" of *blowups*, and so we can build solutions with instants of *blowup* τ_* well determined, to our will, such that $T(\tau_*) \to \infty$.

In the absence of singularities of $T(t)$ and $X(\xi(x))$, however, only wishing regular velocities, it follows that it is possible for a three-dimensional Navier-Stokes equation (generally, n-dimensional) *"well behaved"* have more than one solution for the same initial velocity. To the special form given to the solution $u(x,t)$ in (93), with $T(0) = 0$ or not, for a same initial velocity $u(x,0) = X\big(\xi(x)\big)T(0)J = u^0(x)$, with $J = (1,1,-2)$, can be generated, in principle, infinite different velocities $u(x,t) = X(\xi(x))T(t)J$, for different functions of the position $X(\xi(x))$ and time $T(t)$, solutions that solve the Navier-Stokes equation (1). If the external force is zero, this brings us to the negative answer to 15th problem of Smale [12], as we have seen before thinking only in the non uniqueness of pressure due to the additional term $\theta(t) + q$, where $q \neq 0$ is a constant and $\theta(t)$ an explicit function of time (in the original Smale problem pressure does not vary in time).

In next article the corresponding section § 7 in three dimensions.

Thankful, friend God. For peace between religions and between people.

Dedicated to John Nash. In memoriam.

References

[1] Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf (2000).

[2] Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).

[3] Schwartz, Laurent, *Théorie des Distributions*. Paris: Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts (1966).

[4] Strichartz, Robert, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. Florida: CRC Press Inc. (1994).

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_space (acessed in 01-28-2016).

[6] http://mathworld.wolfram.com/SchwartzSpace.html (acessed in 01-28-2016).

[7] http://www.math.washington.edu/~hart/m526/Lecture3.pdf (01-28-2016).

[8] Gjestland, Frederik Joachim, *Distributions, Schwartz Space and Fractional Sobolev Spaces*, Master's Thesis of Science in Physics and Mathematics, Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, in http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:664088/FULLTEXT01.pdf (2013).

[9] Kinani, Abdellah El, and Oudadess, Mohamed, *Distribution Theory and Applications*. Singapore: World Scientific (2010).

[10] Leray, Jean, *Sur Le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissant L'Espace*, Acta Mathematica, **63**, 193-248 (1934).

[11] Ladyzhenskaya, Olga A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York: Gordon and Breach Science Publishers (1969).

[12] Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998).

[13] Constantin, Peter, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics*, Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, 353-360. Berlin: Springer-Verlag (2001).

[14] Kreiss, Heinz-Otto, and Lorenz, Jens, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. San Diego: Academic Press Inc. (1989).

[15] Leray, Jean, *Aspects de la mécanique théorique des fluides*, La Vie des Sciences **11**, 287-290 (1994). See https://www.tmna.ncu.pl/static/files/v12n2-01.pdf

Three Examples of Unbounded Energy for t > 0

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Temos dons diferentes, de acordo com a graça dada a cada um de nós:
se é a profecia, exerçamo-la em harmonia com a fé;
se é o serviço, pratiquemos o serviço;
se é o dom de ensinar, consagremo-nos ao ensino;
se é o dom de exortar, exortemos.
Quem distribui donativos, faça-o com simplicidade;
quem preside, presida com solicitude;
quem se dedica a obras de misericórdia, faça-o com alegria.
O amor seja sincero. Detestai o mal, apegai-vos ao bem.
(Romanos 12, 6-9)

Abstract – A solution to the 6th millenium problem, respect to breakdown of Navier-Stokes solutions and the bounded energy. We have proved that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $f(x,t)$ such that there is no physically reasonable solution to the Navier-Stokes equations for $t > 0$, which corresponds to the case (C) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute. Three examples are given.

Keywords – Navier-Stokes equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, physically reasonable solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, unbounded energy, millenium problem, uniqueness, non uniqueness, 15th Problem of Smale, blowup time.

§ 1 - Introdução

A segunda maneira que vejo para se provar a quebra de soluções (*breakdown solutions*) das equações de Navier-Stokes, seguindo o descrito em [1], refere-se à condição de energia limitada (*bounded energy*), a finitude da integral do quadrado da velocidade do fluido em todo o espaço.

Podemos certamente construir soluções de

(1) $$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i,\ 1 \le i \le 3,$$

que obedeçam à condição de divergente nulo para a velocidade (equação da continuidade para densidade de massa constante),

(2) $$div\, u \equiv \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$ (fluidos incompressíveis)

e à condição inicial

(3) $\qquad u(x,0) = u^0(x),$

onde u_i, p, f_i são funções da posição $x \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. A constante $\nu \geq 0$ é o coeficiente de viscosidade, p representa a pressão e $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade do fluido, medidas na posição x e tempo t, com $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. A função $f = (f_1, f_2, f_3)$ tem dimensão de aceleração ou força por unidade de massa, mas seguiremos denominando este vetor e suas componentes pelo nome genérico de força, tal como adotado em [1]. É a força externa aplicada ao fluido, por exemplo, gravidade.

As funções $u^0(x)$ e $f(x,t)$ devem obedecer, respectivamente,

(4) $\qquad |\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K}(1 + |x|)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ e $K \in \mathbb{R}$,

e

(5) $\qquad |\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}(1 + |x| + t)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$, $m \in \mathbb{N}_0$ e $K \in \mathbb{R}$,

com $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3, \dots\}$ (derivadas de ordem zero não alteram o valor da função), e uma solução (p, u) de (1) para que seja considerada fisicamente razoável deve ser contínua e ter todas as derivadas, de infinitas ordens, também contínuas (*smooth*), i.e.,

(6) $\qquad p, u \in C^\infty \qquad (\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)).$

Dada uma velocidade inicial u^0 de classe C^∞ com divergente nulo (*divergence-free*, $\nabla \cdot u^0 = 0$) sobre $\mathbb{R}^3$ e um campo de forças externo f também de classe C^∞ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, quer-se, para que uma solução seja fisicamente razoável, além da validade de (6), que $u(x,t)$ não divirja para $|x| \to \infty$ e seja satisfeita a condição de energia limitada (*bounded energy*), i.e.,

(7) $\qquad \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx < C$, para todo $t \geq 0$.

Vemos que todas as condições acima, de (1) a (7), precisam ser obedecidas para se obter uma solução (p, u) considerada fisicamente razoável, contudo, para se obter uma quebra de soluções, (1), (2), (3), (6) ou (7) poderiam não ser satisfeitas para algum $t \geq 0$, em alguma posição $x \in \mathbb{R}^3$, mantendo-se ainda a validade de (4) e (5).

Uma maneira de fazer com que esta situação (*breakdown*) ocorra é quando (1) não tem solução possível para a pressão $p(x,t)$, quando o campo vetorial $\phi: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ em

(8) $$\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + f = \phi$$

é não gradiente, não conservativo, em ao menos um $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$. Nesse caso, para $\phi = (\phi_1, \phi_2\,, \phi_3)$ ser não gradiente deve valer

(9) $$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i},\ i \neq j,$$

para algum par $(i,j), 1 \leq i,j \leq 3$, $x \in \mathbb{R}^3$ e tempo t não negativo (para mais detalhes veja, por exemplo, Apostol[2], cap. 10).

Se admitirmos, entretanto, que (1) tem solução (p,u) possível e esta também obedece (2), (3) e (6), a condição inicial $u^0(x)$ verifica (2) e (4), a força externa $f(x,t)$ verifica (5) e $u^0(x)$ e $f(x,t)$ são de classe C^∞, podemos tentar obter a condição de quebra de soluções em $t \geq 0$ violando-se a condição (7) de energia limitada (*bounded energy*), i.e., escolhendo-se $u^0(x)$ ou $u(x,t)$ que também obedeçam a

(10) $$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx \to \infty, \text{ para algum } t \geq 0.$$

A descrição oficial do problema para este caso (C) de quebra de soluções é dada a seguir:

(C) Quebra das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3$. Para $\nu > 0$ e dimensão espacial $n = 3$ existem um campo vetorial suave e com divergência nula $u^0(x)$ sobre $\mathbb{R}^3$ e uma força externa suave $f(x,t)$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfazendo

(4) $$|\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K}(1 + |x|)^{-K} \text{ sobre } \mathbb{R}^3, \forall \alpha, K,$$

e

(5) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}(1 + |x| + t)^{-K} \text{ sobre } \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \forall \alpha, m, K,$$

tais que não existe solução (p,u) sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfazendo (1), (2), (3), (6) e (7).

Vê-se claramente que podemos resolver este problema buscando velocidades válidas cuja integral do seu quadrado em todo o espaço $\mathbb{R}^3$ é infinito, ou também, conforme indicamos em (8), buscando funções ϕ não gradientes, onde a pressão p não poderá ser considerada uma função potencial, para algum instante $t \geq 0$. Entendemos que os α, m indicados em (4) e (5) só fazem sentido para $|\alpha|, m \in \{0,1,2,3,4,\dots\}$ e os K negativos podem ser desprezados, pois não limitam o valor das funções u^0, f e suas derivadas quando $|x| \to \infty$ ou $t \to \infty$, com $C_{\alpha K}, C_{\alpha m K} > 0$.

§ 2 – O espaço de Schwartz S

A inequação (4) traz implicitamente que $u^0(x)$ deve pertencer ao espaço vetorial das funções de rápido decrescimento, que tendem a zero em $|x| \to \infty$, conhecido como espaço de Schwartz, $S(\mathbb{R}^3)$, em homenagem ao matemático francês Laurent Schwartz (1915-2002) que o estudou [3]. Estas funções e suas infinitas derivadas são contínuas (C^∞) e decaem mais rápido que o inverso de qualquer polinômio, tais que

(11) $$\lim_{|x|\to\infty} |x|^k D^\alpha \varphi(x) = 0$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i inteiro não negativo, e todo inteiro $k \geq 0$. α é um multi-índice, com a convenção

(12) $$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

D^0 é o operador identidade, D^α um operador diferencial. Um exemplo de função deste espaço é $u(x) = P(x)e^{-|x|^2}$, onde $P(x)$ é uma função polinomial.

Valem as seguintes propriedades [4]:

1) $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial; ele é fechado sobre combinações lineares.

2) $S(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra; o produto de funções em $S(\mathbb{R}^n)$ também pertence a $S(\mathbb{R}^n)$.

3) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre multiplicação por polinômios.

4) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre diferenciação.

5) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre translações e multiplicação por exponenciais complexos ($e^{ix\cdot\xi}$).

6) funções de $S(\mathbb{R}^n)$ são integráveis: $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$ para $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Isto segue do fato de que $|f(x)| \leq M(1 + |x|)^{-(n+1)}$ e, usando coordenadas polares, $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-(n+1)} dx = C \int_0^\infty (1 + r)^{-n-1} r^{n-1} dr < \infty$, i.e., o integrando decresce como r^{-2} (e $(1 + r)^{-2}$) no infinito e produz uma integral finita.

Da definição de $S(\mathbb{R}^3)$ e propriedades anteriores vemos que, como $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$, então $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} M(1 + |x|)^{-4} dx \leq C \int_0^\infty (1 + r)^{-2}\, dr < \infty$ e quadrando $|u^0(x)|$ e $M(1 + |x|)^{-4}$ chegamos à desigualdade $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx < \infty$, que contradiz (10).

Outra forma de verificar isso é que o conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo p, $1 \leq p < \infty$ ([5]-[9]), e em particular para $p = 2$ e $n = 3$ segue a finitude de $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx$.

Portanto, se a condição (7) for desobedecida, conforme propomos neste artigo, será para $t > 0$, por exemplo, encontrando alguma função $u(x,t)$ da forma $u^0(x)v(x,t)$, $v(x,0) = 1$, ou $u^0(x) + v(x,t)$, $v(x,0) = 0$, com $\int_{\mathbb{R}^3} |v(x,t)|^2 dx \to \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx \to \infty$.

§ 3 – Exemplo 1

De fato, escolhendo $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f(x,t) \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, obedecendo-se assim (4) e (5), lembrando-se que não precisamos ter $u, p \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ como solução, apenas $u, p \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, então é possível construir uma solução para a velocidade da forma $u(x,t) = u^0(x)e^{-t} + v(t)$, com $v(0) = 0$, tal que $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx \to \infty$, pois, quando $\int_{\mathbb{R}^3} [|u^0(x)|^2 e^{-t} + 2u^0(x) \cdot v(t)] dx \geq 0$, por exemplo, quando cada componente de $u^0(x)$ tem o mesmo sinal da respectiva componente de $v(t)$ ou o produto entre elas é zero ou $\int_{\mathbb{R}^3} u^0(x) \cdot v(t) dx \geq 0$, teremos $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} |v(t)|^2 dx = |v(t)|^2 \int_{\mathbb{R}^3} dx \to \infty$, com $v(t) \neq 0, t > 0$. Também devemos escolher u, u^0 tais que $\nabla \cdot u = \nabla \cdot u^0 = 0$.

Em especial, escolhamos, para $1 \leq i \leq 3$,

(13.1) $$u^0(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}(x_2x_3, x_1x_3, -2x_1x_2),$$

(13.2) $$v_i(t) = w(t) = e^{-t}(1 - e^{-t}),$$

(13.3) $$u_i(x,t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(t),$$

(13.4) $$f_i(x,t) = \left(-u_i^0 + e^{-t} \sum_{j=1}^3 u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - \nu \nabla^2 u_i^0\right) e^{-t},$$

o que resulta para $p(x,t)$, como a única incógnita ainda a determinar,

(14) $$\nabla p + \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

e então

(15) $$p(x,t) = -\frac{dw}{dt}(x_1 + x_2 + x_3) + \theta(t).$$

A pressão obtida tem uma dependência temporal genérica $\theta(t)$, que deve ser de classe $C^\infty([0,\infty))$ e podemos supor limitada, e diverge no infinito ($|x| \to \infty$), mas tenderá a zero em todo o espaço com o aumento do tempo (a menos eventualmente de $\theta(t)$), devido ao fator e^{-t} que aparece na derivada de $w(t)$,

(16) $$\frac{dw}{dt} = e^{-t}(2e^{-t} - 1).$$

Neste exemplo $\int_{\mathbb{R}^3} u^0(x) \cdot v(t) dx = 0$, e assim $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx \to \infty$ para $t > 0$, como queríamos. Mais simples ainda seria escolher $u^0(x) = 0$.

Interessante observarmos que não ocorre nenhuma descontinuidade na velocidade, nem singularidade (divergência: $|u| \to \infty$), entretanto a energia cinética total em todo o espaço diverge, $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \, dx \to \infty$. Tivemos como dados de entrada $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^3), f \in L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, mas por solução $u \notin L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, assim como $p \notin L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$.

§ 4 – Exemplo 2 – Ideia Geral

Outro exemplo interessante, utilizando a mesma velocidade inicial anterior, mas fazendo v depender explicitamente das coordenadas de posição x_1, x_2 nas direções e_1, e_2, além do tempo t, e ser igual a zero na direção e_3, com $v(x,0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, $v \not\equiv 0$ (v não identicamente nulo), e que também obedece a todas as condições de (1) a (6), é, para $1 \le i \le 3$,

(17.1) $$u^0(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}(x_2x_3, x_1x_3, -2x_1x_2),$$

(17.2) $$v(x,t) = e^{-t} w(x,t),$$

(17.3) $$w(x,t) = (w_1(x_1,x_2,t), w_2(x_1,x_2,t), 0),$$
$$w(x,0) = 0,\ \nabla \cdot w = 0,\ w_3 = v_3 = 0,\ w \not\equiv 0,$$

(17.4) $$u_i(x,t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(x,t) = [u_i^0(x) + w_i(x,t)]e^{-t},$$

(17.5) $$f_i(x,t) = \left(-u_i^0 + e^{-t}\sum_{j=1}^3 [u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0 \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right) e^{-t}$$
$$= \left(-u_i^0 + \sum_{j=1}^3 [e^{-t}u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right) e^{-t},$$

o que resulta para $p(x,t)$, como a única incógnita ainda a determinar,

(18) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu\nabla^2 v_i,$$

as equações de Navier-Stokes sem força externa.

Nós sabemos que para $n = 2$ a equação (18) tem solução cuja existência e unicidade já está provada ([10]-[13]), sendo assim, transformemos nosso sistema tridimensional (18) em um sistema bidimensional em v, o que fornecerá como solução uma pressão p e uma velocidade v, *a priori*, com domínio espacialmente bidimensional, i.e., nas variáveis (x_1, x_2, t). Resolvida, por hipótese, a equação (18) acima, com $v(x,0)=0$, $\nabla \cdot v = 0$, mas v não identicamente nula, acrescentemos a terceira coordenada espacial $v_3 \equiv 0$ na solução definitiva para $u(x,t)$, espacialmente tridimensional, em (17.4), e calculemos a força externa em (17.5). Escolhendo $v \in S(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ ou v polinomial, seno, cosseno ou suas somas para ser usada em (18), garantiremos que $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, obedecendo-se (5), com $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$, conforme (4). Fazendo que v seja limitada em módulo (norma no espaço euclidiano) faremos com que u não divirja em $|x| \to \infty$, que é uma condição fisicamente razoável e desejável em [1]. Construamos então uma velocidade v não identicamente nula, com $v(x,0)=0$, $\nabla \cdot v = 0$, tal que seja relativamente simples resolver (18), que seja limitada em módulo, possa (de preferência) tender a zero no infinito em ao menos determinadas situações e se possível ser integrável em $\mathbb{R}^2$, seja de classe C^∞ e satisfaça (5).

A equação (18) admitirá ainda uma dependência temporal genérica para a pressão da forma

(19) $$p(x,t) = p_1(x_1, x_2, t) + \theta(t),\ x \in \mathbb{R}^3,$$

i.e., além da solução convencional p_1 para a pressão do problema bidimensional das equações de Navier-Stokes (18) nas variáveis independentes (x_1, x_2, t), acrescente-se a p uma parcela genérica $\theta(t)$ dependente apenas do tempo e/ou uma constante como a solução definitiva da pressão no problema tridimensional original, conforme já vimos em (15).

A infinitude da energia cinética total, neste segundo exemplo, ocorre devido à integração de uma função bidimensional ($|v|^2$ ou $|w|^2$) não identicamente nula no espaço tridimensional infinito ($\mathbb{R}^3$).

A energia cinética total do problema é, para $v = e^{-t}w$,

(20) $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-2t}|u^0|^2 + 2e^{-t}u^0 \cdot v + |v|^2) dx \\ &= e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^3} (|u^0|^2 + 2u^0 \cdot w + |w|^2) dx.\end{aligned}$$

Embora $\int_{\mathbb{R}^3} (|u^0|^2 + 2u^0 \cdot w) dx$ seja finito, das propriedades das funções pertencentes ao espaço de Schwartz e integráveis (o caso $u^0 = 0$ é elementar), a terceira parcela em (20) divergirá em $\mathbb{R}^3$ para $v, w \not\equiv 0$, ainda que possa convergir e ser finita em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $|v|$ não for identicamente nulo e $t > 0$,

(21) $$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 dx \right) dx_3 = C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \to \infty,$$

donde, para t estritamente positivo e finito,

(22) $$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \to \infty, t > 0, v \not\equiv 0,$$

a violação da condição (7).

§ 5 – Exemplo 2 – Solução Exata

Vamos agora resolver (18) de maneira explícita, primeiramente no domínio $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$. No exemplo 3 seu domínio será $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. Mostraremos que uma solução do tipo

(23) $$v(x_1, x_2, t) = (X(x_1 - x_2)T(t),\ X(x_1 - x_2)T(t)),$$

com uma pressão dada tal que

(24) $$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} = aQ(x_1 - x_2)R(t) + b,$$

a, b constantes, $a \neq 0, Q$ função da diferença das coordenadas espaciais, R função do tempo, Q, R funções não identicamente nulas, resolve (18) e elimina seu termo não linear, e nesse caso se $T(0) = 0$ resolve-se (17) e o sistema (1), (2), (3) original. X e T não identicamente nulas, evidentemente.

Se $v_i = v_j = V$ em (18), teremos para os seus termos não lineares

(25) $$\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} V \frac{\partial V}{\partial x_j} = V \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j}.$$

Fazendo $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0$ em (25) elimina-se então o termo não linear, igualdade que é verdadeira quando a condição necessária de fluídos incompressíveis imposta por nós, $\nabla \cdot v = 0$, é satisfeita, i.e.,

(26) $$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0.$$

Definindo $V(x, t) = X\big(\xi(x)\big)T(t)$, com $x \in \mathbb{R}^n$, então

(27)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} = T(t) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X(\xi(x))}{\partial x_j} = T(t) \sum_{j=1}^{n} X'(\xi) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j} = T(t)X'(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j}.$$

Funções $\xi(x)$ tais que $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j} = 0$ resultarão então em $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0$, conforme (27), a exemplo de $\xi = x_1 - x_2$ em dimensão espacial $n = 2$, tal qual utilizado em (23).

Substituindo (24) em (18), já sem os termos não lineares $\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, e por simplicidade fazendo $a = 1, b = 0$, vem

(28) $$Q(x_1 - x_2)R(t) + \frac{\partial V}{\partial t} = \nu \nabla^2 V,$$

com $V = X(x_1 - x_2)T(t)$. Transformamos assim um sistema de n equações diferenciais parciais não lineares em uma única equação diferencial parcial linear.

Definindo $\xi = x_1 - x_2$, a equação (28) fica

(29) $$Q(\xi)R(t) + X(\xi)\frac{dT}{dt} = \nu T \nabla^2 X(\xi).$$

Queremos obter uma função $T(t)$ tal que $T(0) = 0$, para que em $t = 0$ tenhamos $v(x, 0) = 0$, conforme (23). Escolhamos, por exemplo, dentre infinitas outras possibilidades,

(30) $$T(t) = (1 - e^{-t})e^{-t},$$

função limitada no intervalo $0 \leq T(t) \leq 1,\ t \geq 0$, que vai a zero para $t \to \infty$.

Assim, de (29), com

(31) $$\frac{dT}{dt} = e^{-t}(2e^{-t} - 1),$$

vem

(32) $$Q(\xi)R(t) + X(\xi)e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \nu(1 - e^{-t})e^{-t}\nabla^2 X(\xi).$$

Definindo $Q(\xi) = X(\xi)$ em (32), a fim de separar nossa equação com o tradicional método de separação de variáveis usado na teoria de E.D.P.,

(33) $$[R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1)]X(\xi) = \nu(1 - e^{-t})e^{-t}\nabla^2 X(\xi).$$

A equação diferencial parcial linear (33) pode ser resolvida por algumas alternativas de combinações:

(34) $$\begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm\nu(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

ou

(35) $$\begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nu\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

ou de forma mais geral, com $\nu_1 \cdot \nu_2 = \nu > 0,\ \nu_1, \nu_2 > 0$,

(36) $$\begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm\nu_1(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nu_2\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

A equação diferencial de segunda ordem em X nos sistemas acima, dependendo de qual dos sinais usemos em $\pm$, remete-nos à Equação de Helmholtz (sinal negativo) ou a algum movimento em estado estacionário regido pela Equação de Schrödinger independente do tempo (sinal positivo ou negativo).

Não pretendendo usar nenhuma condição de contorno específica para $X(\xi)$ e que nos faça recorrer às séries e integrais de Fourier, escolhemos aqui o sinal negativo em $\pm$ (a opção deve ser a mesma nas duas equações do sistema), e façamos X ser uma função trigonométrica, soma de seno e cosseno em ξ, i.e.,

(37) $$X(\xi) = A\,cos(B\xi) + C\,sen(D\xi).$$

Com $\xi = x_1 - x_2$ temos

(38) $$\begin{aligned}\nabla^2 X &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)[A\,cos(B\xi) + C\,sen(D\xi)] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[A\,cos(B\xi) + C\,sen(D\xi)] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[A\,cos(B\xi) + C\,sen(D\xi)] \\ &= -2[AB^2\,cos(B\xi) + CD^2\,sen(D\xi)].\end{aligned}$$

De $X(\xi) = -\nu_2 \nabla^2 X(\xi)$ em (36) vem

(39) $$\nu_2 = \frac{1}{2B^2} = \frac{1}{2D^2},\ \nu_1 = 2B^2\nu = 2D^2\nu,\ \ |B| = |D|,$$

quaisquer que sejam os valores de A e C (se $A = C = 0$ ou $B = D = 0$ teremos a solução trivial e indesejada $v(x,t) \equiv 0$).

A solução para $R(t)$ que se obtém é então, usando $\nu_1 = 2B^2\nu$ dado em (39) e o sinal negativo em (36),

(40) $$R(t) = -e^{-t}[2B^2\nu(1 - e^{-t}) + 2e^{-t} - 1],$$

valendo $R(0) = -1$.

De (23), (30) e (37) chega-se, como um caso possível de solução, para $x \in \mathbb{R}^3$ e introduzindo implicitamente a terceira coordenada espacial $v_3 \equiv 0$ em v, a

(41) $$\begin{aligned}v(x,t) &= X(x_1 - x_2)T(t)(1,1,0) \\ &= [A\,cos(B\xi) + C\,sen(\pm B\xi)](1 - e^{-\mathrm{t}})e^{-t}(1,1,0),\end{aligned}$$

que como podemos perceber não é de fato uma solução única para a velocidade, devido às infinitas possibilidades que tivemos para definir a dependência temporal $T(t)$, bem como a dependência espacial $X(\xi)$, $\xi = x_1 - x_2$, além das constantes arbitrárias A, B, C em (41). Mesmo sem unicidade de solução, ela satisfaz aos requisitos que esperávamos: é limitada, contínua de classe C^∞, igual a zero no instante inicial, tende a zero com o aumento do tempo, e tem divergente nulo ($\nabla \cdot v = 0$). Além disso, quando utilizada na expressão (17.5) obtida para a força externa, não retira da força f a condição de pertencer ao espaço de Schwartz em relação ao espaço $\mathbb{R}^3$ e ao tempo, i.e., $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, conforme é possível provar das propriedades de S que vimos na seção § 2 anterior.

A pressão é obtida integrando-se (24) em relação à diferença $\xi = x_1 - x_2$, com $a = 1, b = 0, Q(\xi) = X(\xi)$ e $R(t)$ dado em (40),

(42)
$$\begin{aligned} p(x,t) - p_0(t) &= R(t) \int_{\xi_0}^{\xi} Q(\xi) d\xi \\ &= -e^{-t}[2B^2\nu(1-e^{-t}) + 2e^{-t} - 1]\, S(\xi), \end{aligned}$$
$$S(\xi) = \tfrac{A}{B}[sen(B\xi) - sen(B\xi_0)] \pm \tfrac{A}{B}[cos(\pm B\xi) - cos(\pm B\xi_0)],$$

onde ξ_0 é a superfície $\xi = \xi_0$ e onde a pressão é p_0 no instante t. Novamente vemos que esta solução não é única, não apenas devido exclusivamente à função $p_0(t)$ e respectivo ξ_0, mas também devido às constantes arbitrárias A e B, o sinal $\pm$, além da maneira como $R(t)$ e $Q(\xi)$ foram obtidas, com certa liberdade de possibilidades. $p_0(t)$ substitui a função $\theta(t)$ usada em (15) e (19), nossa função genérica do tempo, ou uma constante, que deve ser de classe $C^\infty([0,\infty))$ e podemos supor limitada.

Completando a solução principal (p,u) que buscamos para a equação (1), temos finalmente

(43)
$$u(x,t) = u^0(x)e^{-t} + v(x,t),$$

com $u^0(x)$ dado em (17.1), $v(x,t)$ em (41) e $f(x,t)$ em (17.5).

A velocidade (secundária) v que escolhemos torna a velocidade (principal) u uma função com algumas propriedades semelhantes a ela: u é limitada oscilante, contém uma soma de seno e cosseno em relação à diferença das coordenadas espaciais, e decai exponencialmente em relação ao tempo, ou seja, não pertence a um espaço de Schwartz em relação à posição, nem é de quadrado integrável (violando assim a inequação (7) em $t > 0$), mas é contínua de classe C^∞ e não diverge quando $|x| \to \infty$. Seu comportamento em relação a $x_1 - x_2$ e a divergência da energia cinética total, obviamente, não retiram de $f(x,t)$ a condição de ser pertencente a $S\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, equivalente à inequação (5), já que esta só depende de $u^0(x)$ e $v(x,t)$. Também temos $v(x,0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, $v \in C^\infty\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, a validade de (1), (2), (3), (4) e (6), $u(x,0) = u^0(x)$, $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$, com $\nabla \cdot u = 0$ e $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, conforme queríamos.

§ 6 – A não unicidade em dimensão espacial $n = 2$

O que há com as provas de unicidade das soluções das equações de Navier-Stokes em dimensão espacial $n = 2$?

Não sendo possível analisar todas as provas existentes, é possível ao menos entender que tais provas não devem levar em consideração a ausência do termo não linear nas Equações de Navier-Stokes, $\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv ((u \cdot \nabla)u)_i, 1 \leq i \leq n$, e foi a esta ausência que recorremos em nosso segundo exemplo.

Semelhantemente a esta causa, também se percebe que diferentes equações do tipo de Navier-Stokes, com ausência de um ou mais termos da respectiva equação completa, e que não obstante tenham a mesma condição inicial $u(x,0) = u^0(x)$, terão provavelmente, no caso geral, diferentes soluções $u(x,t)$ entre elas, e assim não poderá haver unicidade de solução em relação à equação de Navier-Stokes completa, com todos os termos. Se todas apresentassem sempre a mesma e única solução, bastaria para nós resolver somente a mais simples delas, por exemplo, $\nabla p = -\frac{\partial u}{\partial t}$ ou $\nabla p = \nu \nabla^2 u$ (Equação de Poisson se $\nabla p \not\equiv 0$ ou de Laplace se $\nabla p \equiv 0$) ou $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u$ (Equação do Calor com $\nabla p = 0$), todas com $u(x,0) = u^0(x)$, e conferir se a soma dos demais termos faltantes é igual a zero ao aplicar a solução u obtida na equação reduzida. Se sim, a solução da equação reduzida é também solução da equação completa. Importante exemplo desta ausência são as Equações de Euler, que diferem das Equações de Navier-Stokes pela ausência do operador diferencial laplaciano aplicado a u, $\nabla^2 u \equiv \Delta u$, devido ao coeficiente de viscosidade ser nulo, $\nu = 0$.

É fácil provar que as três equações acima, assim como a equação $\nabla p + \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u$, não podem realmente ter uma única solução, dada apenas a condição inicial para a velocidade $u(x,0) = u^0(x)$. Pelo contrário, a forma completa das equações de Navier-Stokes, onde supomos que $\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv ((u \cdot \nabla)u)_i \not\equiv 0$, $1 \leq i \leq n$, tem unicidade de solução para $n = 2$ e em ao menos um pequeno intervalo de tempo não nulo $[0, T]$ para $n = 3$, onde T é conhecido como *blowup time*. Acrescentemos em todas estas equações a condição de incompressibilidade, $\nabla \cdot u = 0$.

Trata-se assim de um interessante problema de Análise Combinatória aplicada à Análise Matemática e Física-Matemática.

§ 7 – Unicidade em dimensão espacial $n = 2$

Verificamos na seção § 5 que o sistema

$$(44) \qquad \begin{cases} \nabla p + \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \nabla^2 v \\ (v \cdot \nabla)v = 0 \\ \nabla \cdot v = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções para a velocidade da forma

(45) $$v(x,t) = X(\xi)T(t)(1,1), \xi = x_1 - x_2,$$

com $T(0) = 0$, não obstante existem as provas conhecidas da unicidade de

(46) $$\begin{cases} \nabla p + \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = \nu \nabla^2 v \\ \nabla \cdot v = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

contradizendo o que obtivemos.

Sem ser necessário nos demorarmos nas provas conhecidas, expondo todos os seus detalhes, repetindo suas passagens, é possível constatar em Leray [10], Ladyzhenskaya [11], Kreiss and Lorenz [14], dentre outros, que as provas de existência e unicidade baseiam-se na forma completa das equações de Navier-Stokes, por exemplo (46), e não em uma forma desmembrada das equações de Navier-Stokes, como (44).

As equações de Navier-Stokes sem força externa com $n = 2$ são (usando $x \equiv x_1$ e $y \equiv x_2$)

(47) $$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_1 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_2 \end{cases}$$

Podemos dispor o sistema acima de forma parecida com um sistema de equações lineares,

(48) $$\begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{cases}$$

e a seguir em forma de uma equação matricial,

(49) $$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Chamando

(50) $$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

(51) $$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$(52)\qquad B=\begin{pmatrix}\nu\nabla^2 u_1-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\\ \nu\nabla^2 u_2-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial t}\end{pmatrix},$$

a solução para U da equação (49), $AU=B$, é

$$(53)\qquad U=A^{-1}B,$$

que para existir e ter solução única deve-se ter

$$(54)\qquad \det A=\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\neq 0,$$

ou seja,

$$(55)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y}\neq\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

regra que também deve ser obedecida para $t=0$ (de novo pode nos levar aos casos (C) e (D) de [1] aplicando-se o método em matriz 3×3, i.e., $n=3$, entretanto, com conveniente escolha de p ou $\partial u/\partial t$ o sistema será possível).

Se usarmos a condição de incompressibilidade $\nabla\cdot u=0$,

$$(56)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=0,$$

i.e.,

$$(57)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}=-\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

transforma-se a condição (55) em

$$(58)\qquad -\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2\neq\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

ou equivalentemente,

$$(59)\qquad -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2\neq\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Como esta condição deve ser válida para todo t, em $t=0$ deve-se obedecer a

$$(60)\qquad -\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x}\right)^2\neq\frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial x}$$

e

(61) $$-\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial y}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial x},$$

usando $u(x,y,0) = u^0(x,y) = (u_1^0(x,y), u_2^0(x,y))$.

Se a velocidade inicial u^0 for tal que sejam desobedecidas (60) ou (61) então ou não haverá solução para o sistema (47) (sistema impossível) ou não haverá uma única solução (sistema indeterminado), tal como na teoria de sistemas lineares.

Definindo

(62) $$U_1 = \begin{pmatrix} \nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

e

(63) $$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix},$$

a solução para u_1, u_2 será

(64) $$u_1 = \frac{\det U_1}{\det A}$$

e

(65) $$u_2 = \frac{\det U_2}{\det A}.$$

Sendo

(66) $$\det U_1 = \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}$$

e

(67) $$\det U_2 = \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

com $\det A$ dado em (54), temos então

(68) $$u_1 = \frac{\det U_1}{\det A} = \frac{\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}}{\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}$$

e

(69) $$u_2 = \frac{\det U_2}{\det A} = \frac{\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x}}{\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}.$$

Usando a equação de incompressibilidade no determinante de A,

(70) $$u_1 = -\frac{\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}}{\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}$$

e

(71) $$u_2 = -\frac{\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x}}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}.$$

É verdade que as soluções (equações) acima são tão ou mais complicadas quanto às equações originais (47), e parece não haver utilidade em resolvê-las.

Mas desta forma complicada se pode chegar com mais certeza à seguinte constatação: as equações de Navier-Stokes (e Euler) têm uma simetria entre as variáveis, tanto as dependentes quanto as independentes. A mesma também pode ser percebida diretamente em (47).

A simetria neste caso de $n = 2$ é

(72.1) $$u_1 \leftrightarrow u_2$$

(72.2) $$x \leftrightarrow y$$

ficando p e t inalterados:

(73.1) $$p \leftrightarrow p$$

(73.2) $$t \leftrightarrow t.$$

Isso sugere, se não resolve completamente, a questão da solução destas equações. Se as equações em si são simétricas em relação a determinadas transformações, então esperamos que suas soluções também o sejam sob estas transformações. O mesmo método pode ser aplicado também para $n \geq 3$, com a regra (por exemplo)

(74.1) $$u_i \mapsto u_{i+1},\ u_{n+1} \equiv u_1,$$

(74.2) $$x_i \mapsto x_{i+1},\ x_{n+1} \equiv x_1,$$

(74.3) $$p \leftrightarrow p,$$

(74.4) $$t \leftrightarrow t.$$

Nesse caso é preciso que a condição inicial $u(x,0) = u^0(x)$ obedeça também a estas simetrias, mas permanece inalterada a condição de incompressibilidade: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} = 0$.

Se fornecemos $u_2(x,y,t)$ como dado de entrada no nosso sistema então podemos concluir que a solução para u_1, supostamente simétrica a u_2 pela regra (72) anterior, seja

(75) $$u_1(x,y,t) = u_2(y,x,t),$$

i.e., trocamos x por y, e vice-versa, na solução dada previamente para u_2 e igualamos a u_1 o resultado desta transformação. Restará obter a pressão p ou então, caso ela também tenha sido dada, verificar se as variáveis u_1, u_2, p realmente satisfazem o sistema original.

A forma geral da solução para a pressão p, que deve satisfazer

(76) $$\nabla p + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu \nabla^2 u,$$

é

(77) $$p - p_0(t) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left[\nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u \right] \cdot dl,$$

onde supomos que na posição $(x,y) = (x_0,y_0)$ e no instante t a pressão é igual a $p_0(t)$. A integração se dá em qualquer caminho entre (x_0,y_0) e (x,y), pois a pressão deve ser uma função potencial do integrando de (77) para que (47) tenha solução.

É de se esperar ainda que p seja simétrica em relação às variáveis x e y, ou seja,

(78) $$p(x,y,t) = p(y,x,t),$$

assim como em 3 dimensões, usando $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$,

(79) $$p(x,y,z,t) = p(y,z,x,t) = p(z,x,y,t).$$

Claro que (74), (75), (78) e (79) admitem implicitamente que temos simetria retangular nas condições iniciais e de contorno do sistema. Uma vez que esta simetria não ocorra, por exemplo, tenhamos outro tipo de simetria, esférica, cilíndrica, ou mesmo simetria nenhuma (caso geral), as igualdades (74), (75), (78) e (79) não têm necessidade de serem satisfeitas. Sendo assim, a solução para o caso em que não há simetria alguma ainda é um problema a resolver, admitindo-se que há ao menos uma solução (quando o sistema é possível; conforme dissemos, pode-se provar que o sistema sempre é possível, por exemplo, com escolha apropriada de p ou $\partial u/\partial t$).

Finalmente então, desenvolvidas as considerações anteriores, nosso exemplo 3, que busca uma solução única para o sistema de Navier-Stokes em $n = 3$, com todos os termos da equação, força externa não nula, e que fornece energia cinética total infinita para o sistema (1) a (6) em $t > 0$, será baseado no exemplo 2, mas precisaremos novamente recorrer à ausência do termo não linear na equação auxiliar com $n = 3$. Uma vez que (18), a Equação de Navier-Stokes sem força externa, tem como condição inicial a velocidade inicial nula, a única velocidade possível para sua solução com todos os termos é também a velocidade nula, devido à unicidade das soluções na forma completa desta equação (abstraindo-se de pressões genéricas constantes e/ou funções do tempo), solução que não nos interessa. Sendo assim, precisaremos novamente que (18) não tenha o termo não linear. A unicidade da solução da equação principal em três dimensões, entretanto, ao menos em pequeno intervalo de tempo, é garantida por esta conter todos os termos (novamente, exceção feita à pressão não única), inclusive a força externa aplicada (que por si depende da solução não única da equação auxiliar com $n = 3$).

§ 8 – Exemplo 3

O terceiro exemplo é uma generalização do exemplo 2, com as componentes de velocidade v_2 e v_3 proporcionais à componente v_1,

(80.1) $$v_1 = X(\xi)T(t),\ \xi = x_1 + \frac{1}{\alpha}x_2 - 2\frac{1}{\beta}x_3,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,$$

(80.2) $$v_2 = \alpha v_1,$$

(80.3) $$v_3 = \beta v_1,$$

α e β constantes não nulas. Também poderíamos usar outras combinações de coeficientes nas variáveis x_i em ξ, desde que $\nabla \cdot (\xi I) = 0$, com $I = (1,1,1)$. No exemplo 2 usamos $\alpha = 1,\ \beta = 0$.

Vamos escolher as componentes da velocidade inicial u^0 com alguma propriedade de simetria. Não é fácil pensar em velocidades não constantes com componentes simétricas u_i^0 e ao mesmo tempo cujo divergente $\nabla \cdot u^0$ seja nulo. As velocidades com simetria cuja i-ésima componente não contém a i-ésima coordenada espacial, para todo i (natural) em $1 \leq i \leq n$, cumprem este requisito: $\frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} = 0$. Alternativamente podemos utilizar a conhecida igualdade vetorial $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$, ou seja, escolher um vetor u^0 que tenha um potencial vetor $\boldsymbol{A}$, i.e., $u^0 = \nabla \times \boldsymbol{A}$. Então escolhamos primeiramente um vetor $\boldsymbol{A}$ que tenha as propriedades de simetria que esperamos.

Seja $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ o potencial vetor que queremos. Fazendo $A_1 = A_2 = A_3 = e^{-r^2}$, com $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, o valor que atribuímos para a velocidade inicial $u^0(x)$ será

(81) $$u^0(x) = rot\,\boldsymbol{A} = 2e^{-r^2}(-x_2 + x_3, -x_3 + x_1, -x_1 + x_2).$$

Seguindo as equações 17 do exemplo 2, façamos agora para $x \in \mathbb{R}^3$,

(82.1) $$v(x,t) = e^{-t} w(x,t),$$

(82.2) $$w(x,t) = \big(w_1(x_1,x_2,x_3,t), w_2(x_1,x_2,x_3,t), w_3(x_1,x_2,x_3,t)\big),$$
$$w(x,0) = 0,\ \nabla \cdot w = 0,\ w \not\equiv 0,$$

(82.3) $$u_i(x,t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(x,t) = [u_i^0(x) + w_i(x,t)]e^{-t},$$

(82.4) $$\begin{aligned} f_i(x,t) &= \left(-u_i^0 + e^{-t}\textstyle\sum_{j=1}^3 [u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0 \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right) e^{-t} \\ &= \left(-u_i^0 + \textstyle\sum_{j=1}^3 [e^{-t} u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right) e^{-t}, \end{aligned}$$

o que resulta para $p(x,t)$ e $v(x,t)$, como incógnitas ainda a determinar,

(83) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial t} + \textstyle\sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu\nabla^2 v_i,$$

as equações de Navier-Stokes sem força externa.

As equações (80) aplicadas em (83) resultam em

(84) $$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \beta\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = \nu\nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + \alpha\frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha v_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \beta\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = \nu\alpha\nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} + \beta\frac{\partial v_1}{\partial t} + \beta v_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \beta\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = \nu\beta\nabla^2 v_1 \end{cases}$$

Como

(85) $$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \beta\frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= T(t)\frac{dX}{d\xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \beta\frac{\partial \xi}{\partial x_3}\right) \\ &= T(t)\frac{dX}{d\xi}(1 + 1 - 2) = 0, \end{aligned}$$

pela definição de ξ que usamos em (80.1), então (84) fica

(86) $$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu\nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + \alpha\frac{\partial v_1}{\partial t} = \alpha\nu\nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} + \beta\frac{\partial v_1}{\partial t} = \beta\nu\nabla^2 v_1 \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$(87)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = \nu\nabla^2 v_1 - \dfrac{\partial v_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = \alpha\left[\nu\nabla^2 v_1 - \dfrac{\partial v_1}{\partial t}\right] = \alpha\dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_3} = \beta\left[\nu\nabla^2 v_1 - \dfrac{\partial v_1}{\partial t}\right] = \beta\dfrac{\partial p}{\partial x_1} \end{cases}$$

Semelhantemente ao que vimos na seção § 5, equação (24), para $a = 1$ e $b = 0$, vamos fazer a pressão ser definida como

$$(88)\qquad \frac{\partial p}{\partial \xi} = Q(\xi)R(t),$$

e a velocidade

$$(89)\qquad v_i = c_i\, X\big(\xi(x)\big)\, T(t),\ \ c_1 = 1, c_2 = \alpha, c_3 = \beta,$$

com ξ definido em (80.1),

$$(90)\qquad \xi = x_1 + \frac{1}{\alpha}x_2 - 2\frac{1}{\beta}x_3,\ \ \alpha \neq 0,\ \ \beta \neq 0.$$

Será suficiente então, além da equação (88) para a pressão, resolvermos uma única equação diferencial parcial linear, envolvendo v_1, ao invés de um sistema de três equações diferenciais parciais não lineares, envolvendo v_1, v_2, v_3.

O desenvolvimento da solução aqui segue os mesmos passos já vistos na seção § 5, equações (29) a (43), sendo a principal mudança a expressão para ξ dada em (90), com o aumento de dimensões e a proporcionalidade entre v_2, v_3 e v_1. Chegamos a

$$(91)\qquad \begin{aligned} v(x,t) &= X\left(x_1 + \frac{1}{\alpha}x_2 - 2\frac{1}{\beta}x_3\right)T(t)(1,\ \alpha,\ \beta) \\ &= [A\,cos(B\xi) + C\,sen(\pm B\xi)](1 - e^{-t})e^{-t}(1,\ \alpha,\ \beta),\ \ \alpha, \beta \neq 0, \end{aligned}$$

mantendo-se válidas as soluções (42) e (43) para a pressão p e velocidade u, respectivamente. Velocidade inicial igual a (81). Também temos a validade de $\nabla \cdot v = 0$ e a correspondente integral $\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx$ infinita, parcela da energia cinética total do sistema (1) a (6).

§ 9 – Conclusão

Todos os três exemplos obedecem às condições de divergência nula (*divergence-free*, $\nabla \cdot u^0 = 0$), suavidade (*smoothness*, C^∞) e derivadas parciais de u^0 e f da ordem de $C_{\alpha K}\,(1 + |x|)^{-K}$ e $C_{\alpha m K}\,(1 + |x| + t)^{-K}$, respectivamente. Concluímos que deve ser $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$. Para cada $u(x,t)$ possível tal que (3) seja verdadeira, a força externa $f(x,t)$ e a pressão $p(x,t)$ podem ser convenientemente construídas, na classe C^∞, verificando (8), e de modo a satisfazerem todas as condições necessárias, encontrando-se assim uma solução possível para (1), (2), (3), (4), (5) e (6), e apenas (7) não seria satisfeita, para $t > 0$, conforme (10). Mostramos então exemplos de quebra de soluções para o caso (C) deste problema do milênio. Estes exemplos, entretanto, não levam ao caso (A) de [1], de existência e suavidade das soluções, justamente por violarem (7) (O caso (A) também impõe que seja nula a força externa, $f = 0$).

Um resumo das condições do problema está listado abaixo ($: \mathbb{R}^3$ e $: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ representam o domínio das respectivas funções).

$\nu > 0, n = 3$		
$\exists u^0(x): \mathbb{R}^3$		smooth (C^∞), divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$)
$\exists f(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$		smooth (C^∞)
(4)	$\lvert\partial_x^\alpha u^0(x)\rvert \leq C_{\alpha K}(1+\lvert x\rvert)^{-K}: \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha, K$	
(5)	$\lvert\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)\rvert \leq C_{\alpha m K}(1+\lvert x\rvert+t)^{-K}: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\ , \forall \alpha, m, K$	
$\nexists (p,u): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ /		
(1)	$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t), 1 \leq i \leq 3\ \ (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$	
(2)	$\nabla \cdot u = 0$	
(3)	$u(x,0) = u^0(x)$	$(x \in \mathbb{R}^3)$
(6)	$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$	
(7)	$\int_{\mathbb{R}^3} \lvert u(x,t)\rvert^2 dx < C, \forall t \geq 0$	(bounded energy)

Em todos os três exemplos a velocidade principal u que utilizamos foi da forma

(92) $$u(x,t) = [u^0(x) + w(x)(1-e^{-t})]e^{-t};$$

no exemplo 1, $w(x) = 1$, no exemplo 2, $w(x) = X(\xi)(1,1,0)$, $\xi = x_1 - x_2$, e no exemplo 3, $w(x) = X(\xi)(1,\alpha,\beta)$, $\xi = x_1 + \frac{1}{\alpha}x_2 - 2\frac{1}{\beta}x_3$, $\alpha, \beta\ cte. \neq 0$, exemplos 2 e 3 com $X(\xi) = [A\ cos(B\xi) + C\ sen(\pm B\xi)]$.

É importante analisarmos também a questão da unicidade das soluções. Como $u^0(x)$ e $f(x,t)$ são dados, escolhidos por nós, de classe C^∞ e satisfazendo (4) e (5), i.e., pertencentes ao espaço de Schwartz, com $\nabla \cdot u^0 = 0$, afirmar que não existe solução (p,u) para o sistema (1), (2), (3), (6) e (7) pode pressupor que exploramos, ou provamos para, as infinitas combinações possíveis de p e de u, i.e., de (p,u). Sendo assim, precisamos que haja unicidade de solução para cada velocidade que construímos, o que elimina outras velocidades possíveis para os mesmos dados utilizados, $u^0(x)$ e $f(x,t)$, e que implicassem em energia cinética total finita.

A unicidade da solução (a menos da pressão $p(x,t)$ com o termo adicional constante ou dependente do tempo $\theta(t)$, além de outros casos de não unicidade da pressão sobre x e $T(t)$) vem dos resultados clássicos já conhecidos, descritos por exemplo no mencionado artigo de Fefferman [1]: o sistema das equações de Navier-Stokes (1), (2), (3) tem solução única para todo $t \geq 0$ ou apenas para um intervalo de tempo $[0,T)$ finito dependente dos dados iniciais, onde T é chamado de "*blowup time*". Quando há uma solução com T finito então a velocidade u torna-se ilimitada próxima do "*blowup time*".

Vemos que a existência de cada solução nossa, nos exemplos dados, está garantida por construção e substituição direta. Nossas velocidades não apresentam nenhum comportamento irregular, em instante t algum, em posição alguma, que as tornem ilimitadas, infinitas, nem mesmo para $t \to \infty$ ou $|x| \to \infty$, sendo assim, não pode haver o "*blowup time*" nos exemplos que demos, portanto cada solução encontrada nos casos anteriores é única em todo tempo (a menos da pressão). Mas ainda que houvesse um T finito (em [14], [15] vemos que $T > 0$), a unicidade existiria em pelo menos um pequeno intervalo de tempo, o que já é suficiente para mostrar que neste intervalo ocorre a quebra das soluções de Navier-Stokes por ser desobedecida a condição de energia cinética limitada (7), tornando o caso (C) verdadeiro.

Entendamos que a unicidade está na velocidade principal u (equação 1), não sendo preciso que esteja também na velocidade secundária v (equações 14, 18 e 83), que conforme vimos nos exemplos 2 e 3 pode ter infinitas soluções, devido à ausência dos n termos não lineares $\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Escolhida uma velocidade v, entretanto, aplicando-a na força externa f (equações 13.4, 17.5, 82.4), resulta enfim na unicidade de u (conforme 13.3, 17.4, 43, 82.3), solução de uma equação com todos os termos, de sua energia cinética, e na correspondente divergência da energia cinética total $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2\, dx$ em $t > 0$ devido ao termo $\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2\, dx \to \infty$. A pressão p, já sabemos, não é única, mas esta não altera, qualitativamente, o fato da energia cinética total do sistema ser infinita ou não. Isto é mais fácil de perceber com os exemplos 1 e 2: fosse v qualquer função constante, ou dependente exclusivamente do tempo, ou com $x \in \mathbb{R}$ ou com $x \in \mathbb{R}^2$, desde que não identicamente nula, e qualquer que fosse a pressão p, nula ou não, a condição (7) seria violada, devido à integração de $|v|^2$ em todo o espaço $\mathbb{R}^3$.

§ 10 – Comentários Finais

Não é difícil estender o resultado obtido anteriormente na seção § 5 com a velocidade bidimensional para uma velocidade v com três componentes espaciais não nulas, conforme vimos na seção § 8.

Nos exemplos 2 e 3 tivemos que resolver uma equação diferencial ordinária para obter $X(\xi)$. Vamos agora, entretanto, achar uma solução não única para a velocidade nas Equações de Navier-Stokes, mas sem precisar resolver nenhuma equação diferencial auxiliar. Só será preciso efetuar uma integração, necessária à obtenção da pressão. A título de curiosidade, a velocidade inicial poderá ser diferente de zero, assim como a força externa aplicada, e não estaremos preocupados em buscar apenas energias cinéticas infinitas ou velocidades pertencentes ao espaço de Schwartz. Não estamos buscando agora uma *breakdown solution*, pelo contrário, buscamos infinitas *solutions*.

Vamos resolver o sistema (1), (2), (3) para o caso especial em que

(93) $$u(x_1, x_2, x_3, t) = X(x_1 + x_2 + x_3)T(t)\,(1,1,-2) = X(\xi)T(t)J,$$
$$\xi(x) = x_1 + x_2 + x_3,\ J = (1,1,-2),$$

valendo $\nabla \cdot (\xi J) = 0$. Isso nos dá $\nabla \cdot u = \nabla \cdot u^0 = 0$ e a eliminação dos termos não lineares $(u \cdot \nabla)u \equiv \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\right)_{1\le i\le 3} = 0$ das Equações de Navier-Stokes, com ou sem força externa. Assim a solução de (1) será reduzida à solução de uma equação diferencial parcial linear, a Equação do Calor não homogênea tridimensional,

(94) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} + f_i = \phi_i,\ 1 \le i \le 3,$$

devendo valer

(95) $$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i},\ i \ne j.$$

Como $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \xi}$, $\forall i$, assim como os operadores diferenciais $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2$, $\forall i$, i.e., temos uma pressão que pode ser expressa como função de ξ, assim como as componentes da velocidade u, e os x_i apresentam-se de forma simétrica e linear em relação a $\xi = x_1 + x_2 + x_3$, com a transformação do elemento infinitesimal de integração $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi}{\partial x_3} dx_3 = dx_1 + dx_2 + dx_3$, a igualdade (95) é verdadeira, é válido $\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$, e teremos a seguinte solução para a pressão:

(96) $$p(x,t) - p_0(t) = \int_{\xi_0}^{\xi(x)} \left(\nu \mathrm{T} \nabla^2 X - X \frac{dT}{dt} + f\right) d\xi,$$

com

(97) $$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3},$$

supondo que a força $f(x,t)$ seja da forma $Y(\xi)Z(t)(1,1,-2)$, tal qual $u(x,t) = X(\xi)T(t)(1,1,-2)$. Consideremos $p_0(t)$ como a pressão no instante t e na superfície $\xi = \xi_0$. Isto resolve o sistema que pretendíamos, desde que a integração em (96) seja possível, e assim não precisamos resolver nenhuma equação diferencial ordinária intermediária para encontrarmos $X(\xi)$, pois podemos prefixar qual a expressão para $X(\xi)$ que desejamos utilizar, dentre infinitas possibilidades, e tal que tenhamos $u(x,0) = u^0(x)$.

Outras combinações das componentes do vetor J podem ser usadas, assim como outras combinações dos coeficientes dos x_1, x_2, x_3 em ξ, desde que eliminem-se os termos não lineares e verifique-se (2) e (95). Assim sendo, formas mais complicadas para ξ também são possíveis, além das lineares, o que traz uma robusta maneira de se obter as soluções para u. Por exemplo, definindo-se

(98) $$u_i = \alpha_i(x,t)u_1,\ 1 \le i \le n,\ \alpha_1 = 1,$$

a condição a ser obedecida por X e ξ a fim de se eliminar os termos não lineares é

(99) $$\alpha_i \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0,$$

para todo i (natural) em $1 \le i \le n$. Para cada determinado i elimina-se o termo não linear da respectiva linha (ou coordenada) i se (99) for satisfeita.

Uma maneira de fazer (99) ser verdadeira é quando

(100) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0.$$

Quando os α_i são constantes ou dependentes apenas do tempo a condição a ser obedecida para ξ é

(101) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0,$$

o que está de acordo com os exemplos 2 e 3 anteriores.

Incluindo-se ainda a condição de incompressibilidade para u, deve ser válida também a relação

(102) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\alpha_j u_1)}{\partial x_j} = u_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}$$
$$= T(t)[X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j}] = 0.$$

Como (102) deve ser válida para todo t, então precisamos que seja

(103) $$X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0.$$

Quando os α_j são constantes ou dependentes apenas do tempo a condição a ser obedecida para ξ é igual à condição (101) anterior,

(104) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0.$$

Observemos que a função $T(t)$ em (93) não deve ter singularidades no caso de se desejar que a velocidade u seja regular, limitada em módulo, não obstante, $T(t)$ singular, infinita para um ou mais valores do tempo t, pode ser considerada como um "marcador" de *blowups*, e assim podemos construir soluções com instantes de *blowup* τ_* bem determinados, à nossa vontade, tais que $T(\tau_*) \to \infty$.

Na ausência de singularidades de $T(t)$ e $X(\xi(x))$, entretanto, desejando apenas velocidades regulares, conclui-se que é possível a uma equação de Navier-Stokes tridimensional (em geral, n-dimensional) *"bem comportada"* ter mais de uma solução para a mesma velocidade inicial. Da especial forma dada à solução $u(x,t)$ em (93), com $T(0) = 0$ ou não, para uma mesma velocidade inicial $u(x,0) = X\big(\xi(x)\big)T(0)J = u^0(x)$, com $J = (1,1,-2)$, é possível gerar, em princípio, infinitas velocidades diferentes $u(x,t) = X(\xi(x))T(t)J$, para diferentes funções da posição $X(\xi(x))$ e do tempo $T(t)$, que resolvem a equação de Navier-Stokes (1). Se a força externa é zero, isso nos remete à resposta negativa ao 15º problema de Smale [12], como já havíamos visto anteriormente pensando apenas na não unicidade da pressão devido ao termo adicional $\theta(t) + q$, onde $q \neq 0$ é uma constante e $\theta(t)$ uma função explícita do tempo (no problema original de Smale a pressão não varia no tempo).

Em próximo artigo o correspondente à seção § 7 em três dimensões.

Grato, amigo Deus. Pela paz entre as religiões, e entre as pessoas.

Dedicado à memória de John Nash.

Referências

[1] Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf (2000).

[2] Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).

[3] Schwartz, Laurent, *Théorie des Distributions*. Paris: Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts (1966).

[4] Strichartz, Robert, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. Florida: CRC Press Inc. (1994).

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_space (acessed in 01-28-2016).

[6] http://mathworld.wolfram.com/SchwartzSpace.html (acessed in 01-28-2016).

[7] http://www.math.washington.edu/~hart/m526/Lecture3.pdf (01-28-2016).

[8] Gjestland, Frederik Joachim, *Distributions, Schwartz Space and Fractional Sobolev Spaces*, Master's Thesis of Science in Physics and Mathematics, Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, in http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:664088/FULLTEXT01.pdf (2013).

[9] Kinani, Abdellah El, and Oudadess, Mohamed, *Distribution Theory and Applications*. Singapore: World Scientific (2010).

[10] Leray, Jean, *Sur Le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissant L'Espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934).

[11] Ladyzhenskaya, Olga A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York: Gordon and Breach Science Publishers (1969).

[12] Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998).

[13] Constantin, Peter, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics*, Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, 353-360. Berlin: Springer-Verlag (2001).

[14] Kreiss, Heinz-Otto, and Lorenz, Jens, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. San Diego: Academic Press Inc. (1989).

[15] Leray, Jean, *Aspects de la mécanique théorique des fluides*, La Vie des Sciences **11**, 287-290 (1994). See https://www.tmna.ncu.pl/static/files/v12n2-01.pdf