Uso de las Preferencias Políticas para Inducir una Topología en un Conjunto de Votantes☆

Ivan Guzman Aybar[1]

Abstract

Estas breves notas exploran un método para inducir una topología en un conjunto de votantes a partir de las preferencias de políticas públicas de los mismos. Asimismo, se evalúan algunas características básicas de este espacio topológico y sus conexiones con la teoría clásica de elección pública.

Keywords: topología, teoría de elección pública, teoría del votante mediano

1. Reseña de la Teoría del Votante Mediano

El Teorema del Votante Mediano es uno de los resultados más conocidos en la teoría económica de las decisiones políticas. Aunque su origen se remonta a la teoría clásica de la competencia en mercado oligópolicos, la misma fue formalizada por el economista Duncan Black durante la decada de 1940 [1]. Este teorema tiene dos resultados fundamentales que se pueden resumir de la siguiente manera.

1. En un sistema de decisión mayoritaria, en cualquier votación la decision adoptada será aquella que represente las preferencias del "votante mediano".

2. Como corolario del resultado anterior los partidos del sistema político diseñarán sus plataformas programáticas alrededor de las preferencias del votante mediano.

☆Agosto 2016
[1]Email:ivanguzman08@gmail.com

Para enteder mejor la intuición detrás de este resultado, es necesario explicar un poco los supuestos detrás de este modelo. En primer lugar, los votantes deben decidir entre distintas alternativas de políticas públicas que se distribuyen continua y uniformemente sobre una línea recta; por ejemplo, estos deben decidir cual es la tasa de impuesto sobre la renta, es decir deben elegir un valor sobre el segmento de línea recta $[0, 1]$. Por otro lado, las preferencias de los votantes varían de manera continua a lo largo de la línea recta, alcanzado un máximo (el cual es único) en un punto de la misma.

La conclusión es que la propuesta x_m elegida será aquella que divide las preferencias del electorado en dos partes iguales, una mitad que prefiere valores $x \leq x_m$ y otra mitad que prefiere valores $x \geq x_m$. De ahí el nombre de votante mediano. Este modelo predice que los partidos exitosos formularán sus propuestas alrededor de este valor x_m, con lo cual el sistema político tenderá hacia la moderación.

Con posterioridad, el modelo del votante mediano ha sido superado con la inclusión aspectos que facilitan la aplicación del mismo a situaciones más complejas. Uno de los pensadores más influyentes en este sentido es Anthony Downs, quien desarrolló un modelo que explicaba como la distribución de las preferencias de los votantes afectaba la configuración del sistema de partidos [2]. En parte estas notas están inspiradas en esa visión de Downs.

A pesar de su popularidad, este modelo tiene varias limitaciones, la mayoría de las cuales tienen que ver con su relevancia empírica (la más recurrida es que el tipo de decisiones con que se enfrentan los votantes por lo general es mucho más compleja de lo que plantea el modelo). En esta nota exploraremos como el conjunto de votantes de un sistema político puede ser representado en términos topológicos y como la validez de los resultados clásicos se ve afectada por la misma.

2. El Espacio de Votantes

En primer lugar introduciremos algunas definiciones y terminología.

Denotaremos X el conjunto de personas hábiles para participar en un determinado proceso electoral.

Sea P El conjunto de opciones de política posibles sobre la cual los electores emitirán su voto. Asumamos que existe una métrica d en el conjunto P, de tal forma que el par (P, d) constituye un espacio métrico completo.

Para cada elector $x \in X$ existe un subcojunto de P que este considera admisible, es decir, que el votante no descartaría votar por un candidato cuya propuesta incluya un elemento de este subconjunto (volviendo al caso de la tasa de impuesto, podríamos pensar en una persona de altos ingresos que solo aceptaría un valor menor a 70%, considerando cualquier valor superior inadmisible). Para cada $x \in X$ denominaremos este conjunto de valores admisibles P_x. En lo adelante asumiremos que P_x es cerrado en P para cada $x \in X$.

Un **partido** es un conjunto de electores $\mathcal{C} \subset X$ tal que:

$$\bigcap_{x \in \mathcal{C}} P_x \neq \emptyset \tag{1}$$

Esta definición amerita dos observaciones. En primer lugar, notemos que un partido puede estar compuesto de un sólo votante. Cada votante por defecto pertenece al menos a un partido: el partido compuesto por sí mismo. Denominaremos **partidos triviales** a aquellos que solo tienen un miembro.

De igual modo, un votante puede pertenecer a varios partidos, esto porque en nuestra definición la pertenencia a un partido no depende de una decisión explícita del votante, sino que es una consecuencia de la estructura de las preferencias políticas del mismo en relación con las del resto de los votantes.

Ahora podemos usar los conjuntos de políticas admisibles P_x para definir una topología en X. Para esto haremos uso de la distancia de Hausdorff. Recordemos que dados dos conjuntos A, B en un espacio métrico (Y, d), la distancia de Hausdorff (denotada d_H) entre A y B viene dada por

$$d_H\,(A\,,\,B)\;=\;\max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b),\,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\right\} \tag{2}$$

Observación: Es un hecho bien establecido que d_H define una pseudométrica en el conjunto de subconjuntos de un espacio métrico [3].

Ahora, para dos elementos $x, y \in X$ podemos definir $d(x,y) := d_H(P_x, P_y)$. Es decir, la distancia entre dos votantes viene dada por la distancia de Hausdorff entre sus conjuntos de políticas admisibles. Por la observación anterior (X,d) es un espacio pseudométrico. Esta topología no distingue entre votantes cuyos conjuntos admisibles tengan la misma clausura. Como estamos asumiendo que los conjuntos admisibles son cerrados en P, lo anterior equivale a decir que esta topología no distingue entre votantes con conjuntos admisibles iguales.

Como esta topología es inducida por una pseudometrica, el espacio X es normal. Aunque del párrafo previo se desprende que el mismo no es Hausdorff. En todo caso, es posible construir un espacio de Haussdorf tomando el espacio cociente formado por las clases de equivalencia: $x \sim y \Longleftrightarrow \overline{P_x} = \overline{P_y}$, siendo $\overline{P_x}$ la clausura de P_x en (P,d).

A lo largo de estas notas, cuando hablemos de partidos asumiremos que los mismos son conjuntos cerrados en la topología que hemos definido en X.

Un partido $\mathcal{A}$ es ***maximal*** si no existe un conjunto B tal que $\mathcal{A} \subset B$ y

$$\bigcap_{x \in B} P_x \neq \emptyset$$

Notemos que los partidos maximales son cerrados en X. Este hecho es una consecuencia de que estamos asumiendo que los conjuntos de políticas admisibles son cerrados en P y de que P es un espacio completo.

Recordemos que de acuerdo a nuestra definición un votante puede pertenecer a varios partidos a la vez. Esto nos lleva a la siguiente

Definición: Una coalición es un conjunto de partidos que acuerdan impulsar de manera conjunta un programa de políticas. Una coalición entre dos partidos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es factible si

$$\mathcal{A} \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset. \tag{3}$$

Es decir, para que una coalición entre dos partidos sea factible, deben compartir al menos un votante.

3. Algunas Consideraciones Sobre Espacios Disconexos

A continuación examinaremos que ocurre cuando partidos grandes en un sistema como el descrito son disconexos entre sí. En primer lugar, dados dos partidos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, decimos que un votante x es ***bisagra*** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = x$. Es decir, la intersección entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ consiste sólo de x. En otras palabras, un votante bisagra es aquel que hace factible una coalición entre dos partidos disconexos entre sí. Aunque distinto del concepto clásico de votante bisagra (ver por ejemplo [4]), este guarda cierta relación con el mismo.

Por supuesto que una coalición soportada en un solo votante no es más que una abstracción matemática. Sin embargo el punto de esta discusión es estudiar la relación entre lo que hemos denominado *votante bisagra* y el concepto clásico de *votante mediano*.

Supongamos que tenemos un espacio de votantes con solo dos partidos maximales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que son del mismo tamaño; supongamos también que existe un votante x que es bisagra para $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Bajo los supuestos de la teoría del votante mediano relativos a la dimension del espacio de preferencias y a las características de las funciones de utilidad, nuestro votante bisagra juega el rol del votante mediano y las políticas implementadas girarán en torno a las preferencias del mismo. En este caso tendremos que las posiciones moderadas se impondrán sobre las extremas.

Si modificamos un poco el escenario anterior para prescindir de la presencia del votante bisagra, el resultado del proceso de votación puede cambiar significativamente. Siendo que el votante bisagra no es más que una construcción que nos permite expresar que dos partidos no se encuentran muy *distantes* uno del otro, la ausencia del mismo puede ser un indicador de que la adopción de posiciones moderadas no necesariamente representaría una estrategia ganadora. Volviendo a la comparación con la teoría del votante mediano, este escenario es análogo al caso en el cual la distribución de los votantes alrededor de las opciónes de política es bimodal [2], con lo cual el votante mediano deja de cumplir su rol pivotal.

Regresando a nuestros dos partidos disconexos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, supongamos que podemos encontrar partidos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que:

$$\mathcal{A} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \right) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{B} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \right) \neq \emptyset, \tag{4}$$

sea $k = \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)$, supongamos también que no existe un conjunto de partidos $D_1, D_2, \ldots, D_m$ que cumpla con la condicion 4 y tal que $l < k$, siendo $l = \operatorname{card}\left(\bigcup_{j=1}^{m} D_j\right)$, entonces diremos que existen k grados de separación entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Por supuesto, en el caso particular en que existe un votante bisagra, existe 1 grado de separación. En caso de que no exista un conjunto de partidos que cumpla con 4 el número de grados de separación es indeterminado.

El concepto de grados de separación nos permite explorar que tan fraccionada se encuentran las preferencias políticas de los votantes. En casi todos los sistemas políticos existen partidos desconectados de las preferencias mayoritarias de los votantes. Pero por lo general estos componentes no conexos son minoritarios, no siendo determinantes en el desarrollo del proceso politico.

Una situación más interesante se da cuando los dos partidos más grandes del sistema son disconexos entre sí. Una de las propiedades fundamentales de las componentes conexas en un espacio topológico normal es que pueden ser separadas por funciones continuas. Este resultado clásico es conocido como Lema de Urysohn, el cual establece que un espacio topológico X es normal sí y solo sí para cualquier par de conjuntos cerrados disjuntos A y B existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$, $x \in A$, y $f(x) = 0$, $x \in B$. Es decir,metafóricamente hablando dos conjuntos cerrados disjuntos en un espacio normal son casi universos separados.

Una de las consecuencias del hecho de que dos partidos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean disconexos es que la información que tengamos acerca de uno no necesariamente nos va a permitir hacer inferencias en relación al otro. Supongamos por ejemplo que tenemos una función continua $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ que caracteriza alguna propiedad de los miembros de este partido. El Teorema de Extensión de Tietze nos dice que existe una función F que extiende f a todo X de tal forma que si f es acotada esta cota es preservada por F. Sin embargo, esta extensión no es única y el hecho de que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean disconexos nos indica (vía el Lema de Urysohn) que independientemente de cuales sean los valores de f en $\mathcal{A}$, siempre podemos encontrar una extensión continua de esta función que sea idénticamente 0 en $\mathcal{B}$. Recíprocamente, para cualquier función continua $H : X \to \mathbb{R}$, existe una una función continua h, tal que $h(x) = 0$, $x \in \mathcal{B}$ y $h(x) = H(x)$, $x \in \mathcal{A}$.

Como vemos, la desconexión entre dos partidos puede ser un indicador de la dificultad que implicaría tratar de explicar las preferencias y comportamiento de los miembros de un partido en función de lo que ocurra con los miembros del otro partido.

4. Conclusión

Uno de los resultados clásicos de la teoría de elección pública establece que las posiciones moderadas tienden a imponerse en los procesos políticos democráticos. Sin embargo, en ocasiones vemos sociedades con sistemas políticos altamente polarizados en los cuales se hace difícil alcanzar consensos. En estas notas hemos planteamos como, a travées de las preferencias de los votantes, podemos describir esta situación en términos topológicos.

La estructura topológica inducida en el conjunto de votantes reflejará la tendencia a la moderación o la polarización de las organizaciones políticas más importantes. El que las programas políticos se formulen en torno a posiciones extremas tiene una expresión en términos de ciertas propiedades de este espacio. Esta construcción no solo es compatible con los resultados clásicos de la teoría de elección pública, también abre la posibilidad de que algunos de los mismos puedan ser generalizados.

Referencias

[1] Duncan Black. On the rationale of group decision-making. *Journal of Political Economy*, 56, no. 1 pages 23-34, 1948.

[2] Anthon Downs. An economic theory of political action in a democracy. *Journal of Political Economy*, 65, no. 2 pages 135-150, 1957.

[3] James R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, Inc, 2000.

[4] Edmund S. Phelps. *Economía Política: Un Texto Intermedio.* Antoni Bosch editor, 1986.