Laplacien complexe
(lié à une structure complexe)

A.Balan

4 juillet 2017

Résumé

Un Laplacien complexe est défini à partir d'une métrique et d'une structure presque-complexe.

1 Définition

Définition 1 *Soit une variété riemannienne* (M^{2n},g) *[GHL] munie d'une structure presque-complexe quelconque* J*. Le Laplacien complexe correspondant est :*

$$\Delta_J = -\sum_{i=1}^{2n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} + \nabla_{Je_i}\nabla_{Je_i} + \nabla_{J[e_i,Je_i]}$$

avec (e_i)*, une base orthogonale et* $J, (J^2 = -1)$*, une structure presque-complexe.*

La définition est valide car l'expression est tensorielle en les e_i et ne dépend donc pas du choix de la base orthogonale.

2 Propriétés

Le Laplacien complexe est elliptique.

Théorème 1 *:*
Δ_J *est un opérateur elliptique.*

Démonstration :
En effet, l'opérateur a pour symbole principal la métrique.
□

On peut étudier la racine carrée de cet opérateur (opérateur de Dirac) dans un cadre kaehlérien ou autre [F].

On peut aussi étudier l'équation de la chaleur et son développement.

Références

[F] T.Friedrich, “Dirac operators in Riemannian Geometry”, Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.

[GHL] S.Gallot, D.Hulin, J.Lafontaine, “Riemannian Geometry”, Springer, 2004.