Les nombres P-aliques

A.Balan

11 août 2017

Résumé

Les nombres P-aliques sont définis aux moyen des polynômes à coefficients entiers.

1 Les entiers P-aliques

On considère l'anneau des entiers relatifs $\mathbf{Z}$ et les polynômes à coefficients entiers $\mathbf{Z}[X]$. Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme irréductible.

Définition 1 *On considère la limite projective :*

$$\mathbf{Z}_P = \lim_{\longleftarrow} \mathbf{Z}/(P^n)$$

Cette limite constitue les entiers P-aliques $\mathbf{Z}_P$.

2 Les nombres P-aliques

L'anneau des entiers P-aliques est un anneau intègre dans mesure où le produit de deux polynômes n'est pas infiniment divisible. On considère le corps des fractions de cet anneau.

Définition 2 *On définit :*

$$\mathbf{Q}_P = Frac(\mathbf{Z}_P)$$

3 La valuation P-alique

3.1 Une suite exacte

Proposition 1 *La suite suivante est exacte :*

$$0 \to \mathbf{Z}_P \to^n \mathbf{Z}_P \to \mathbf{Z}/(P^n) \to 0$$

où $\to^n$ *est la multiplication par* P^n.

Pour qu'un élément soit inversible il faut et il suffit qu'il ne soit pas divisible par P.

3.2 Définition

On munit $\mathbf{Z}_P$ d'une valuation.

Définition 3 *On écrit un élément sous la forme $Q = P^n U$, avec U inversible. La valuation est alors :*

$$v_P(Q) = n$$

4 Une formule

On a la formule suivante pour un polynôme de $N \in \mathbf{Z}[X]$:

$$N = \prod_{P \in \mathbf{Z}[X]\ Pirr} P^{v_P(N)}$$

Le produit étant fini.

Références

[S] J.-P. Serre, "Cours d'arithmétique", PUF, 1970.