Una Formulación Relacional de la Mecánica Clásica

Alfonso A. Blato

(2019) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta una formulación relacional de la mecánica clásica que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

La formulación relacional de la mecánica clásica que este trabajo presenta se desarrolla a partir de una nueva fuerza de interacción, denominada fuerza cinética.

La fuerza cinética $\mathbf{K}_{ij}$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por otra partícula j de masa m_j, causada por la interacción entre la partícula i y la partícula j, está dada por:

$$\mathbf{K}_{ij} \;=\; -\,\frac{m_i\,m_j}{M}\left[\,(\vec{a}_i-\vec{a}_j)-2\,\vec{\omega}\times(\vec{v}_i-\vec{v}_j)+\vec{\omega}\times[\,\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\,]-\vec{\alpha}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\,\right]$$

donde $\vec{a}_i$, $\vec{v}_i$, $\vec{r}_i$ son la aceleración, la velocidad y la posición de la partícula i, $\vec{a}_j$, $\vec{v}_j$, $\vec{r}_j$ son la aceleración, la velocidad y la posición de la partícula j y M, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ son la masa, la velocidad angular y la aceleración angular del Universo (ver Anexo I)

Desde la ecuación anterior se deduce que la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i, está dada por:

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\,m_i\left[\,+\,(\vec{a}_i-\vec{A})-2\,\vec{\omega}\times(\vec{v}_i-\vec{V})+\vec{\omega}\times[\,\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{R})\,]-\vec{\alpha}\times(\vec{r}_i-\vec{R})\,\right]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\,m_i\left[\,-\,(\vec{a}_i-\vec{A})+2\,\vec{\omega}\times(\vec{v}_i-\vec{V})-\vec{\omega}\times[\,\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{R})\,]+\vec{\alpha}\times(\vec{r}_i-\vec{R})\,\right]$$

donde $\vec{R}$, $\vec{V}$ y $\vec{A}$ son la posición, la velocidad y la aceleración del centro de masa del universo.

Las magnitudes $[\,m_i,\ m_j,\ M,\ \mathbf{K}_{ij},\ \mathbf{K}_i\,]$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Un sistema de referencia S es un sistema no inercial rotante cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del Universo respecto a S no es igual a cero, el sistema de referencia S es un sistema no inercial no rotante cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del Universo respecto a S es igual a cero y el sistema de referencia S es un sistema inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del Universo y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del Universo respecto a S son iguales a cero.

Campos & Potenciales

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i puede ser también expresada como sigue:

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\,m_i \Big[\,\mathbf{E} + (\vec{v}_i - \vec{V}) \times \mathbf{B}\,\Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\,m_i \Big[-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\vec{v}_i - \vec{V}) \times (\nabla \times \mathbf{A})\Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\,m_i \Big[-(\vec{a}_i - \vec{A}) + 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] + \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\Big]$$

donde:

$$\mathbf{E} \;=\; -\,\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi \;=\; -\,{}^1\!/_2\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,]^2 \;+\; {}^1\!/_2\,(\vec{v}_i - \vec{V})^2$$

$$\mathbf{A} \;=\; -\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] \;+\; (\vec{v}_i - \vec{V})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \;=\; -\,\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) + (\vec{a}_i - \vec{A})$$

$$\nabla\phi \;=\; \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \;=\; -\,2\,\vec{\omega}$$

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i también puede ser obtenida a partir de la energía potencial cinética (energía cinética) siguiente:

$$K_i \;=\; -\,m_i\,[\,\phi - (\vec{v}_i - \vec{V}) \cdot \mathbf{A}\,]$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,\big]^2$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,\mathbf{v}_i\,\big]^2$$

Aplicando luego la ecuación Euler-Lagrange siguiente (teniendo en cuenta que tanto en K_i como en $\mathbf{K}_i$ la energía cinética K_i no puede ser negativa)

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\,{}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,\mathbf{v}_i\,\big]^2}{\partial\,\mathbf{v}_i}\right] + \frac{\partial\,{}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,\mathbf{v}_i\,\big]^2}{\partial\,\mathbf{r}_i} \;=\; -\,m_i\,\mathbf{a}_i$$

donde $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$ y $\mathbf{a}_i$ son la posición invariante, la velocidad invariante y la aceleración invariante de la partícula i (ver Anexo I)

Ecuación de Movimiento

La fuerza total $\mathbf{T}_i$ que actúa sobre una partícula i es siempre igual a cero.

$$\mathbf{T}_i \;=\; 0$$

Si la fuerza total $\mathbf{T}_i$ es dividida en las siguientes dos partes: la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ y la fuerza dinámica neta $\mathbf{F}_i$ ($\sum$ de fuerzas gravitatorias, fuerzas electrostáticas, etc.) entonces:

$$\mathbf{K}_i + \mathbf{F}_i \;=\; 0$$

Ahora, sustituyendo $\mathbf{K}_i$ por su expresión, dividiendo por m_i y reordenando, se obtiene:

$$\vec{a}_i \;=\; \mathbf{F}_i/m_i + \vec{A} + 2\,\vec{\omega}\times(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega}\times[\,\vec{\omega}\times(\vec{r}_i - \vec{R})\,] + \vec{\alpha}\times(\vec{r}_i - \vec{R})$$

Desde la ecuación anterior se deduce que la partícula i puede estar acelerada incluso si sobre la partícula i no actúa fuerza dinámica alguna y también que la partícula i puede no estar acelerada (estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme) incluso si sobre la partícula i actúa una fuerza dinámica neta no equilibrada.

Sin embargo, la primera y segunda ley de Newton son válidas en cualquier sistema de referencia cuando el sistema de referencia es inercial puesto que con respecto a cualquier sistema de referencia inercial la velocidad angular $\vec{\omega}$ del Universo y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del Universo son iguales a cero.

Por lo tanto, este trabajo no contradice la primera y segunda ley de Newton puesto que estas dos leyes siguen siendo válidas en cualquier sistema de referencia cuando es inercial.

Observaciones Generales

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los observadores inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

En este trabajo, las siguientes magnitudes [m, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, M, K, $\mathbf{T}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La fuerza cinética es una fuerza causada por las interacciones entre las partículas del Universo y es la fuerza que equilibra en cada partícula del Universo al resto de la fuerzas reales.

Además, la fuerza cinética es una fuerza que obedece la tercera ley de Newton en su forma débil o en su forma fuerte y que permanece invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales (tal como lo hacen también el resto de las fuerzas reales)

Finalmente, la mecánica relacional presentada en este trabajo y la mecánica newtoniana son observacionalmente equivalentes. Sin embargo, los observadores no inerciales solamente pueden aplicar la mecánica newtoniana si introducen en sus ecuaciones a las fuerzas ficticias.

Anexo I

Universo Relacional

En mecánica clásica, el Universo es un sistema que contiene a todas las partículas, que está siempre libre de fuerzas externas y que todas las fuerzas dinámicas internas obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y en su forma fuerte.

La posición $\vec{R}$, la velocidad $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del Universo respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del Universo respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$M \doteq \sum_i^{All} m_i$$

$$\vec{R} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \, \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \, \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \, \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\overleftrightarrow{I} \doteq \sum_i^{All} m_i \, [\, |\, \vec{r}_i - \vec{R} \,|^2 \, \overleftrightarrow{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R}) \,]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^{All} m_i \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del Universo, $\overleftrightarrow{I}$ es el tensor de inercia del Universo (respecto a $\vec{R}$) y $\vec{L}$ es el momento angular del Universo respecto al sistema de referencia S.

Magnitudes Invariantes

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2\, \vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\, \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \,] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

Anexo II

Campos & Potenciales II

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i (con respecto a un sistema de referencia S fijo a una partícula s ($\vec{r}_s = \vec{v}_s = \vec{a}_s = 0$) de masa m_s, con velocidad invariante $\mathbf{v}_s$ y con aceleración invariante $\mathbf{a}_s$) puede ser también expresada como sigue:

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[\, \mathbf{E} + \vec{v}_i \times \mathbf{B} \,\Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \vec{v}_i \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[-(\vec{a}_i + \mathbf{a}_s) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_i - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,) + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i \,\Big]$$

donde:

$$\mathbf{E} \;=\; -\,\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi \;=\; -\,{}^1\!/_2\,(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,)^2 \;+\; {}^1\!/_2\,(\vec{v}_i + \mathbf{v}_s)^2$$

$$\mathbf{A} \;=\; -\,(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,) + (\vec{v}_i + \mathbf{v}_s)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \;=\; -\,\vec{\alpha} \times \vec{r}_i \;+ (\vec{a}_i + \mathbf{a}_s)$$

$$\nabla\phi \;=\; \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \;=\; -\,2\,\vec{\omega}$$

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i también puede ser obtenida a partir de la energía potencial cinética (energía cinética) siguiente:

$$K_i \;=\; -\,m_i \left[\, \phi - (\vec{v}_i + \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{A} \,\right]$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\, m_i \left[\, (\vec{v}_i + \mathbf{v}_s) - (\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,) \,\right]^2$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\, m_i \left[\, \mathbf{v}_i \,\right]^2$$

Aplicando luego la ecuación Euler-Lagrange siguiente (teniendo en cuenta que tanto en K_i como en $\mathbf{K}_i$ la energía cinética K_i no puede ser negativa)

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\, {}^1\!/_2\, m_i \left[\, \mathbf{v}_i \,\right]^2}{\partial\, \mathbf{v}_i}\right] + \frac{\partial\, {}^1\!/_2\, m_i \left[\, \mathbf{v}_i \,\right]^2}{\partial\, \mathbf{r}_i} \;=\; -\,m_i\, \mathbf{a}_i$$

donde $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$ y $\mathbf{a}_i$ son la posición invariante, la velocidad invariante y la aceleración invariante de la partícula i (ver Anexo I)