

Title
Crystal Classes and Systems

Author
Giuliano Bettini

Abstract

In addition to the classification of crystals in 32 Crystal Classes divided into 6 (or 7) Crystal Systems, I propose a second further classification. The 32 Crystal Classes are rearranged in a 8x4=32 table having 8 row and 4 columns so they are constituted by eight Groups, each of them having four Classes.

This is no more a hypothesis. This is a fact, unambiguously based on physical properties.

It took me almost forty years to get here.

Aside from all the various ruminations many of which I've posted elsewhere, the final decisive step was the following:

even the second column classes ("center", bit c) share a common physical property.

This property is: "non-polar" or "non-pyro", that is, enough isotropically distributed around the center not to be pyroelectric.

No invention here, but only a rereading of what is possible for all to see, exactly written in crystallography books. Interpreted, of course.

Crystal Class And System			mnemonic symbol				
			Crystal Class	Axes	Non polar (nonpyro)	Mirror plane	Mirror & non polar
			2-bit Binary Counter	00	01	10	11
mnemonic symbol	Crystal System	3-bit Binary Counter	Bit	00	0c	m0	mc
	No axes	000	000	1	1_	m	2/m
	Binary-Axis 2	001	002	2	222	mm2	mmm
	Tetragonal low	010	040	4	4_	4mm	4/m
	Tetragonal high	011	042	422	432	4_2m	4/mmm
	Trigonal	100	300	3	3_	3m	3_2m
	Hexagonal low	101	302	6	6_	6mm	6/m
	Hexagonal high	110	340	32	622	6_m2	6/mmm
	Isometric	111	342	23	m3_	4_3m	m3m

Descrizione del lavoro

La cosa è incominciata quasi come un problema di enigmistica. Ma sostanzialmente il motivo principe è stato il seguente: per un ingegnere che opera con i radar il numero 32 ha un unico immediato significato.

“A/D converter a 5 bit”.

Da qui l’impeto per le successive analisi, che parevano via via avvalorate dalle numerose “coincidenze”.

Sono seguiti anni di svariati tentativi di aggiustamento, sostanzialmente empirici come si può vedere nei miei numerosi scritti. Tentativi di prova e riprova. Una buona sintesi quasi – finale può trovarsi in [1].

Comunque storicamente il passo sostanziale è stato senz’altro l’aver spostato la classe giroidale 432 da classe cubica a classe tetragonale.

Ricordo di avere visto questo una notte, in sogno o nel dormiveglia (vedi Appendice 1).

Con ciò la classificazione trovava sempre più ben fondati indizi sull’esistenza di gruppi di 4, di 8, di 16.

In sostanza mi appariva sempre più ragionevole la suddivisione delle 32 Classi cristalline in una tavola di 8 righe e 4 colonne, laddove le righe rappresentavano potenzialmente 8 Crystal Systems, e le colonne 4 Crystal Classes.

La numerazione appariva a 3 bit per le 8 righe, con i bit aventi il significato cristallografico di 3, 4, 2 corrispondenti agli assi di simmetria 3, 4, 2.

Le 4 colonne erano enumerate a 2 bit, aventi il significato cristallografico “m” e “c”, corrispondenti alle simmetrie m “mirror plane” e c “center”, centrosimmetria.

Vedi Appendice 2.

Questa classificazione non mi è apparsa via via rispondente a criteri estetici (o non solamente a criteri estetici) bensì legata a precisi motivi geometrici: le simmetrie delle 32 Crystal Classes.

Sono seguiti ancora anni di successivi spostamenti empirici delle varie Classi, per trovare una sistemazione sempre più soddisfacente.

Il successivo passo sostanziale è stato l’aver capito (vedi Appendice 3) che lo spostamento di 432 da classe cubica a tetragonale era matematicamente lecito, matematicamente ben fondato. Il motivo cioè non era più soltanto estetico, ma matematico.

Questo mi ha dato una sempre più fondata fiducia sulla validità della classificazione che andavo scoprendo.

In realtà tutte le cose andavano a posto.

Tutto tornava.

Restavano principalmente due dubbi residui, relativi al significato da dare al bit 4 e al bit c. In effetti questi significati era chiari. Per il bit 4 una sorta di asse a 90° , “asse 4 generalizzato”. Per il bit c il significato parimenti appariva quello di “centro di simmetria generalizzato”. Significati come dico intuitivamente chiari, ma da precisare. E non riuscivo a definirli in modo più preciso.

E' stato pertanto un successo l'aver capito come si poteva definire il bit 4 (vedi Appendice 4). Restava ambiguo il bit c.

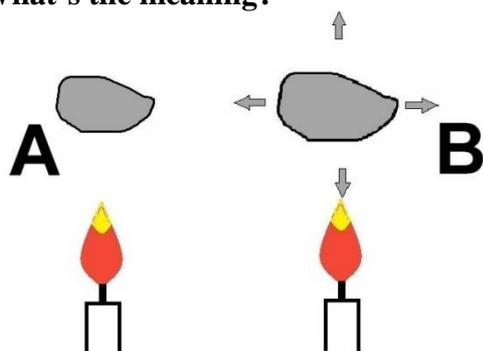
Un bel giorno sono arrivato al passo finale: ho trovato, sostanzialmente, che tutte le 8 classi alle quali avevo attribuito il bit c avevano in effetti una proprietà comune. Godevano di una simmetria comune a tutte le 8 classi.

Questo fatto mi ha consentito di spiegare il bit c come causato da una ben precisa ragione fisica. Non più solamente intuitiva o estetica.

Qual è la proprietà comune alle 8 classi?

Esse sono tutte "non piroelettriche".

What's the meaning?



Un corpo, riscaldato, (A), subisce una dilatazione (B).

Quando il corpo è costituito da cristalli appartenenti ad una certa classe detta "piroelettrica", nel corpo si manifesta elettricità, secondo certe direzioni. La classe cristallina è detta in questo caso "piroelettrica", proprio perché si manifesta elettricità a seguito del calore. Se la classe cristallina è non-piroelettrica, il corpo subisce una dilatazione uniforme, ma non si manifesta nessuna elettricità. Questo avviene, detto in parole semplici, perché il corpo è sufficientemente simmetrico rispetto al centro. Non ha nessun tipo di anisotropia rispetto al centro, tale da causare una tensione elettrica lungo certe direzioni.

Le 8 classi a cui compete il bit c sono per l'appunto non-piroelettriche.

E' questo dunque quello che chiamavo un centro "generalizzato".

Il centro generalizzato, quello che chiamavo "bit c", è posseduto in questo senso da tutte le 8-8=16 classi alle quali io l'ho attribuito. Di queste, 11 sono centrosimmetriche nel senso classico della cristallografia. Ma tutte e 16 sono centrosimmetriche nel senso qui precisato. Centro generalizzato. Non pyro.

Crystal System	Enantiomorphic (axes only)	Non polar (non pyroelectric)	Mirror plane	Mirror plane & non pyro
No axes	1	1_	m	2/m
Binary-Axis 2	2	222	mm2	mmm
Tetragonal low	4	4_	4mm	4/m
Tetragonal high	422	432	4_2m	4/mmm
Trigonal	3	3_	3m	3_2m
Hexagonal low	6	6_	6mm	6/m
Hexagonal high	32	622	6_m2	6/mmm
Isometric	23	m3_	4_3m	m3m

**Considero questa come l'ultima scoperta di questo lungo lavoro di ricerca.
E la considero invero come la scoperta definitiva.
L'anello mancante.**

Non solo: esso amplia l'orizzonte per nuove prospettive, legate alla simmetria e alla matematica (vedi [4] e Appendice 5).

Resta comunque il fatto che la classificazione funziona, perché così è.

Appendice 1

Il sogno. Lo spostamento di 432 da cubica a tetragonale

La classe cubica 432 contiene solamente simmetrie di rotazione. Nessuna altra simmetria, "centro" o "specchio". Per questi motivi è detta "giroidale".

Gli assi di simmetria sono:

- quattro assi ternari passanti per gli angoli opposti del cubo, facenti angoli fra loro di $109^\circ 28'$ o $70^\circ 32'$;
- tre assi quaternari a 90° fra loro, passanti per il centro di facce opposte del cubo;
- sei assi binari (assi 2) passanti per gli spigoli opposti del cubo.

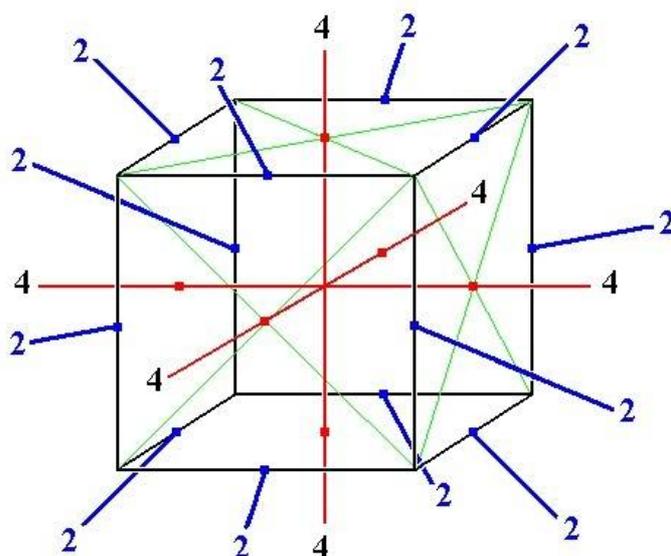


Figura 1. Gli assi ternari non sono visualizzati, per motivo di chiarezza.

Ciò posto, quello che mi apparve in sogno o nel dormiveglia fu il fatto seguente:

- se nella classe tetragonale 422 ($a=b$ e diverso da c) gli assi "lateral" di simmetria 2 diventano assi 4, automaticamente la classe diventa coincidente con la classe giroidale.

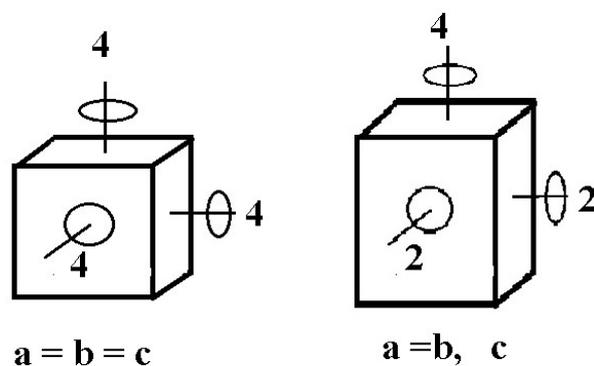


Figura 2. Classe cubica 432 da cubica a tetragonale o viceversa

Il motivo per cui questa banalità non è usualmente accolta è che in cristallografia il sistema tetragonale è così definito (vedi es. [2]):

-un asse verticale (e uno solo) di simmetria 4.

Se si accetta la definizione alternativa di “un asse verticale di simmetria 4” (togliendo il vincolo di uno solo), lo spostamento diventa lecito.

D'altra parte, equivalentemente, sempre nella definizione di sistema tetragonale, si assume che debba essere:

- $a=b > c$

oppure

- $a=b < c$.

Si esclude che possa essere $a=b=c$.

Sono dunque ammessi tutti i parallelepipedi con $c < a, b$ oppure con $c > a, b$, ma il particolare parallelepipedo con $c = a, b$ è escluso.

E' chiaro che se tutti i cristalli con c anche leggermente minore/maggiore di a, b sono considerati tetragonali, non si vede perché un cristallo con c uguale a a, b dovrebbe essere non tetragonale.

L'unica ragione sarebbe se il cristallo si fosse laureato in cristallografia.

Ma se il cristallo non è laureato in cristallografia, anche lui pensa di essere tetragonale.

Questa assunzione intuitivamente lecita mi è poi successivamente apparsa rigorosa anche dal punto di vista matematico (vedi Appendice 3).

Esiste anche un altro motivo raffinato per cui l'intuizione appare ben posta.

Si potrebbe pensare:

ma allora i sistemi cubico e tetragonale coincidono?

Così non è. Le quattro rimanenti classi del (vero) sistema cubico non sono caratterizzate da assi 4.

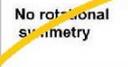
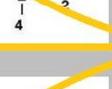
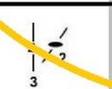
Infatti di 23 , $m\bar{3}_l$, $4_2/m\bar{3}_2$, $m\bar{3}_m$ le prime due (23 e $m\bar{3}_l$) non hanno nessun asse 4.

Ciò che veramente caratterizza le quattro classi del sistema cubico è di possedere gli assi ternari passanti per gli angoli opposti del cubo (ne bastano due per generarli tutti e quattro).

Appendice 2.

Le 32 classi cristalline.

Con lo spostamento di 432 a tetragonale, le 32 classi diventano interpretabili con due gruppi di 16, e successivamente con gruppi di 8 e di 4 (Figura 3).

				
	1 0000 0000	1 ₋ 0001 000c	m 0010 00m0	2/m 0011 00mc
	2 00100 00200	222 00101 0020c	mm2 00110 002m0	mmm 00111 002mc
	4 01000 04000	4 01001 0400c	4mm 01010 040m0	4/m 01011 040mc
	422 01100 04200	432 01101 0420c	4_2m 01110 042m0	4/mmm 01111 042mc
	3 10000 30000	3 ₋ 10001 3000c	3m 10010 300m0	3_2m 10011 300mc
	6 10100 30200	6 ₋ 10101 3020c	6mm 10110 302m0	6/m 10111 302mc
	32 11000 34000	622 11001 3400c	6_m2 11010 340m0	6/mmm 11011 340mc
	23 11100 34200	m3 ₋ 11101 3420c	4_3m 11110 342m0	m3_m 11111 342mc

16 senza bit3+altre 16 ripetute con il bit3=32

Figura 3 – Le 32 classi sistemate o “risistemate” in una tavola

La tavola ha 8 righe e 4 colonne, laddove le righe rappresentano 8 Gruppi, e le colonne 4 Crystal Classes.

La numerazione è a 3 bit per le 8 righe, con i bit aventi il significato cristallografico di 3, 4, 2 corrispondenti agli assi di simmetria 3, 4, 2, con qualche ambiguità per il significato del bit 4. Ovviamente classi con la proprietà di rotoinversione, come la 4₋ o la 6₋, non possiedono la proprietà asse, ma altrettanto ovviamente la proprietà asse interviene per definire la rotoinversione.

Le 4 colonne sono enumerate a 2 bit, aventi il significato cristallografico “m” e “c”, corrispondenti sempre con qualche residua ambiguità alle simmetrie m “mirror plane” e c “center”, centrosimmetria.

La nuova enumerazione suddivide quindi i 6 (o 7) Sistemi Cristallini in otto Gruppi, dove ogni gruppo è caratterizzato da una posizione caratteristica degli assi di simmetria.

D'altra parte la Natura sembra assentire con questa classificazione a otto gruppi di quattro, perché la distribuzione statistica dei point groups nei minerali presenti sul pianeta Terra segue appunto questo andazzo v. Figura 4.

	 axes	 center	 m plane	 m + c
No rotational symmetry	1 00000 00000	1_ 00001 0000c	m 00010 000m0	20 00011 000mc
	2 00100 00200	222 00101 0020c	mm2 00110 002m0	mmm 00111 002mc
	4 01000 04000	4 01001 0400c	4mm 01010 040m0	4/m 01011 040mc
	422 01100 04200	432 01101 0420c	4_2m 01110 042m0	4/mmm 01111 042mc
	3 10000 30000	3_ 10001 3000c	3m 10010 300m0	3_2m 10011 300mc
	6 10100 30200	6_ 10101 3020c	6mm 10110 302m0	6/m 10111 302mc
	32 11000 34000	622 11001 3400c	6_m2 11010 340m0	6/mmm 11011 340mc
	23 11100 34200	m3_ 11101 3420c	4_3m 11110 342m0	m3_m 11111 342mc

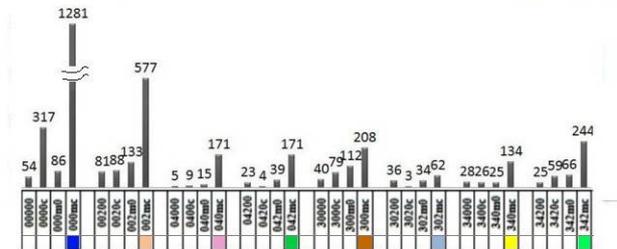


Figura 4.- Numero di specie minerali presenti in ogni point group

Qui in colore è rappresentata la classe oloedrica di ogni gruppo, ossia la classe a massima simmetria, che coincide con la classe statisticamente più frequente.

Evidentemente risultava a me che tutte queste “coincidenze” non potevano essere casuali.

Appendice 3

La classe 432 come classe “tetragonale”.

In cristallografia le simmetrie delle 32 classi cristalline o Point Groups sono descritte da matrici 3x3 (Bilbao Crystallographic Server, [3]).

Precisamente tutte le simmetrie di una classe sono descritte da un insieme di matrici che rappresentano la totalità delle simmetrie della classe.

Questo insieme di matrici a sua volta è ottenibile da un numero limitato di matrici di base, o “generatori”, le quali per prodotti successivi generano tutte e sole le matrici dell’insieme.

Ciò detto, si può matematicamente verificare che i generatori della classe cubica 432 si possono ottenere da “generatori tetragonali equivalenti”.

La dimostrazione sta nelle Figure 5 e 6, abbastanza ovvie per non aver bisogno di spiegazioni.

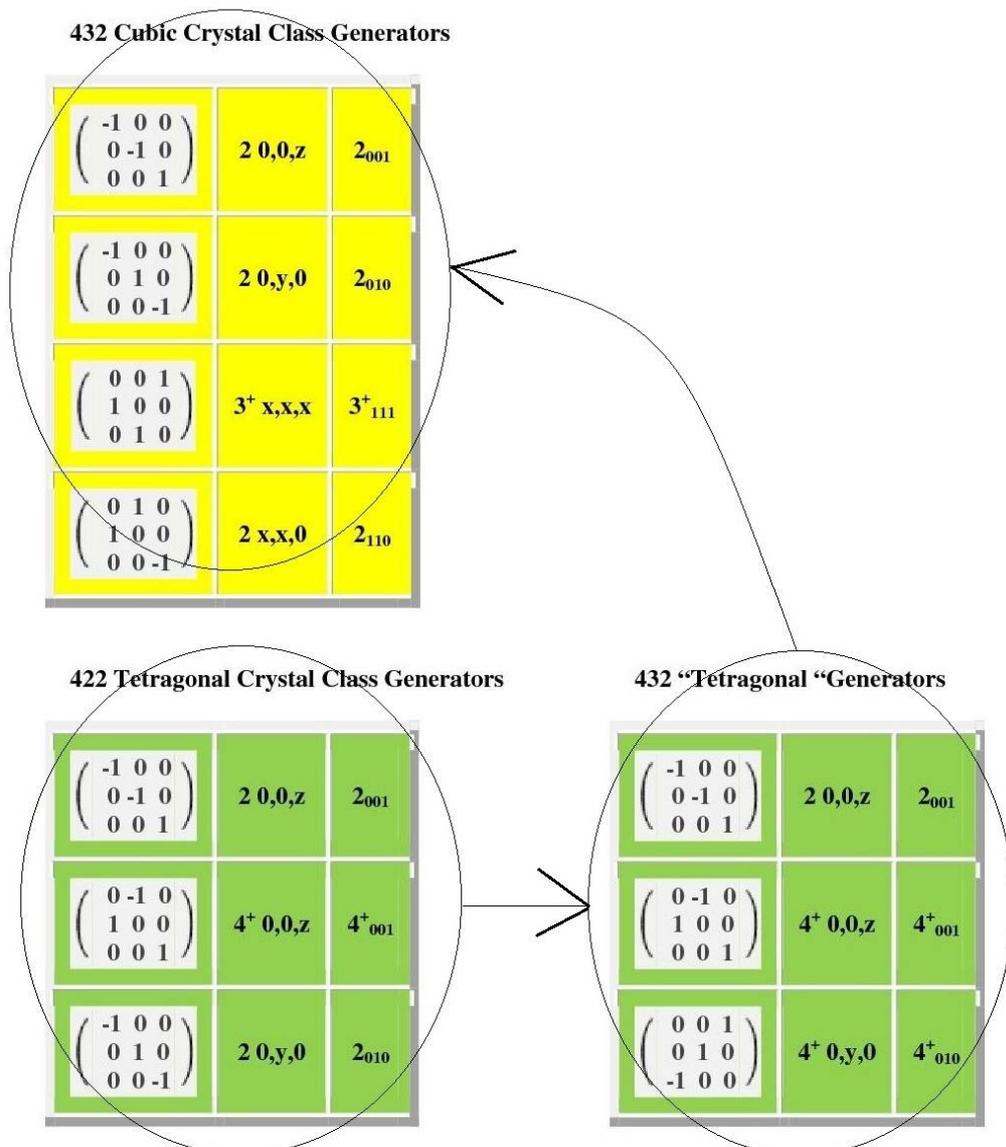


Figura 5.- Generatori: come si passa da 422 a 432 “tetragonale” e a 432 cubica.

432 "Tetragonal" Generators

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2\ 0,0,z$	2_{001}
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$4^+ 0,0,z$	4^+_{001}
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$4^+ 0,y,0$	4^+_{010}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

432 Cubic Crystal Class Generators

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2\ 0,0,z$	2_{001}
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$2\ 0,y,0$	2_{010}
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$3^+ x,x,x$	3^+_{111}
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$2\ x,x,0$	2_{110}

Figura 6.- Generatori: equivalenza matematica fra 432 "tetragonale" e 432 cubica.

Appendice 4

Il bit 4 come operatore matematico di rotazione di 90°

Si può assegnare un preciso significato matematico al bit 4.

Dico che esso va identificato con la presenza o l'assenza di un operatore matematico di "rotazione di 90°". Infatti, in tutti i casi in cui non è presente, la Natura non ha alcuna possibilità di usare una "rotazione di 90 gradi". Risulta solamente possibile generare un asse "monodirezione" che può essere 0°, 180°, 120°, 60° = 120° & 180°

zero

due

tre

o sei

No rotational symmetry	monohedron no symmetry 1 C1 00000
 2	sphenoid 2 C2 00200
 3	trigonal pyramid 3 C3 30000
 3 2	hexagonal pyramid 6 C6 30200

Figura 7 – Classi enantiometriche (solo assi) identificative delle quattro righe senza il bit 4

Viceversa allorché il bit 4 è disponibile, la Natura agisce

(e per la precisione si può dire, io penso, che agisca su una preesistente simmetria 2)

-o facendola diventare di 90°

-o ruotando di 90° la direzione dell'asse.

In sostanza un operatore 90° agisce o sulla simmetria di rotazione (che diventa di 90°) oppure sulla direzione spaziale dell'asse di simmetria (che può disporsi non più parallelamente ma a 90°).

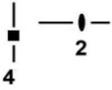
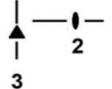
	tetragonal pyramid 4 C4 04000
	tetragonal trapezohedron 422 D4 04200
	trigonal trapezohedron 32 D3 34000
	tetartoid 23 T 34200

Figura 8 – Classi enantiometriche (solo assi) identificative delle quattro righe con il bit 4

Quindi il bit 4 comprende il (ma non si limita al) significato cristallografico di asse di simmetria tetragonale A4.

Esplicitamente:

- la presenza di asse (assi) A4 comporta il bit 4;
- ma bit 4 non comporta necessariamente la presenza di un asse cristallografico A4.

Appendice 5
Digressione matematica.

In breve: quest'ultima proprietà della piroelettricità è evidentemente una proprietà geometrica, di simmetrie geometriche, legata cioè alle simmetrie delle 32 Crystal Classes o Point Groups.

Ma è altrettanto evidentemente una proprietà fisica.

È illuminante in questo senso un passaggio che riprendo da [4].

.....

1.3 Symmetry of physical properties

In determining the effect of symmetry on physical properties, there are four symmetries to be considered: (1) the symmetry of the material, (2) the symmetry of the external forces, (3) the symmetry of resulting change or displacement, and (4) the symmetry of the physical property relating displacement to external force. Here we are using the terms force and displacement in the general sense to include electric, magnetic, and thermal quantities as well as mechanical effects.

All materials—whether crystalline or not—show some kind of symmetry.

Single crystals have symmetry belonging to one of the 32 crystal classes (Chapter 3). Ferromagnetic, ferrimagnetic, and antiferromagnetic crystals exhibit long-range magnetic order. Additional symmetry groups involving time reversal operators are used to describe magnetic structures (Chapter 14). (and pyroelectricity too, ndr)

.....

E ancora:

5.5 Neumann's Principle

The most important concept in Crystal Physics is Neumann's Principle that states: "The symmetry of any physical property of a crystal must include the symmetry elements of the point group of the crystal". The proof of Neumann's Principle is common sense.

.....

E ancora:

But the reverse is not true, for the symmetry of the physical property may be much higher than that of the point group.

.....

Detto in parole poverissime: ci sono simmetrie geometriche (quelle della Cristallografia classica) e simmetrie fisiche. Le seconde comprendono evidentemente le prime, e debbono essere coerenti con esse, ma sono più generali.

Orbene io ritengo, e in questo penso di essere facile profeta, che la classificazione da me proposta troverà la sua definitiva sistemazione matematica attraverso simmetrie più complesse, descrittive proprietà geometriche e fisiche dei cristalli, e alcune delle quali proprietà probabilmente non ancora abbastanza approfondite.

Tali sono per esempio le simmetrie legate alla piroelettricità, come ora cercherò di mostrare.

La proprietà rappresentata dal bit c (che ho chiamato una sorta di “centro generalizzato”) è effettivamente una proprietà geometrica, una simmetria che però non è pertinente a una singola matrice 3x3, la matrice “inversione” -1, bensì è rappresentata dall’insieme di tutte le matrici di simmetria (General Positions, [3]).

In questo modo.

Le n matrici di simmetria M_i di una certa classe fanno sì che un qualunque punto del cristallo sia indissolubilmente legato ad altri (n-1) per un totale di n punti legati da simmetria.

Orbene per le classi non Pyro si verifica che la somma di tutte le n matrici di simmetria è uguale a zero.

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

il che comporta

$$\left(\sum_{i=1}^k M_i\right) + \left(\sum_{i=k+1}^n M_i\right) = 0$$

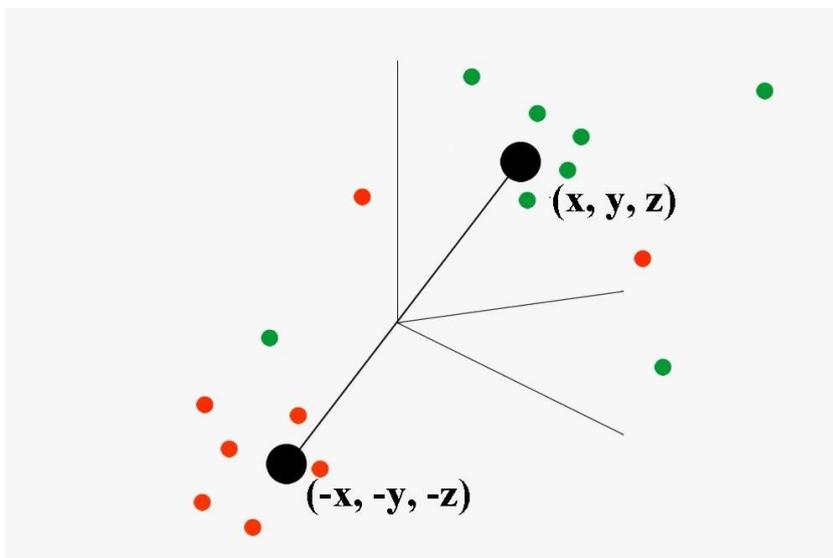
ossia

$$\left(\sum_{i=1}^k M_i\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\sum_{i=k+1}^n M_i\right)$$

Questo equivale alla seguente proprietà geometrica:

presi tutti gli n punti legati da simmetria, ogni qualunque punto o somma di k punti con risultante in x y z ha come corrispettivo la somma dei rimanenti che cade in -x, -y, -z.

Più in particolare presi comunque metà degli n punti, la cui risultante cade in un punto di coordinate x y z, la somma dei rimanenti metà punti cade in -x, -y, -z.



Ecco dunque che trovare gruppi di punti centrosimmetrici, tali che a x y z corrisponda -x, -y, -z, è banalmente risolto per tutte le classi che hanno le n matrici di simmetria a somma zero. È questa una “centrosimmetria generalizzata”.

Nota bene che questo risultato è automatico per tutti i cristalli realmente centrosimmetrici, perché fra le matrici di simmetria M_i compare la matrice (-1), per cui tutte le matrici compaiono col doppio segno e si elidono.

Bibliografia e altre letture utili

[1] Bettini, G, "5 Bit, 32 Crystal Classes"

<https://vixra.org/pdf/1711.0365v3.pdf>

[2] As to the characteristic symmetries of the 7 crystal systems

http://www.iiserpune.ac.in/~p.hazra/Partha_lecture_upto_311019.pdf

[3] Bilbao Server https://www.cryst.ehu.es/cryst/get_point_genpos.html

[4] Robert E. Newnham, "Properties of Materials - Anisotropy, Symmetry, Structure", Pennsylvania State University, Oxford University Press,

http://www.xray.cz/kryst/fyzikalni_krystalografie_b.pdf

As to Piezoelectric / Pyroelectric Crystal Classes

http://classicgems.net/info_pyroelectric-gems.htm

The 32 point groups. Table taken from "Physics of semiconductors" by Grudmann.

<http://nano-physics.pbworks.com/w/page/12296662/Group%201>

Donald B Peck

<https://www.mindat.org/article.php/2721/Determining+Symmetry+of+Crystals%3A+An+Introduction+>

Piezoelectricity

http://www.geosciences.fau.edu/Resources/CourseWebPages/Fall2012/GLY4200C_F12/PIEZ_O.htm

Pyroelectricity

http://cosweb1.fau.edu/~warburton/Fall2019/GLY4200C_F19/Pyro.htm

Neumann's Principle

<http://ieee-uffc.org/wp-content/uploads/2016/09/PiezoBallato.pdf>

Enantiomorphic Point Groups

<http://pd.chem.ucl.ac.uk/pdnn/symm2/enantio1.htm>

Centrosymmetric, enantiomorphic and polar point groups

<https://slideplayer.com/slide/10331529/35/images/24/32+Point+Groups+Triclinic.+1%2A+-1.+Monoclinic.+2%2A+m%2A+2%2Fm.+Orthorhombic+mm2%2A+mmm.+Tetragonal..jpg>

Point groups (32 crystal classes) and crystal systems

https://images.slideplayer.com/35/10331515/slides/slide_25.jpg

Generalized Symmetry And Neumann's Principle

By S. Bhagavantam And P. V. Pantulu

<https://www.ias.ac.in/article/fulltext/seca/066/01/0033-0039>