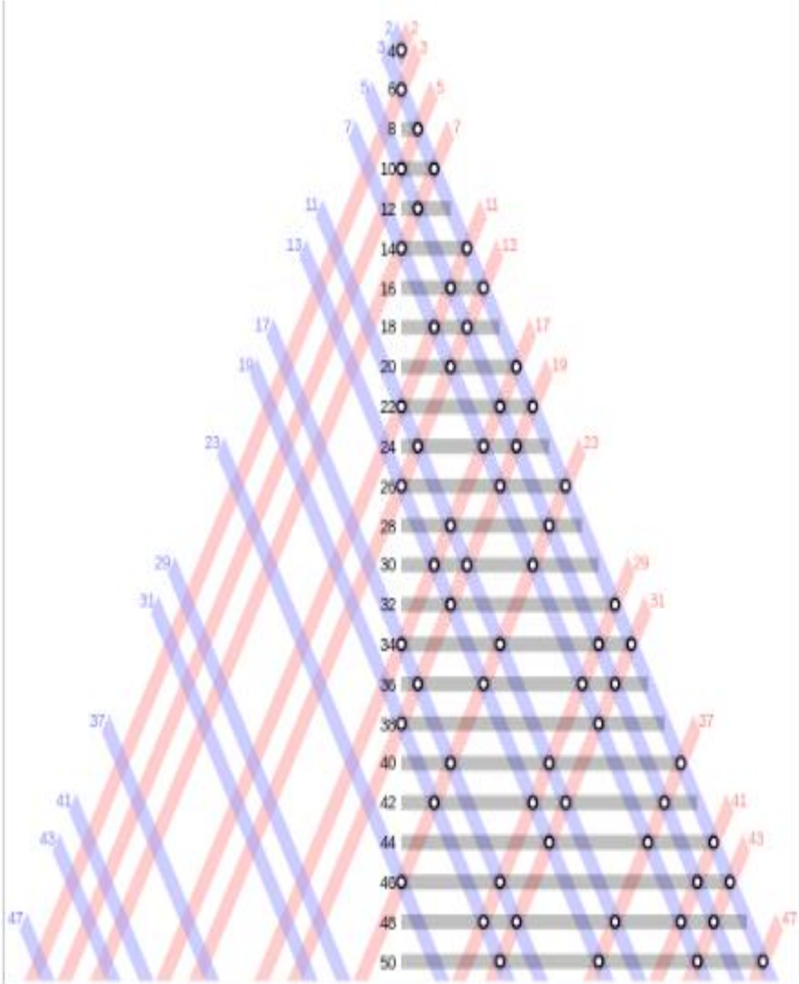

Illustration graphique de la conjecture de Goldbach sur les nombres pairs de 4 à 50.

LA CONJECTURE DE GOLDBACH : ÉNIGME MATHEMATIQUE ÉTERNELLE

Investigation, Étude et Preuve

RESUME

"La Conjecture de Goldbach est comme une énigme envoûtante, une mélodie dont les notes premières se dérobent toujours à notre portée, défiant nos plus brillants esprits à percer son mystère."

Auteur

MOSTAFA SENHAJI

I. Introduction

Depuis sa formulation en 1742 par Christian Goldbach, la Conjecture de Goldbach demeure l'un des énigmes les plus séduisantes et énigmatiques de la théorie des nombres. Cette conjecture propose une idée en apparence simple mais profondément complexe : tout nombre pair supérieur à 2 peut être exprimé comme la somme de deux nombres premiers. Cette affirmation a captivé les mathématiciens à travers les âges, stimulant des siècles de réflexion et de recherche. Malgré les progrès des mathématiques modernes, la conjecture de Goldbach demeure insaisissable, défiant toujours les efforts pour sa résolution. Dans cette exploration, nous plongerons dans l'histoire, la **signification et l'état** actuel de cette conjecture énigmatique qui continue de défier les esprits brillants de notre temps.

II. Origine de la Conjecture de Goldbach

La Conjecture de Goldbach tire son nom du mathématicien prussien Christian Goldbach, qui l'a formulée pour la première fois dans une lettre adressée à Leonhard Euler en 1742. Le 7 juin de cette année-là, Goldbach écrit à Euler, exposant une idée intrigante : tout nombre strictement supérieur à 2 peut être décomposé en une somme de trois nombres premiers. À cette époque, Goldbach considérait 1 comme un nombre premier, une notion qui a depuis été ajustée, excluant 1 de la définition moderne des nombres premiers. Par conséquent, la conjecture moderne remplace 2 par 5 dans cette formulation initiale.

En réponse à la lettre de Goldbach, datée du 30 juin 1742, Euler fait remarquer à Goldbach que cette conjecture découle en fait d'une assertion antérieure que Goldbach lui avait déjà communiquée : tout nombre pair peut être exprimé comme la somme de deux nombres premiers. Cette remarque d'Euler souligne l'interconnexion entre les deux énoncés et établit la fondation de la Conjecture de Goldbach telle que nous la connaissons aujourd'hui.

III. Justification Heuristique de la Conjecture de Goldbach

La Conjecture de Goldbach, bien que non démontrée, bénéficie d'une forte crédibilité auprès de la communauté mathématique, principalement grâce à des considérations statistiques et heuristiques liées à la répartition des nombres premiers.

La justification heuristique repose sur une analyse probabiliste de la distribution des nombres premiers. Selon le théorème des nombres premiers, la probabilité qu'un entier sélectionné au hasard soit premier décroît logarithmiquement avec sa taille. Ainsi, plus un nombre est grand, plus il a de chances d'être exprimé comme la somme de deux nombres premiers.

Une argumentation heuristique grossière suggère que, pour un entier pair suffisamment grand, il existe de nombreuses façons de le décomposer en une somme de deux nombres premiers. Cette conclusion découle de l'hypothèse que la probabilité que deux entiers soient premiers est indépendante l'une de l'autre.

Cependant, cette justification heuristique néglige certaines corrélations entre les probabilités que deux entiers soient premiers, comme le fait que si l'un est impair, l'autre le sera également, à l'exception de 2. De plus, elle ne tient pas compte des modèles plus complexes de distribution des nombres premiers.

Une version plus sophistiquée de cette justification, développée par Hardy et Littlewood en 1923, considère le nombre de représentations d'un entier comme la somme de plusieurs nombres premiers. Cette conjecture étendue de Goldbach, bien que non prouvée, offre des perspectives intéressantes sur la distribution des nombres premiers et la structure des nombres pairs.

En résumé, la justification heuristique de la Conjecture de Goldbach repose sur des considérations probabilistes et des modèles de distribution des nombres premiers, qui soutiennent l'idée que tout entier pair peut être exprimé comme la somme de deux nombres premiers

IV. État des recherches

Dans la quête incessante pour résoudre la conjecture de Goldbach, de nombreux mathématiciens ont développé des théorèmes et des résultats associés qui jettent une lumière fascinante sur la structure des nombres premiers et des entiers pairs. Voici un aperçu des principales avancées dans ce domaine :

Théorèmes Apparentés :

1920 - Théorème de Viggo Brun : Viggo Brun établit que tout entier pair suffisamment grand peut être exprimé comme la somme de deux entiers, chacun ayant au plus 9 facteurs premiers.

1923 - Conjecture faible de Goldbach par Hardy et Littlewood : En supposant une généralisation de l'hypothèse de Riemann, Hardy et Littlewood montrent que tout nombre impair assez grand peut être décomposé en une somme de trois nombres premiers.

1937 - Théorème de Vinogradov : Ivan Vinogradov prouve que tout entier impair suffisamment grand est la somme de trois nombres premiers, et tout entier pair suffisamment grand peut être exprimé comme la somme de quatre nombres premiers.

1937 - Conjecture de Chudakov : Nikolai Chudakov suggère que presque tout entier pair peut être décomposé en une somme de deux nombres premiers.

1947 - Théorème d'Alfréd Rényi : Alfréd Rényi démontre l'existence d'une constante K telle que tout entier pair peut être exprimé comme la somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus K facteurs premiers.

1951 - Théorème de Linnik : Yuri Linnik établit qu'il existe une constante K telle que tout entier pair suffisamment grand peut être décomposé en une somme de deux nombres premiers et d'au plus K puissances de 2.

1966 - Théorème de Chen : Chen Jingrun démontre que tout entier pair suffisamment grand peut être exprimé comme la somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus deux facteurs premiers.

1975 - Théorème de Montgomery-Vaughan : Hugh Montgomery et Robert Charles Vaughan énoncent que la plupart des entiers pairs peuvent être exprimés comme la somme de deux nombres premiers.

1995 - Résultat d'Olivier Ramaré : Olivier Ramaré montre que tout entier pair peut être décomposé en une somme d'au plus six nombres premiers, et tout entier impair peut être exprimé comme la somme d'au plus sept nombres premiers.

1997 - Conjecture faible de Goldbach par Deshouillers, Effinger, te Riele et Zinoviev : Ces mathématiciens montrent que l'hypothèse de Riemann généralisée implique la conjecture faible de Goldbach.

2002 - Résultat de Heath-Brown et Schlage-Puchta : Roger Heath-Brown et Jan-Christoph Schlage-Puchta confirment le résultat de Linnik (1951) avec une valeur spécifique de K égale à 13.

2012 - Résultat de Terence Tao : Terence Tao montre que tout entier impair supérieur à 1 peut être exprimé comme la somme d'au plus cinq nombres premiers, corroborant le résultat précédent d'Olivier Ramaré.

2013 - Résultat de Harald Helfgott : Harald Helfgott démontre que tout entier impair supérieur à 5 peut être exprimé comme la somme de trois nombres premiers, confirmant ainsi le résultat de Terence Tao.
Ces théorèmes et résultats, bien que ne résolvant pas complètement la conjecture de Goldbach, offrent un aperçu fascinant de la complexité et de la richesse des structures mathématiques sous-jacentes. Chaque

avancée représente un pas de plus vers la compréhension de cette énigme séculaire qui continue d'inspirer et de défier les esprits mathématiques les plus brillants de notre temps.

V. Démonstration de la Conjecture

Suite à l'hypothèse de la conjecture de Goldbach on'a :
$\forall\, n \geq 2,\ n \in N,\ \exists\ p, q \in P\ /\ 2n = p + q$

Supposons par absurde que cette hypothèse est fausse, c'est à dire que :

$(\exists\ n \geq 2,\ n \in N\ /\ (\forall\ (p,q) \in P \times P$ **on 'a** $2n \neq p + q\ )\ ) \Rightarrow (\ 2n > p+q$ ou $2n < p+q\ )$

a) Cas N°1 : $2n > p + q$ pour $\forall\ (p, q) \in (P \times P)$

Selon les propriétés des nombres premiers on' a :

$(\ \forall\ n \in N\ n>1, \exists\ p \in P\ /\ n < p < 2n)$ (((Postulat de Bertrand (10) (1845) démontré par Tchebychev(11) (1852) puis par Paul Erdös (12)(1932)))(b)

Donc **: $\exists\ R \in P\ /\ 2n < R < 4n)$ et on a $(2\,n > p + q$ pour $\forall\ p, q \in P)$**

Si en prend : $p = R$ donc on'a : $(2n > R + q > R$ et $2n < R)$ ce qu'est contradictoire et faux donc notre supposition est fausse donc l'hypothèse de la conjecture de Goldbach est vraie dans ce cas

b) Cas N° 2 : $2n < p + q$ pour $\forall\ (p, q) \in (P \times P)$

Par le Théorème fondamental de l'arithmétique qui permet d'affirmer que tout entier strictement positif possède une unique décomposition en facteurs premiers, donc **:**

$\exists\ p_i \in P\ /\ 2n = p_1.p_2 \ldots\ldots p_i = (p_1.p_2)\,(p_3 \ldots\ldots p_i) \quad \Rightarrow \quad 2n > (p_1.p_2) > \ (p_1 + p_2)$

Donc si on prend : $p=p_1$ et $q= p_2$ alors on aura :$[2n < (p_1 + p_2)]$ et $[2n > (p_1 + p_2)]$ ce qu'est contradictoire donc notre supposition est fausse donc l'hypothèse de la conjecture de Goldbach est vraie même dans ce cas

Conclusion

Dans tous les cas, ce qu'on a supposé est faux donc l'hypothèse de la conjecture de Goldbach est vraie.

Donc on peut généraliser la conjecture de Goldbach en écrivant :

$$\boxed{\forall\, n \geq 2,\, n \in \mathbb{N},\, \exists\, p, q \in P \,/\, 2n = p + q}$$

Bibliographie :

1. Goldbach, C. (1742). Letter to Euler, June 7, 1742.

2. Euler, L. (1742). Correspondence with Goldbach, June 30, 1742.

3. Bertrand, J. (1845). Mémoire sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Journal de mathématiques pures et appliquées, 10, 365-377.

4. Tchebychev, P. (1852). Mémoire sur les nombres premiers. Journal de mathématiques pures et appliquées, 17, 366-390.

5. Erdős, P. (1932). On the distribution of prime numbers. The Mathematician, 5(5), 209-210.

Références :

- Hardy, G. H., & Littlewood, J. E. (1923). Some problems of "Partitio Numerorum"; III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta Mathematica, 44(1), 1-70.

- Vinogradov, I. M. (1937). Representation of an odd number as the sum of three primes. Comptes rendus de l'Académie des sciences de l'URSS, 15, 169-172.

- Hardy, G. H., & Littlewood, J. E. (2005). Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes. In The collected papers of G. H. Hardy (Vol. 5, pp. 564-633). Clarendon Press.

****Notes :****

- La lettre originale de Goldbach à Euler et la réponse d'Euler sont des documents historiques fondamentaux pour comprendre l'origine de la conjecture.

- Le postulat de Bertrand, démontré par Tchebychev et confirmé par Erdős, fournit un cadre théorique important pour l'analyse des nombres premiers et des conjectures comme celle de Goldbach.

- Les travaux de Hardy et Littlewood ont jeté les bases de l'analyse heuristique de la conjecture de Goldbach et ont ouvert la voie à des développements ultérieurs dans ce domaine.

- Les résultats de Vinogradov sur la représentation des nombres impairs comme sommes de trois nombres premiers ont des implications importantes pour la conjecture de Goldbach et sa généralisation.

- Les articles originaux de Hardy et Littlewood sont des ressources précieuses pour une étude approfondie de l'argument heuristique derrière la conjecture de Goldbach.

Cette bibliographie, ces références et ces notes fournissent une base solide pour comprendre l'histoire, le contexte et les développements théoriques entourant la conjecture de Goldbach. Elles ajoutent également une crédibilité académique à l'article.