

TRANSCENDANCE DES DÉFORMATIONS DES FONCTIONS POLYLOGARITHMES EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

DAVID ADAM

RÉSUMÉ. Soit p un nombre premier. En 2005, dans le but de reprouver par la méthode de Wade la transcendance pour $n \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ de $\Gamma_\infty(n)$, où Γ_∞ est la factorielle de Carlitz-Goss, Yao introduit une classe indénombrable de déformations des fonctions polylogarithmes de Kochubei dont il montre la transcendance de leurs valeurs en $1/T^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Dans ce présent article, nous répondons à la question de Yao d'étendre ce résultat en un algébrique non nul. Nous prouvons ce fait non seulement dans le cadre de la place infinie mais aussi dans celui des places finies. Nous montrons un résultat analogue pour les déformations de la fonction polylogarithme de Carlitz.

1. INTRODUCTION

Soit $q = p^f$ ($f \in \mathbb{N}^*$) une puissance d'un nombre premier p , $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q(T)$ et Ω_∞ le complété pour la valuation $-\deg$ d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ contenant $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Pour $r \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_{\infty,r}$ le disque

$$\mathcal{D}_{\infty,r} = \{z \in \Omega_\infty \mid \deg(z) < r\}.$$

Dans les années 1930, Carlitz a introduit [8] le premier exemple de module de Drinfeld. On appelle *module de Carlitz* défini sur Ω le $\mathbb{F}_q$ -homomorphisme d'algèbres injectif

$$C : \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_q - \text{lin}}(\mathbb{G}_a/\Omega)$$

défini par

$$C_T = T + \tau^q,$$

(en fait, Carlitz travaille plutôt avec $C_T = T - \tau^q$). Il existe une unique fonction entière sur Ω , appelée *exponentielle de Carlitz* et notée $\exp_C$, vérifiant les deux propriétés suivantes : pour tout $z \in \Omega$

$$\exp'_C(z) = 1 \text{ et pour tout } a \in \mathbb{F}_q[T], \exp_C(az) = C_a(\exp_C(z)). \quad (1)$$

Posons

$$[0] = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, [n] = T^{q^n} - T.$$

Une expression explicite de l'exponentielle de Carlitz se déduit facilement de l'Égalité 1 :

$$\forall z \in \Omega, \exp_C(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{q^n}}{D_n}$$

où l'on a posé

$$D_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, D_n = [n]D_{n-1}^q.$$

Dans [29, Theorem 7.1], Wade prouve que pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul, $\exp_C(\beta)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$. Puisque $\exp'_C = 1$, la série formelle $\exp_C(Z)$ admet un inverse dans $\mathbb{F}_q(T)[[Z]]$, appelée *logarithme de Carlitz* et noté Log_C . Formellement, on a

$$\text{Log}_C(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{L_n} Z^{q^n},$$

avec

$$L_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, L_n = [n]L_{n-1}.$$

La série formelle $\text{Log}_C(Z)$ induit une fonction définie sur $\mathcal{D}_{\infty,q/(q-1)}$ à valeurs dans Ω_∞ . Le résultat de Wade implique que $\text{Log}_C(\beta)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$ dès que β est un élément non nul de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ pour lequel $\text{Log}_C(\beta)$ est défini. Dans toute la suite, s désignera

un entier naturel non nul fixé une fois pour toute. Anderson et Thakur en étudiant le T -module $C^{\otimes s}$ ont été amenés à introduire un analogue $\text{Log}_{s,C}$ des fonctions polylogarithmes qui généralisent la fonction logarithme de Carlitz (voir [4]). Le s^{e} polylogarithme de Carlitz est la fonction définie sur $\mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$ par : pour tout $z \in \mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$

$$\text{Log}_{s,C}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{sn}}{L_n^s} z^{q^n}.$$

Dans [21], Kochubei introduit une deuxième sorte de fonctions polylogarithmes en posant

$$\text{Log}_{s,K}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{q^n}}{[n]^s}.$$

Le s^{e} logarithme de Kochubei est défini sur $\mathcal{D}_{\infty,s}$. Harada [20, Theorem 0.5] montre que si α et β sont des éléments non nuls de $\mathbb{F}_q(T)$ tels que α et β appartiennent à $\mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$ et $\mathcal{D}_{\infty,s}$ respectivement, alors $\text{Log}_{s,C}(\alpha)$ et $\text{Log}_{s,K}(\beta)$ sont $\mathbb{F}_q(T)$ -linéairement indépendants. En particulier, ils sont transcendants sur $\mathbb{F}_q(T)$. Les cas $\text{Log}_{1,K}(1)$ et $\text{Log}_{s,C}(1)$ avaient déjà été obtenus par Wade ([29, Theorem 4.1] et [30]). Dans les années 1930, Carlitz (voir [9] ou [7]) a introduit un analogue de la factorielle pour $\mathbb{F}_q[T]$. Dans [17] (voir aussi [16]), Goss montre que la fonction $n \mapsto n!_C / T^{\deg(n!_C)}$ admet un prolongement continu sur $\mathbb{Z}_p$, noté Γ_{∞} . Dans le cadre de la recherche d'une démonstration par la méthode de Wade de la transcendance de $\Gamma_{\infty}(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$, Yao a introduit une classe indénombrable de déformées des fonctions polylogarithmes de Carlitz et de Kochubei.

Soit $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{F}_q$. La *déformée de la fonction polylogarithme de Carlitz par la suite $\underline{\varepsilon}$* est la fonction, notée $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},C}$, définie sur $\mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$ par : pour tout $z \in \mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$

$$\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},C}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \frac{z^{q^n}}{L_n^s}.$$

On définit de façon analogue la *déformée $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K}$ de la fonction polylogarithme de Kochubei par la suite $\underline{\varepsilon}$* : pour tout $z \in \mathcal{D}_{\infty,sq}$

$$\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \frac{z^{q^n}}{[n]^s}.$$

En utilisant la méthode de Wade, Yao a montré le

Théorème. [31, Theorem 3] *Si la suite $\underline{\varepsilon}$ n'est pas ultimement nulle, alors*

$$\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{[n]^s}$$

est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Yao pose la question suivante :

Question $\star$. Si la suite $\underline{\varepsilon}$ est non ultimement nulle, la valeur $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K}(\alpha)$ est-elle transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)$ pour $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul ?

Yao annonce que la méthode automatique permet de montrer le

Théorème. [31, Theorem 4] *Si la suite $\underline{\varepsilon}$ n'est pas ultimement nulle, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*

$$\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K}(T^{-k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{[n]} T^{-kq^n}$$

est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Yao constate que ces deux derniers Théorèmes sont les seuls résultats connus dans la direction d'une réponse à la Question $\star$. Concernant la fonction polylogarithme de Carlitz, Yao obtient le résultat plus faible suivant :

Théorème. [32, Theorem 1] *Si la suite $\underline{\varepsilon}$ n'est pas ultimement nulle, la série formelle*

$$\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},C}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \frac{Z^{q^n}}{L_n^s}.$$

est transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)(Z)$.

En fait, ce résultat est déjà une conséquence immédiate de l'analogie du théorème d'Eisenstein [6, Lemma 2.1]. Comme le remarque Wade [30], sa preuve de la transcendance de $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\infty}(1)$ peut être modifiée pour obtenir des résultats un peu plus généraux. En particulier, on peut obtenir le

Théorème (Wade adapté, [30]). *Si la suite $\underline{\varepsilon}$ n'est pas ultimement nulle, alors*

$$\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{L_n^s}$$

est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Le Théorème ci-dessus se déduit aussi de [23, Theorem 3].

Dans cet article, nous donnons une réponse positive à la Question $\star$. Nous prouvons le

Théorème 1. *Soit $\underline{\varepsilon}$ une suite de $\mathbb{F}_q$ non ultimement nulle. Alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}_{\infty,s}$ non nul, $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K}(\alpha)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Nous montrons aussi que ce résultat est aussi valable pour les fonctions polylogarithmes de Carlitz :

Théorème 2. *Soit $\underline{\varepsilon}$ une suite de $\mathbb{F}_q$ non ultimement nulle. Alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$ non nul, $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},C}(\alpha)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré d_0 , $\mathbb{F}_q(T)_P$ le complété pour la topologie induite par la valuation v_P -adique de $\mathbb{F}_q(T)$ (normalisée par $v_P(P) = 1$) et Ω_P le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q(T)_P$ contenant $\mathbb{F}_q(T)$. Il existe un unique élément ω de Ω_P algébrique sur $\mathbb{F}_q$ de degré d_0 tel que $v_P(T - \omega) = 1$. On notera aussi Ω_ω pour Ω_P et v_ω la valuation v_P . Le corps $\mathbb{F}_q(\omega)$ sera noté $\mathcal{F}_\omega$. On pose $\deg_\omega = -v_\omega$. Pour un réel r , on note

$$\mathcal{D}_{\omega,r} = \{z \in \Omega_\omega \mid \deg_\omega(z) < r\}.$$

Les séries formelles $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},C}(Z)$ et $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K}(Z)$ induisent une fonction définie sur $\mathcal{D}_{\omega,0}$ à valeurs dans Ω_ω . Nous montrons le

Théorème 3. *Soit $\underline{\varepsilon}$ une suite de $\mathbb{F}_q$ non ultimement nulle. Alors, pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \cap \mathcal{D}_{\omega,0}$ non nul,*

$$\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},C,\omega}(\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \frac{\beta^{q^n}}{L_n^s} \text{ et } \text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},K,\omega}(\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \frac{\beta^{q^n}}{[n]^s}$$

sont transcendants sur $\mathbb{F}_q(T)$.

L. Denis fit la remarquable observation que la méthode de Mahler était bien adaptée pour l'arithmétique des corps de fonctions (voir [10], [11] ou [26]). Malheureusement, celle-ci fut concomitante à la publication du célèbre critère **ABP** par Anderson, Brownawell et Papanikolas [5, Theorem 3.1] et n'a pas eu la publicité qu'elle méritait. Pour démontrer les Théorèmes 1, 2 et 3, nous utiliserons une modification d'une variante de la méthode de Mahler introduite par Kubota [22]. L'avantage de la méthode de Malher sur le critère **ABP** est qu'il n'est pas nécessaire que les fonctions en jeu satisfassent à un système d'équations « rigide ». Cette flexibilité permet d'obtenir des résultats de transcendance sur des classes indénombrables de fonctions, ce que ne peut obtenir le critère **ABP**. Remarquant l'apparition de deux quantités transcendentes sur $\mathbb{F}_q$, il est tentant d'essayer d'adapter la méthode de Mahler en plusieurs variables. Cependant, il est bien connu (voir [14]) que la méthode de Mahler en plusieurs variables aux places non-archimédiennes présentent des difficultés structurelles. Dans de rares cas particuliers, ces difficultés peuvent être surmontées (voir par exemple [19]). Malheureusement, le contexte dans lequel nous nous plaçons ne rentre pas dans le cadre de ces cas. Dans cet article, nous montrerons

comment le fait de travailler avec des corps de fonctions permet de se ramener en une seule variable. Ceci répond (très partiellement) à la demande de Flicker de savoir si la méthode de Mahler peut être adaptée pour fonctionner dans le cadre de fonctions à plusieurs variables aux places non archimédiennes, du moins dans le contexte des corps de fonctions.

Dans toute la suite, $\underline{\varepsilon}$ désignera une suite de $\mathbb{F}_q$ non ultimement nulle, autrement dit que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_k \neq 0\}$ est infini. Notons $\eta_0 < \eta_1 < \dots$ ses éléments. Soit u un élément non nul de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Si $\mathbb{F}$ désigne une extension finie de $\mathbb{F}_\omega$, on notera $\rho_{\mathbb{F}}(u)$ le polynôme unitaire de $\mathbb{F}[T]$ de degré minimal tel que $\rho_{\mathbb{F}}(u)u$ soit un entier algébrique, c'est-à-dire appartient à la clôture intégrale de $\mathbb{F}[T]$ dans $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Tout multiple non nul de $\rho_{\mathbb{F}}(u)$ dans $\mathbb{F}[T]$ est appelé *dénominateur de u (relativement à $\mathbb{F}(T)$)*. On définit la taille $t_{\mathbb{F}}(u)$ de u par :

$$t_{\mathbb{F}}(u) = \max \left(\max_{\sigma \in \mathcal{H}_{\mathbb{F}}} \deg(\sigma(u)), \deg(\rho_{\mathbb{F}}(u)) \right),$$

où $\mathcal{H}_{\mathbb{F}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q(T)}/\mathbb{F}(T))$. Les propriétés de la taille peuvent être lues dans [25] pour la caractéristique 0 et leur transcription en caractéristique finie dans [2].

Pour uniformiser les démonstrations à venir, il sera pratique d'étendre les notations vues ci-dessus dans le cas des places finies au cas de la place infinie en posant $\omega = \infty$ et $\deg_{\infty} = \deg$. En particulier $\mathbb{F}_{\infty} = \mathbb{F}_q$. Ceci est compatible avec les notations présentées en début d'introduction.

L'inégalité de Liouville pour u s'écrit dans notre contexte (voir [33, Lemma 2.1] et [34, Lemma 4.2])

Proposition 4 (Inégalité de Liouville). *Soit $K/\mathbb{F}(T)$ une extension finie de degré de séparation Ξ qui contient u . Alors, on a*

$$\deg_{\omega}(u) \geq -2\Xi t_{\mathbb{F}}(u).$$

2. LE CAS LACUNAIRE

Dans ce paragraphe, on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{n+1} - \eta_n = +\infty$. La preuve de la transcendance des valeurs des polylogarithmes de Carlitz et Kochubei se situe dans le cadre des preuves de transcendance des séries lacunaires (voir [15] par exemple).

Théorème 5. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments non nuls d'une extension algébrique finie K de $\mathbb{F}_{\omega}(T)$. On suppose que*

- (a) *la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 ;*
- (b) *la suite $(\sum_{k=0}^n \deg_{\omega}(u_k))_n$ est négligeable devant la suite $(\deg_{\omega}(u_{n+1}))_n$;*
- (c) *il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{\mathbb{F}_{\omega}}(u_n) \leq C \deg_{\omega}(u_n)$;*
- (d) *il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\deg_{\omega}(u_n))_{n \geq N}$ est strictement négative et strictement décroissante ;*

Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe et est un élément de Ω_{ω} transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.

Démonstration. Clairement, $A = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien défini. On suppose que A est algébrique sur $\mathbb{F}_{\omega}(T)$ et on note Ξ_0 le degré de l'extension $(\mathbb{F}_{\omega}(T))(A)/\mathbb{F}_{\omega}(T)$. Pour tout entier n supérieur à N , soit A_n la n^{e} somme partielle de A : $A_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Par la stricte décroissance de la suite $(\deg_{\omega}(u_n))_n$, on a

$$\deg(A - A_n) = \deg(u_{n+1}).$$

Une majoration de la taille de $A - A_n$ est donnée par :

$$t_{\mathbb{F}_{\omega}}(A - A_n) \leq t_{\mathbb{F}_{\omega}}(A) + C \sum_{k=0}^n \deg_{\omega}(u_k).$$

L'inégalité de Liouville implique que

$$\deg_{\omega}(u_{n+1}) \geq -2\Xi_0(t_{\mathbb{F}_{\omega}}(A) + C \sum_{k=0}^n \deg_{\omega}(u_k)).$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2\Xi_0(t_{\mathbb{F}_\omega}(A) + C \sum_{k=0}^n \deg_\omega(u_k))}{\deg_\omega(u_{n+1})} = 0,$$

cela est impossible. $\square$

Appliquant ce théorème aux fonctions polylogarithmes déformées de Carlitz et Kochubei, on obtient la transcendance de leurs valeurs en un élément algébrique lorsque ces fonctions sont lacunaires. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{\mathcal{K},n} = \varepsilon_{\eta_n} \frac{\beta q^{\eta_n}}{[\eta_n]}$ (resp. $u_{\mathcal{C},n} = \varepsilon_{\eta_n} \frac{\beta q^{\eta_n}}{L_{\eta_n}}$).

Théorème 6. *On suppose que $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \eta_{n+1} - \eta_n = +\infty$. Alors pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$ tel que $\deg(\beta) < s$ (resp. $\deg(\beta) < sq/(q-1)$), $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(\beta)$ (resp. $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta)$) est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Démonstration. On a

$$\deg(u_{\mathcal{K},n}) = q^{\eta_n}(\deg(\beta) - s) \text{ et } t_{\mathbb{F}}(u_{\mathcal{K},n}) \leq q^{\eta_n}(s + t_{\mathbb{F}}(b))$$

(resp.

$$\deg(u_{\mathcal{C},n}) = q^{\eta_n} \deg(\beta) - s \frac{q^{\eta_n+1} - q}{q-1} \text{ et } t_{\mathbb{F}}(u_{\mathcal{C},n}) \leq s \frac{q^{\eta_n+1} - q}{q-1} + q^{\eta_n} t_{\mathbb{F}}(b)).$$

Puisque $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \eta_{n+1} - \eta_n = +\infty$, la suite $(u_{\mathcal{K},n})_n$ (resp. $(u_{\mathcal{C},n})_n$) vérifie les conditions du Théorème 5. Par conséquent, $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K}}(\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\mathcal{K},n}$ (resp. $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C}}(\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\mathcal{C},n}$) est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$. $\square$

Si $\omega \neq \infty$ la transcendance des valeurs des polylogarithmes déformés de Carlitz et Kochubei, considérés comme fonctions de Ω_ω , en un élément algébrique s'obtient de manière identique.

Théorème 7. *On suppose que $\omega \neq \infty$ et $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \eta_{n+1} - \eta_n = +\infty$. Alors pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \{0\}$ tel que $v_\omega(\beta) > 0$, $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{K},\omega}(\beta)$ et $\text{Log}_{s,\underline{\varepsilon},\mathcal{C},\omega}(\beta)$ sont transcendants sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\deg_\omega(u_{\mathcal{K},\eta_n}) = q^{\eta_n} \deg_\omega(\beta) - s \deg_\omega([\eta_n]) \text{ (resp. } \deg_\omega(u_{\mathcal{C},n}) = q^{\eta_n} \deg_\omega(\beta) - s \deg_\omega(L_{\eta_n}))$$

Comme $\deg_\omega([\eta_n]) \in \{-1, 0\}$ (resp. $\deg_\omega(L_{\eta_n}) \in \llbracket -\eta_n, 0 \rrbracket$) la suite $(\deg_\omega(u_{\mathcal{K},\eta_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\deg_\omega(u_{\mathcal{C},\eta_n}))_{n \in \mathbb{N}}$) est équivalente à $(q^{\eta_n} \deg_\omega(\beta))_n$. Les suites $(u_{\mathcal{K},n})_n$ et $(u_{\mathcal{C},n})_n$ vérifient les conditions du Théorème 5. $\square$

3. ÉCARTS BORNÉS

L'ordre en 0 d'une série formelle $f(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i X^i$ de $(\mathbb{F}(T))[[X]]$ est l'entier naturel $\text{ord}_0(f)$ défini par

$$\text{ord}_0(f) = \min\{i \mid i \in \mathbb{N}, f_i \neq 0\},$$

si f est non nulle. Sinon, par convention, l'ordre en 0 de f est $+\infty$. Clairement, pour $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{ord}_0(f) \geq r \iff f \in \mathcal{I}^r,$$

où $\mathcal{I} = (X)$ est l'idéal de $(\mathbb{F}(T))[[X]]$ engendré par X . L'ordre en 0 est une valuation de $(\mathbb{F}(T))[[X]]$ qui en fait un anneau complet pour la topologie induite. Une suite $(f_k = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_{k,i} X^i)_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\mathbb{F}(T))[[X]]$ converge vers

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i X^i \in (\mathbb{F}(T))[[X]]$$

si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel pour tout $k \geq N$, $f_{k,i} = f_i$. La valuation ord_0 de $\Omega_\omega[[X]]$ s'étend à une valuation sur son corps quotient, le corps $\Omega_\omega((X))$ des séries de Laurent sur Ω_ω .

Soit $\mathbb{F}$ une extension finie de $\mathbb{F}_\omega$, τ un réel strictement positif et $D \in \mathbb{F}[T]$. On note $\mathcal{M}_{\mathbb{F},\tau,D}$ l'ensemble des séries formelles de $\Omega_\omega[[X]]$

$$f(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i X^i \quad (\forall i \in \mathbb{N} \ f_i \in \Omega_\omega)$$

telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$f_i \in \mathbb{F}(T), \deg(f_i) \leq \tau i \text{ et } D^i f_i \in \mathbb{F}[T].$$

Remarque 8. Toute série formelle $f(Z) = \sum_{n \geq 0} a_n Z^n$ de $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$ induit une fonction, que l'on notera $\tilde{f}$, définie sur $\mathcal{D}_{\omega, \min(-\tau, \deg_{\omega}(D))}$ à valeurs dans Ω_{ω} en posant pour tout $z \in \mathcal{D}_{\omega, \min(-\tau, \deg_{\omega}(D))}$

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Lemme 9. Soit $a \in \mathcal{D}_{\omega, \min(-\tau, \deg_{\omega}(D))}$. L'application $\sigma_a : \mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D} \rightarrow \Omega_{\omega}$, $f \mapsto \tilde{f}(a)$ est un morphisme d'anneau continu.

Démonstration. L'application σ_a est évidemment additive. Pour tout $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$, on a l'inégalité

$$\deg_{\omega}(\tilde{f}(a)) \leq (\deg_{\omega}(a) - \min(-\tau, \deg_{\omega}(D))) \text{ord}_0(f)$$

; ce qui montre la continuité de σ_a en 0. Clairement, σ_a est multiplicatif sur les monômes de $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$. Par continuité et additivité, on obtient la multiplicativité de σ_a sur $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$. $\square$

Le lemme suivant est trivial

Lemme 10. Soit $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$ et $a \in \mathbb{F}[T]$ non nul. Alors af et f/a appartiennent respectivement à $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau + \deg(a), D}$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, aD}$. Si un polynôme D_1 de $\mathbb{F}[T]$ divise D , alors $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D_1}$ est inclus dans $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$.

Les propriétés algébriques et topologiques de $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$ sont résumées dans la

Proposition 11. L'ensemble $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$ est un sous anneau complet de $\mathbb{F}(T)[[X]]$.

Démonstration. La série formelle constante 1 appartient à $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$. La stabilité par addition de $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$ étant évidente, il suffit de vérifier la stabilité pour la multiplication. Posons

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i X^i \text{ et } g = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i X^i.$$

Ecrivons

$$f(X)g(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i X^i \text{ avec } h_i = \sum_{k=0}^i f_k g_{i-k}.$$

On a

$$\deg(h_i) \leq \max_{k \in [0, i]} \deg(f_k g_{i-k}) \leq \max_{k \in [0, i]} \tau k + \tau(i-k) \leq \tau i,$$

et

$$D^i h_i = \sum_{k=0}^i D^k f_k D^{i-k} g_{i-k} \in \mathbb{F}[T].$$

Pour montrer la complétude de l'anneau $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$, il suffit de vérifier qu'il est fermé. Considérons une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$ convergeant dans $\mathbb{F}(T)[[X]]$ vers la série formelle f . Écrivons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(X) = \sum_{k \geq 0} a_{n,k} X^k$ et $f = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N_k$, on ait $a_{n,k} = a_k$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^k a_{k,n} \in \mathbb{F}[T]$ et $\deg(a_{k,n}) \leq \tau k$, on a

$$\deg(a_k) \leq \tau k \text{ et } D^k a_k \in \mathbb{F}[T].$$

$\square$

On en déduit le

Corollaire 12. Soit f une série formelle de $a + X\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$ avec $a \in \mathbb{F}[T] \setminus \{0\}$. Alors f est inversible dans $(\mathbb{F}(T))[[X]]$ et son inverse appartient à $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau + \deg(a), aD}$.

Démonstration. Posons $f(X) = a + g(X)$ avec $g \in X\mathcal{M}_{\mathbb{F}, \tau, D}$. On a $f(X) = a(1 + \frac{g(X)}{a})$. La série formelle f est inversible dans $(\mathbb{F}(T))[[X]]$ d'inverse

$$\frac{1}{f(X)} = a \sum_{n \geq 0} \left(\frac{g(X)}{a} \right)^n.$$

Le Lemme 10 et la proposition précédente permettent de conclure. $\square$

Soit $f \in \mathcal{M}_{\omega, \tau, D}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on écrira

$$f^k(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_{k,i} X^i.$$

D'après ce qu'il précède, f^k appartient à $\mathcal{M}_{\omega, \tau, D}$.

La hauteur du polynôme $P \in (\mathbb{F}(T))[X]$,

$$P(X) = \sum_{i=0}^m p_i X^i \quad (p_i \in \mathbb{F}(T)),$$

est le réel

$$\text{ht}(P) = \max_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket} \deg(p_i).$$

Fixons pour le moment un entier naturel δ .

Lemme 13. *Il existe un entier naturel μ_δ , tel que pour toute série formelle f de $\mathcal{M}_{\omega, \tau, D}$, il existe des polynômes $P_{\delta,0}, \dots, P_{\delta,\delta}$ non tous nuls de $(\mathbb{F}[T])[X]$ de degré en X inférieur à δ et de hauteur inférieure à μ_δ ayant la propriété que*

$$\text{ord}_0(H_{\delta,X}(f(X))) \geq \delta^2 + \delta,$$

où $H_{\delta,X}(Z) = \sum_{k=0}^{\delta} P_{\delta,k}(X) Z^k$.

Démonstration. Pour tout $k \in \llbracket 0, \delta \rrbracket$, on considère les polynômes

$$P_{\delta,k}(X) = \sum_{l \in \llbracket 0, \delta \rrbracket} p_{\delta,k,l} X^l \quad (p_{\delta,k,l} \in \mathbb{F}[T]).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\delta} P_{\delta,k}(X) f^k(X) &= \sum_{k=0}^{\delta} \left(\sum_{l \in \llbracket 0, \delta \rrbracket} p_{\delta,k,l} X^l \sum_{i \in \mathbb{N}} f_{k,i} X^i \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i X^i \end{aligned}$$

avec

$$c_i = \sum_{k=0}^{\delta} \sum_{l \in \llbracket 0, \min(i, \delta) \rrbracket} p_{\delta,k,l} f_{k,i-l} \quad (2)$$

Ainsi, pour que la série formelle $\sum_{k=0}^{\delta} P_{\delta,k}(X) f^k(X)$ appartienne à $\mathcal{I}^{\delta^2+\delta}$, il suffit que pour tout entier naturel i strictement inférieur à $\delta^2 + \delta$, le coefficient c_i soit nul. Par la Proposition 11, on a pour tout $i \in \llbracket 0, \delta^2 + \delta \rrbracket$,

$$D^{\delta^2+\delta} c_i \in \mathbb{F}[T] \text{ et } \deg(c_i) \leq \tau(\delta^2 + \delta).$$

Un lemme de Siegel (voir [1, Lemme 11]) montre qu'il existe $\mu_{\delta, \tau} \in \mathbb{N}$ et un polynôme non nul P_f de $(\mathbb{F}[T])[X][Z]$ de degré en X inférieur à δ et de hauteur inférieure à $\mu_\delta = \tau\delta^3(\delta+1)^2 + 1$ tels que $\text{ord}_0(P_f(f)) \geq \delta^2 + \delta$. $\square$

Dans la suite, $\mathfrak{q}$ désigne un entier supérieur à 2.

Lemme 14. *Soit $P_0, \dots, P_\delta$ des polynômes de $(\mathbb{F}[T])[X]$, x et y_k ($k \in \mathbb{N}$) des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ et $\tilde{\mathfrak{m}}$ un réel positif. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, y_k est de taille inférieure à $\tilde{\mathfrak{m}}\mathfrak{q}^k$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$t\left(\sum_{l=0}^{\delta} P_l(x^{\mathfrak{q}^{n_k}}) y_{n_k}^l\right) \leq \max_{j \in \llbracket 0, \delta \rrbracket} \text{ht}(P_j) + \delta(t_{\mathbb{F}}(x) + \tilde{\mathfrak{m}})\mathfrak{q}^{n_k}.$$

Démonstration. Soit $j \in \llbracket 0, \delta \rrbracket$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \deg \left(\left(\sigma \left(\sum_{l=0}^{\delta} P_l(x^{q^{n_k}}) y_{n_k}^l \right) \right) \right) &\leq \max_{j \in \llbracket 0, \delta \rrbracket} \text{ht}(P_j) + \delta q^k \max(0, \overline{\text{ht}}) + \delta \tilde{m} q^{n_k} \\ &\leq \max_{j \in \llbracket 0, \delta \rrbracket} \text{ht}(P_j) + \delta(\tilde{m} + \max(0, \overline{\text{ht}})) q^{n_k}. \end{aligned}$$

De plus, $(\rho^{q^{n_k}}(x) \rho_{\mathbb{F}}(y_{n_k}))^{\delta}$ est un dénominateur de $\sum_{l=0}^{\delta} P_l(x^{q^{n_k}}) y_{n_k}^l$. Puisque

$$\deg \left((\rho^{q^{n_k}}(x) \rho_{\mathbb{F}}(y_{n_k}))^{\delta} \right) \leq \delta q^{n_k} (t_{\mathbb{F}}(x) + \tilde{m}),$$

le lemme s'en suit. $\square$

Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{M}_{\omega, \tau, D}$. Par le principe des tiroirs, il existe une suite extraite $\underline{f}_{\delta} = (f_{\delta, n_k})_k$ et des polynômes $P_{\delta, 0}, \dots, P_{\delta, \delta}$ de $(\mathbb{F}[T])[X]$ de hauteurs inférieures à μ_{δ} ayant la propriété que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\text{ord}_0(H_{\delta, \underline{f}_{\delta}, X}(f_{\delta, n_k}(X))) \geq \delta^2 + \delta,$$

où $H_{\delta, \underline{f}_{\delta}, X}(Z) = \sum_{l=0}^{\delta} P_{\delta, l}(X) Z^l$.

On suppose qu'il existe une infinité d'entiers δ tels que la suite $(\text{ord}_0(H_{\delta, \underline{f}_{\delta}, X}(f_{n_k}(X))))_k$ est majorée.

Quitte à extraire une sous-suite de $\underline{f}_{\delta}$, on peut supposer (encore par le principe des tiroirs) qu'il existe un entier $u \geq \delta^2 + \delta$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{ord}_0(H_{\delta, \underline{f}_{\delta}, X}(f_{\delta, n_k}(X))) = u.$$

Notons β un élément de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul avec $\deg_{\omega}(\beta) < \min(-\tau, \deg_{\omega}(D))$.

Pour tout entier naturel k , on pose $\mathfrak{r}_k = \tilde{H}_{\delta, \underline{f}_{\delta}, \beta q^{n_k}}(\tilde{f}_{n_k}(\beta^{q^{n_k}}))$.

Proposition 15. *Il existe un réel $\mathfrak{c}_{\underline{f}_{\delta}}$ et un entier $k_{\underline{f}_{\delta}}$ tel que pour tout entier $k \geq k_{\underline{f}_{\delta}}$, on ait*

$$\deg_{\omega}(\mathfrak{r}_k) = \mathfrak{c}_{\underline{f}_{\delta}} + u q^{n_k} \deg_{\omega}(\beta).$$

En particulier, $\mathfrak{r}_k$ est non nul.

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, écrivons

$$f_{n_k}^i(X) = \sum_{l \in \mathbb{N}} f_{n_k, i, l} X^l.$$

On a (par l'Égalité 2)

$$\mathfrak{r}_k = \sum_{i \geq u} c_{k, i} X^i, \text{ avec } c_{k, i} = \sum_{j=0}^{\delta} \sum_{l \in \llbracket 0, \min(i, \delta) \rrbracket} p_{\delta, k, l} f_{n_k, j, i-l}.$$

Pour tout $i \geq u$, on a

$$\deg(c_i) \leq \tau i + \mu_{\delta}.$$

Comme $D^i c_i$ appartient à $\mathbb{F}[T]$, on a

$$\deg_{\omega}(c_i) \leq -i \deg_{\omega}(D).$$

Puisque par définition de u , $c_u \neq 0$ et que $D^u c_u \in \mathbb{F}[T]$, on a $\deg(c_u) \geq -u \deg(D)$ et

$$\deg_{\omega}(c_u) \geq -(\tau + \deg(D))u - \mu_{\delta}$$

si $\omega \neq +\infty$. Dans les deux cas $\omega = \infty$ et $\omega \neq \infty$, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $i > u$,

$$\begin{aligned} \deg_{\omega}(c_u \beta^{u q^{n_k}}) - \deg_{\omega}(c_i \beta^{i q^{n_k}}) &\geq q^{n_k} \deg_{\omega}(\beta)(u - i) - (\tau + \deg(D) + \deg_{\omega}(D))u - \mu_{\delta} \\ &\geq -q^{n_k} \deg_{\omega}(\beta) - (\tau + \deg(D) + \deg_{\omega}(D))u - \mu_{\delta} \end{aligned}$$

Comme $\deg_\omega(\beta) < 0$, il existe un entier $k_{\underline{f}_\delta}$ tel que pour entier $k > k_{\underline{f}_\delta}$, on ait pour tout entier $i > u$, $\deg_\omega(c_u \beta^{uq^{n_k}}) > \deg_\omega(c_i \beta^{iq^{n_k}})$. On en déduit que

$$\deg_\omega(\mathbf{r}_k) = \deg_\omega(c_u \beta^{uq^{n_k}}) = \deg_\omega(c_u) + uq^{n_k} \deg_\omega(\beta)$$

□

On suppose qu'il existe une extension finie K de $\mathbb{F}(T)$ de degré Ξ telle que

($H^{(1)}$) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}_k(\beta^{q^k}) = a_k \tilde{f}_0(\beta) + b_k$ où $(a_k, b_k) \in K^2$;

($H^{(2)}$) il existe un réel m tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t_{\mathbb{F}}(a_k) \leq mq^k$ et $t_{\mathbb{F}}(b_k) \leq mq^k$.

Théorème 16. *Supposons qu'il existe une infinité d'entiers naturels δ tels que la suite $(\text{ord}_0(H_{\delta, \underline{f}_\delta, X}(f_{\delta, n_k}(X))))_k$ soit majorée. Alors $f_0(\beta)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$.*

Démonstration. Posons $t = t_{\mathbb{F}}(\tilde{f}_0(\beta))$. Quitte à considérer le corps $K(\beta)$ au lieu de K , on peut supposer que β est un élément de K . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$t_{\mathbb{F}}(\tilde{f}_k(\beta^{q^k})) \leq t + 2mq^k \leq (t + 2m)q^k.$$

Soit δ un entier naturel tel que la suite $(\text{ord}_0(H_{\delta, \underline{f}_\delta, X}(f_{\delta, n_k}(X))))_k$ soit majorée. D'après la Proposition 14, on

$$t_{\mathbb{F}}(\mathbf{r}_k) \leq \mu_\delta + \delta(t_{\mathbb{F}}(\beta) + (t + 2m)q^{n_k}).$$

L'inégalité de la taille et la Proposition 15, appliquées à $\mathbf{r}_k$ qui est non nul, impliquent que

$$\deg_\omega(c_u) + uq^{n_k} \deg_\omega(\beta) \geq -2\Xi(\mu_\delta + \delta(t_{\mathbb{F}}(\beta) + (t + 2m)q^{n_k})).$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient que

$$\deg_\omega(\beta) \geq \frac{-2\Xi\delta}{u}(t + 2m).$$

Se rappelant que $u \geq \delta^2 + \delta$, on aboutit à

$$\deg_\omega(\beta) \geq \frac{-2\Xi}{\delta + 1}(t + 2m).$$

Comme δ peut être choisi aussi grand que l'on veut, on en déduit que $\deg_\omega(\beta) \geq 0$, en contradiction avec l'hypothèse $\deg_\omega(\beta) < 0$. □

4. UN CRITÈRE DE TRANSCENDANCE POUR LES SÉRIES FORMELLES

Soit $(\mathcal{K}, |\cdot|)$ un corps valué complet non-archimédien algébriquement clos dont le corps résiduel est infini, R et r des réels appartenant à $|\mathcal{K}|$ tels que $r < R$. Nous présentons un critère de transcendance pour les séries formelles qui nous sera utile dans la suite. Pour les notions d'analyticité m  romorphie abordées dans ce paragraphe, on pourra se rapporter à l'Appendice en fin d'article. Pour $r \in |\mathcal{K}|$, on note $\mathcal{D}_r$ le disque ouvert $\mathcal{D}_r := \{z \in \mathcal{K} \mid |z| < r\}$

Lemme 17. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n une série formelle de $\mathcal{K}[[Z]]$ qui induit une série entière sur $\mathcal{D}_r$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{K}[[Z]]$ et que la suite des fonctions induites sur $\mathcal{D}_r$ converge uniformément vers une série entière g . Alors g est la fonction induite par f sur $\mathcal{D}_r$.*

Démonstration. Posons $f(Z) = \sum_{k \geq 0} a_k Z^k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(Z) = \sum_{k \geq 0} a_{n,k} Z^k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier N_k tel que pour tout $n \geq N_k$, $a_k = a_{n,k}$. Posons $g(z) = \sum_{k \geq 0} b_k z^k$. Par le principe du maximum [27, Theorem 42.2], on a pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$

$$|b_k - a_{n,k}| \leq r^{-k} \|f_n - g\|_r,$$

et ainsi pour tout $n \geq N_k$, on a

$$|b_k - a_k| \leq r^{-k} \|f_n - g\|_r.$$

Puisque la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers g sur $\mathcal{D}_r$, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $b_k = a_k$. □

Théorème 18. Soit $(r_n)_n$ une suite strictement croissante de $|\mathcal{K}^\times| \cap [r, R[$ et $(f_n)_n$ une suite de séries formelles de $\mathcal{K}[[Z]]$ qui converge vers f dans $\mathcal{K}[[Z]]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série formelle f_n induit une série entière $\tilde{f}_n$ sur $\mathcal{D}_r$. On suppose que la suite $(\tilde{f}_n)_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}_r$, disons vers $\hat{f}$. Si pour tout entier s , il existe une fonction méromorphe g_s définie sur $\mathcal{D}_{r_s}$ dont $\hat{f}$ est la restriction sur $\mathcal{D}_r$ et s'il existe une partie S_s de $\mathcal{D}_{r_s}$ de cardinal au moins s telle que pour tout entier $n \geq h_s$ la fonction g_s admet un pôle en tout point de S_s , alors la série formelle f est transcendante sur $\mathcal{K}(Z)$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Il existe des polynômes $P_0, \dots, P_s$ de $\mathcal{K}[Z]$ avec $P_s \neq 0$ tels que

$$\sum_{i=0}^s P_i(Z) f^i(Z) = 0.$$

Posons $d_s = 1 + \deg(P_s)$. Par hypothèse, la suite des séries entières $(f_n)_n$ converge sur $\mathcal{D}_r$ vers une fonction analytique $\hat{f}$ qui est la restriction sur $\mathcal{D}_r$ de g_{d_s} . Par le lemme précédent, $\tilde{f}$ est la série entière sur $\mathcal{D}_r$ induite par f . Ainsi, on a pour tout $z \in \mathcal{D}_r$

$$\sum_{i=0}^s P_i(z) \tilde{f}^i(z) = 0.$$

Comme g_{d_s} est méromorphe sur $\mathcal{D}_{r_{d_s}}$, il existe des fonctions analytiques f_1 et f_2 sur $\mathcal{D}_{r_{d_s}}$ telles que $g_{d_s} = f_1/f_2$. Pour tout $z \in \mathcal{D}_{r_{d_s}}$ qui n'est pas un pôle de g_{d_s} , on a

$$f_2^s(z) \sum_{i=0}^s P_i(z) g_{d_s}^i(z) = \sum_{i=0}^s P_i(z) f_1^i(z) f_2^{s-i}(z).$$

Comme la fonction analytique $\sum_{i=0}^s P_i(z) f_1^i(z) f_2^{s-i}(z)$ est nulle sur $\mathcal{D}_r$, par le théorème de prolongement analytique, elle est nulle sur $\mathcal{D}_{r_{d_s}}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{D}_{r_{d_s}}$ qui n'est pas un pôle de g_{d_s} , on a

$$\sum_{i=0}^s P_i(z) g_{d_s}^i(z) = 0.$$

Par le Lemme 26, g_{d_s} admet au plus $\deg(P_s)$ pôles sur $\mathcal{D}_{r_{d_s}}$. Mais ceci est contradictoire, puisque g_{d_s} a au moins $d_s > \deg(P_s)$ pôles sur $\mathcal{D}_{r_{d_s}}$. $\square$

5. APPLICATIONS

Soit $\mathbf{l}(Z)$ et $\mathbf{m}(Z)$ deux séries formelles de $Z\mathbb{F}[[Z]]$ non nulles. Ces séries formelles induisent sur $\mathcal{D}_{\omega,0}$ deux séries entières que l'on note respectivement $\tilde{\mathbf{l}}$ et $\tilde{\mathbf{m}}$ suivant notre convention vue dans le paragraphe précédent. La remarque triviale que pour tout $z \in \mathcal{D}_{\omega,0}$, on a

$$\deg_{\omega}(\tilde{\mathbf{m}}(z)) = \text{ord}_0(\mathbf{m}) \deg_{\omega}(z)$$

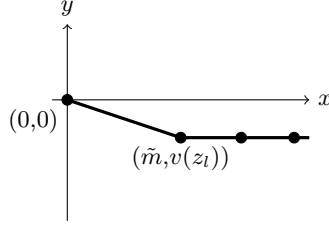
a pour conséquence le

Lemme 19. Soit $l \in \mathbb{N}^*$ et $\tilde{m} = \text{ord}_0(\mathbf{m})$. Posons

$$\gamma = \begin{cases} 1/T & \text{si } \omega = \infty, \\ T - \omega & \text{si } \omega \neq \infty. \end{cases}$$

- (1) L'équation $\tilde{\mathbf{m}}(z) = \gamma^{1/q^l}$ admet, comptées avec multiplicité, exactement $\tilde{m}$ solutions dans $\mathcal{D}_{\omega,0}$, toutes de même valuation. On note $\mathfrak{Z}_{\mathbf{m},l}^{\subset} \mathcal{D}_{\omega,0}$ l'ensemble de ces solutions, et on en fixe une, notée $\mathfrak{z}_l$.
- (2) La suite $(\deg_{\omega}(\mathfrak{z}_l))_{l \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, indépendamment du choix effectué.

Démonstration. Posons $z_l = \gamma^{1/q^l}$, qui est un élément non nul de $\mathcal{D}_{\omega,0}$. Le polygone de Newton de $1 - \tilde{\mathbf{m}}(z)/z_l$ est de la forme



c'est-à-dire un unique segment de pente non nulle reliant $(0,0)$ à $(\tilde{m}, v(z_l))$, suivi d'un segment horizontal. D'après [17, Proposition 2.9], un tel segment correspond à exactement $\tilde{m}$ zéros dans $\mathcal{D}_{\omega,0}$, comptés avec multiplicité, tous de valuation $-v(z_l)/\tilde{m}$. Ces zéros sont exactement les solutions de $\tilde{\mathbf{m}}(z) = z_l$; on en fixe une, notée $\mathfrak{z}_{l,\omega}$. Ceci prouve le premier point.

Comme $z_l^{q^l} = \gamma$, on a

$$\deg_{\omega}(\mathfrak{z}_l) = \frac{\deg_{\omega}(\tilde{\mathbf{m}}(\mathfrak{z}_l))}{\tilde{m}} = \frac{\deg_{\omega}(z_0)}{\tilde{m}} = \frac{\deg_{\omega}(\gamma)}{q^l \tilde{m}}.$$

ce qui donne la stricte croissance de la suite $(\deg_{\omega}(\mathfrak{z}_{l,\omega}))_l$. $\square$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$D_n^{\omega}(Z) = \begin{cases} 1 - T \mathbf{m}^{q^n}(Z) & \text{si } \omega = \infty, \\ \mathbf{m}^{q^n}(Z) + \omega^{q^n} - T & \text{si } \omega \neq \infty. \end{cases}$$

Pour $\mathfrak{d} \in \{0, 1\}$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_k^{\omega, \mathfrak{d}}(Z) = \begin{cases} D_k^{\omega}(Z) & \text{si } \mathfrak{d} = 0, \\ \prod_{l=1}^k D_l^{\omega}(Z) & \text{si } \mathfrak{d} = 1, \end{cases}$$

et on définit la série formelle $F_k^{\omega, \mathfrak{d}}(Z)$ par

$$F_k^{\omega, \mathfrak{d}}(Z) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_{n+kd} \frac{\mathbf{l}^{q^n}(Z)}{P_n^{\omega, \mathfrak{d}}(Z)^s}.$$

On note $\mathfrak{Z}_m = \bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{Z}_{m,l}$.

Lemme 20. Soit $z \in \mathcal{D}_{\omega,0} \setminus \mathfrak{Z}_m$. Alors, la série $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_{n+kd} \frac{\tilde{\mathbf{l}}^{q^n}(z)}{\tilde{P}_n^{\omega, \mathfrak{d}}(z)^s}$ converge.

Démonstration. Puisque la suite $(\deg_{\omega}(\mathbf{m}^{q^n}(z)))_l$ est strictement décroissante, la suite $(\deg_{\omega}(D_l^{\omega}(z)))_l$ est nulle à partir d'un certain rang $N_0(z)$. Posant $m_z = \min_{0 \leq l < N_0(z)} \deg_{\omega}(\tilde{D}_l^{\omega}(z))$ (qui est bien fini par hypothèse), on a $\deg_{\omega}(\tilde{P}_n^{\omega, \mathfrak{d}}(z)) \geq nm_z$. Ainsi

$$\deg_{\omega} \left(\frac{\tilde{\mathbf{l}}^{q^n}(z)}{\tilde{P}_n^{\omega, \mathfrak{d}}(z)} \right) \leq -q^n - nm_z,$$

qui tend vers $-\infty$ quand n tend vers ∞ . $\square$

Lemme 21. Pour tout $\mathfrak{d} \in \{0, 1\}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $F_k^{\omega, \mathfrak{d}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}, 1, T^{q^d} - T}$.

Démonstration. La série $\mathbf{m}(Z)$ appartient à $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, 0, 1}$. D'après le Lemme 10, $D_n^{\omega}(Z)$ appartient à $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, 1, 1}$ si $\omega = \infty$, et à $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, 1, T - \omega^{q^n}}$ si $\omega \neq \infty$. Par la Proposition 12, $D_n^{\omega}(Z)$ est inversible et son inverse appartient au même anneau, qui est inclus dans $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, 1, T^{q^d} - T}$ par le Lemme 10 (les polynômes 1 et $T - \omega^{q^n}$ divisent $T^{q^d} - T$, puisque $\omega^{q^d} = \omega$). Le produit $\prod_{l=1}^n D_l^{\omega}(Z)$ est donc également inversible d'inverse dans $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, 1, T^{q^d} - T}$. Comme $\mathbf{l}^{q^n}(Z) \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}, 1, 1}$, la Proposition 11 donne le résultat. $\square$

Pour une série (formelle ou entière) $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, on note $\mathbf{S}_n(f) = \sum_{k=0}^n u_k$ sa n^e somme partielle. Posons $\rho_{\omega} = q^d$ si $\omega = \infty$, et $\rho_{\omega} = 1$ si $\omega \neq \infty$.

Dans la suite, on suppose que $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \eta_{n+1} - \eta_n$ est finie. On pose $\mathbf{M} = 2 + E(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \eta_{n+1} - \eta_n)$.

Proposition 22. *Pour tout $\mathfrak{d} \in \{0, 1\}$, la suite $(F_k^{\omega, \mathfrak{d}})_{k \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence transcendante sur $(\mathbb{F}_q(T))(Z)$.*

Démonstration. Puisque l'ensemble $E_{-1} = \{\mathcal{S}_{M-1}(F_k^{\omega, \mathfrak{d}}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini, par le principe des tiroirs, il existe un entier i_0 tel que l'ensemble $E_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid \mathcal{S}_{M-1}(F_{i_0}^{\omega, \mathfrak{d}}) = \mathcal{S}_{M-1}(F_k^{\omega, \mathfrak{d}})\}$ est infini. Par récurrence, on construit une suite strictement croissante d'entiers naturels $(i_n)_n$ telle que l'ensemble

$$E_n = \{k \in E_{n-1} \mid \mathcal{S}_{nM-1}(F_{i_n}^{\omega, \mathfrak{d}}) = \mathcal{S}_{nM-1}(F_k^{\omega, \mathfrak{d}})\}$$

est infini. En particulier,

$$\text{ord}_0(F_{i_n}^{\omega, \mathfrak{d}}(Z) - F_{i_{n-1}}^{\omega, \mathfrak{d}}(Z)) \geq q^{(n+1)M}.$$

et la suite $(F_{i_n}^{\omega, \mathfrak{d}})_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{M}_{\mathbb{F}, 1, Tq^d - T}$, donc convergente vers une série formelle $F^{\omega, \mathfrak{d}}$. Soit n un entier naturel. Par le Lemme 9, la fonction induite par $F_{i_n}^{\omega, \mathfrak{d}}$ sur $\mathcal{D}_{\omega, -1}$ est la fonction

$$\widetilde{F}_{i_n}^{\omega, \mathfrak{d}}(z) = \sum_{l \geq 0} \varepsilon_{l+i_n d} \frac{\widetilde{l}^{q^l}(z)}{\widetilde{P}_l^{\omega, \mathfrak{d}}(z)^s}.$$

Soit $z \in \mathcal{D}_{\omega, -1}$. On a $\deg_{\omega}(\widetilde{P}_n^{\omega, \mathfrak{d}}(z)) = 0$ et ainsi

$$\deg_{\omega} \left(\frac{\widetilde{l}^{q^n}(z)}{\widetilde{P}_n^{\omega, \mathfrak{d}}(z)} \right) \leq -q^n,$$

la suite $(\widetilde{F}_{i_n}^{\omega, \mathfrak{d}})_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}_{\omega, 1}$ vers une fonction analytique $\widehat{F^{\omega, \mathfrak{d}}}$ sur $\mathcal{D}_{\omega, 1}$. Soit $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}$. Par hypothèse sur la suite $(\eta_n)_n$, il existe au moins $\mathfrak{s}$ entiers naturels $\eta_{1, n, \mathfrak{s}}, \dots, \eta_{\mathfrak{s}, n, \mathfrak{s}}$ strictement inférieurs à $\mathfrak{s}M$ tels que chaque $\varepsilon_{i, n, \mathfrak{s}}$ ($i \in \llbracket 1, \mathfrak{s} \rrbracket$) est non nuls. Par le principe des tiroirs, il existe un ensemble infini $\mathfrak{J}_{\mathfrak{s}}$ d'entiers naturels tel que pour tout $i \in \llbracket 1, \mathfrak{s} \rrbracket$, il existe un entier naturel $\widehat{\eta_{i, \mathfrak{s}}}$ ayant la propriété que $\widehat{\eta_{i, \mathfrak{s}}} = \eta_{i, n, \mathfrak{s}}$ pour tout $n \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{s}}$. On pose $r_{\mathfrak{s}} = \deg_{\omega}(\mathfrak{z}_{\widehat{\eta_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}}+1}})$. Maintenant, on fixe $n \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{s}}$ et $i \in \llbracket 1, \mathfrak{s} \rrbracket$. Pour tout $z \in \mathcal{D}_{\omega, r_{\mathfrak{s}}} \setminus (\mathcal{D}_{\omega, r_{\mathfrak{s}}} \cap \mathfrak{J}_m)$, on a

$$\frac{\prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} \widetilde{D}_l^{\omega}(z)}{\widetilde{P}_j^{\omega, \mathfrak{d}}(z)} = \frac{\prod_{l=\mathfrak{d}(\widehat{\mathfrak{s}}+1)+(1-\mathfrak{d})}^{\mathfrak{s}} \widetilde{D}_l^{\omega}(z)}{\prod_{l=\mathfrak{d}(\widehat{\mathfrak{s}}+1)+j(1-\mathfrak{d})}^j \widetilde{D}_l^{\omega}(z)}$$

Par conséquent, pour $j > \widehat{\eta_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}}}$, la fonction $h_{j, \mathfrak{s}} := z \mapsto \left(\frac{\prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} \widetilde{D}_l^{\omega}(z)}{\widetilde{P}_j^{\omega, \mathfrak{d}}(z)} \right)^s$ se prolonge en une fonction analytique sur $\overline{\mathcal{D}_{\omega, r_{\mathfrak{s}}-1}}$ que l'on note encore $h_{j, \mathfrak{s}}$. Comme pour tout $z \in \overline{\mathcal{D}_{\omega, r_{\mathfrak{s}}-1}}$, on a

$$-q^j \text{ord}_0(\mathfrak{l}) \deg_{\omega}(z) - j \leq \deg_{\omega}(\widetilde{l}^{q^j}(z) h_{j, \mathfrak{s}}(z)) \leq -q^j \text{ord}_0(\mathfrak{l}) r_{\mathfrak{s}-1} + j, \quad (3)$$

la série $g_{n, \mathfrak{s}}(z) := \sum_{j > \widehat{\eta_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}}}} \varepsilon_{j+i_n d} \widetilde{l}^{q^j}(z) h_{j, \mathfrak{s}}(z)$ converge uniformément sur $\overline{\mathcal{D}_{\omega, r_{\mathfrak{s}}-1}}$. Notons $c_{i, n, \mathfrak{s}} = \lim_{z \rightarrow \mathfrak{z}_{\widehat{\eta_{i, \mathfrak{s}}}}} g_{n, \mathfrak{s}}(z)$. On obtient que

$$c_{i, n, \mathfrak{s}} = \sum_{j > \widehat{\eta_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}}}} \varepsilon_{j+i_n d} \widetilde{l}^{q^j}(\mathfrak{z}_{\widehat{\eta_{i, \mathfrak{s}}}}) h_{n, j}(\mathfrak{z}_{\widehat{\eta_{i, \mathfrak{s}}}}) \quad (4)$$

Si $\mathfrak{s}$ est suffisamment grand, toujours par les Estimations 3, les suites

$$(\deg_{\omega}(\widetilde{l}^{q^j}(\mathfrak{z}_{\widehat{\eta_{i, \mathfrak{s}}}}) h_{j, \mathfrak{s}}(\mathfrak{z}_{\widehat{\eta_{i, \mathfrak{s}}}})))_{j > \widehat{\eta_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}}}}$$

sont toutes strictement décroissantes. On en déduit que

$$\deg_{\omega}(c_{i, n, \mathfrak{s}}) \geq \min_{\substack{j \geq \widehat{\eta_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}}} \\ \varepsilon_{j+i_n d} \neq 0}} -q^j \text{ord}_0(\mathfrak{l}) \deg_{\omega}(\mathfrak{z}_{\widehat{\eta_{i, \mathfrak{s}}}}) - j. \quad (5)$$

Encore une fois, les Estimations 3 montrent que la suite de fonctions $(g_{n, \mathfrak{s}})_{n \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{s}}}$ converge uniformément sur $\overline{\mathcal{D}_{\omega, r_{\mathfrak{s}}-1}}$ (vers une fonction analytique que l'on note $g_{\mathfrak{s}}$). Puisque la suite $(\min\{j > \widehat{\eta_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}}} \mid \varepsilon_{j+i_n d} \neq 0\})_{n \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{s}}}$ est bornée par hypothèse sur la suite $(\eta_n)_n$, on en déduit que la suite $(c_{i, n, \mathfrak{s}})_{n \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{s}}}$ converge vers une limite non nulle d'après l'Inégalité 5. Comme

la suite $((\prod_{l=1}^s \widetilde{D}_l^\omega(z))^s \mathcal{S}_{\eta_{s,s}}(\widetilde{F}_{i_n}^{\omega,\mathfrak{d}}(z)))_{n \in \mathfrak{J}_s}$ est constante et analytique sur $\overline{\mathcal{D}_{\omega, r_{s-1}}}$ pour n assez grand, l'égalité, valable pour tout $z \in \mathcal{D}_{\omega, r_{s-1}} \setminus (\overline{\mathcal{D}_{\omega, r_{s-1}}} \cap \mathfrak{Z}_m)$

$$\widetilde{g}_{n,s}(z) = \left(\prod_{l=1}^s \widetilde{D}_l^\omega(z) \right)^s \left(\widetilde{F}_{i_n}^{\omega,\mathfrak{d}}(z) - \mathcal{S}_{\eta_{s,s}}(\widetilde{F}_{i_n}^{\omega,\mathfrak{d}}(z)) \right).$$

montre que la suite $((\prod_{l=1}^s \widetilde{D}_l^\omega(z))^s \widetilde{F}_{i_n}^{\omega,\mathfrak{d}}(z))_{n \in \mathfrak{J}_s}$ converge vers une fonction analytique sur $\overline{\mathcal{D}_{\omega, r_{s-1}}}$. Le fait que

$$\lim_{z \rightarrow \mathfrak{z}_{\eta_{i,s}}} \left(\prod_{l=1}^s \widetilde{D}_l^\omega(z) \right)^s \mathcal{S}_{\eta_{i,s}}(\widetilde{F}_{i_n}^{\omega,\mathfrak{d}}(z)) = 0$$

implique que la suite de fonctions $(\widetilde{F}_{i_n}^{\omega,\mathfrak{d}}(z))_{n \in \mathfrak{J}_s}$ converge vers une fonction méromorphe $\widehat{F}_s$ sur $\overline{\mathcal{D}_{\omega, r_{s-1}}}$ avec des pôles en $\mathfrak{z}_{\eta_{i,s}}$ ($i \in \llbracket 1, s \rrbracket$). Par la Proposition 18, la série formelle $F^{\omega,\mathfrak{d}}$ est transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)(Z)$. $\square$

La proposition suivante, prouvée dans un cadre plus général dans [3, Proposition 25], permet l'usage de la méthode de Mahler en une seule variable dans notre contexte.

Proposition 23. *Soit β_1 et β_2 deux éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive. Il existe $u \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive et une extension finie $\widetilde{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}_q$ tels que β_1 et β_2 appartiennent à $u\widetilde{\mathbb{F}}[[u]]$.*

Démonstration. Notons K le corps $\mathbb{F}_q(T)[\beta_1, \beta_2]$, $\mathcal{O} = \{s \in K \mid v(s) \geq 0\}$ l'anneau de valuation discrète de K associé à v , $\mathfrak{M}$ son idéal maximal et u un paramètre de $\mathcal{O}$. En particulier, u est de valuation strictement positive et est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Le complété $\hat{K}$ de K pour la topologie v -adique est une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)_v$, donc est un corps local. Son corps résiduel k est (à isomorphisme près) une extension finie $\widetilde{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}_q$. L'anneau de valuation $\hat{\mathcal{O}}$ de $\hat{K}$ étant le complété de $\mathcal{O}$ (voir [24]), il est égal à $\widetilde{\mathbb{F}}[[u]]$. Ceci conclut la preuve puisque que β_1 et β_2 appartiennent à $\mathfrak{M}$ qui est inclus dans $u\hat{\mathcal{O}}$. $\square$

Nous montrons maintenant comment la Proposition 22 et le Théorème 16 impliquent les Théorèmes 1, 2 et 3.

Rappelons que dans ce paragraphe, on a supposé que $\varlimsup_{n \rightarrow +\infty} \eta_{n+1} - \eta_n$ est finie.

Soit Log l'un des polylogarithmes déformés considérés dans cet article et α un élément de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ non nul, appartenant au domaine de convergence de Log . Posons $\mathbb{F} = \widetilde{\mathbb{F}}\mathbb{F}_\omega$ et d son degré sur $\mathbb{F}_q$. Le tableau suivant résume, pour chacun des quatre cas, le choix de la place ω , du paramètre δ , de la constante λ , et des valeurs $\mathbf{m}(u)$, $\mathbf{l}(u)$:

$\text{Log}(\alpha)$	Domaine de α	ω	δ	λ	$\mathbf{m}(u)$	$\mathbf{l}(u)$
$\text{Log}_{s,\underline{\mathbf{e}},\mathcal{K}}(\alpha)$	$\mathcal{D}_{\infty,s}$	∞	0	T^s	$1/T$	α/T^s
$\text{Log}_{s,\underline{\mathbf{e}},\mathcal{C}}(\alpha)$	$\mathcal{D}_{\infty,sq/(q-1)}$	∞	1	$T^{sq/(q-1)}$	$1/T$	$\alpha/T^{sq/(q-1)}$
$\text{Log}_{s,\underline{\mathbf{e}},\mathcal{K},\omega}(\alpha)$	$\mathcal{D}_{\omega,0}$	ω	0	1	$T - \omega$	α
$\text{Log}_{s,\underline{\mathbf{e}},\mathcal{C},\omega}(\alpha)$	$\mathcal{D}_{\omega,0}$	ω	1	1	$T - \omega$	α

Pour chacun de ces cas, la Proposition 23 s'applique car $\mathbf{m}(u)$ et $\mathbf{l}(u)$ sont des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive. Elle fournit donc $u \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive, une extension finie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{F}_q$ de degré $d \geq 1$ et des séries $\mathbf{m}$ et $\mathbf{l}$ de $\mathbb{Z}\mathbb{F}[[Z]]$ satisfaisant les conditions du tableau. Par construction de $F_k^{\omega,\delta}$, on a alors

$$\text{Log}(\alpha) = \lambda F_0^{\omega,\delta}(u).$$

Par le Lemme 13, la Proposition 22 et le principe des tiroirs, il existe une suite d'entiers naturels $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(F_{n_k}^{\omega,\delta}(X))_{k \in \mathbb{N}}$ admette une limite $\mathcal{F}$ transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)(X)$, un entier naturel μ_δ , et des polynômes $P_{\delta,0}, \dots, P_{\delta,\delta}$ non tous nuls de $(\mathbb{F}[T])[X]$ de degré en X inférieur à δ et de hauteur inférieure à μ_δ ayant la propriété que

$$\text{ord}_0(H_{\delta,X}(F_{n_k}^{\omega,\delta}(X))) \geq \delta^2 + \delta,$$

où $H_{\delta,X}(Z) = \sum_{k=0}^{\delta} P_{\delta,k}(X)Z^k$. Puisque $\mathcal{F}$ est transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)(X)$, par continuité de la fonction ord_0 , la suite $(\text{ord}_0(H_{\delta,X}(F_{n_k}^{\omega,\delta}(X))))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Un calcul élémentaire, utilisant la définition de $F_k^{\omega,\delta}$ et le choix de $\mathbf{m}, \mathbf{l}$, montre que

$$\widetilde{F}_{n_k}^{\omega,\delta}(u^{q^{n_k d}}) = a_k \widetilde{F}_0^{\omega,\delta}(u) + b_k,$$

où $a_k, b_k \in K$ sont des éléments de $\mathbb{F}(T, \alpha)$ vérifiant les hypothèses $(H^{(1)})$ et $(H^{(2)})$ du Théorème 16. Par le Théorème 16, $\widetilde{F}_0^{\omega,\delta}(u)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$, et ainsi $\text{Log}(\alpha)$ l'est aussi d'après (1).

Cela prouve les Théorèmes 1, 2 et 3.

6. APPENDICE

Soit $(\mathcal{K}, |\cdot|)$ un corps valué complet non-archimédien algébriquement clos dont le corps résiduel est infini. On considère un réel r dans $|\mathcal{K}^\times|$ et on note $\mathcal{D}_r$ le disque ouvert de rayon r centré en 0 :

$$\mathcal{D}_r = \{z \in \mathcal{K} \mid |z| < r\}.$$

Définition 24. Une fonction f de $\mathcal{D}_r$ dans $\mathcal{K}$ est dite *analytique* s'il existe une suite $(a_n)_n$ de $\mathcal{K}$ telle que pour $z \in \mathcal{D}_r$, on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Il est connu [27] que toute fonction analytique f sur $\mathcal{D}_r$ est développable en série de Taylor d'un point z_0 de $\mathcal{D}_r$: il existe une suite $(b_n)_n$ de $\mathcal{K}$ telle que pour tout $z \in \mathcal{D}_r$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

On en déduit que tous les zéros de f sont isolés [12, Corollary 14.11]. Ceci permet de montrer que l'ensemble $\mathbb{A}_r$ des fonctions analytiques sur $\mathcal{D}_r$ est un anneau intègre. Il est complet pour la norme infinie (voir [27, Proposition 42.2]). Le corps des fractions $\mathbb{M}_r$ de $\mathbb{A}_r$ est le *corps des fonctions méromorphes* sur $\mathcal{D}_r$. Les singularités d'une fonction méromorphe sont soit apparente soit un pôle. Si $a \in \mathcal{D}_r$ est un pôle d'une fonction méromorphe f , par [12, Corollary 23.16], il existe $(m, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{K}^\times$ tel que $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = c$. Si f est prolongeable par continuité sur $\mathcal{D}_r$ et son prolongement continu sur $\mathcal{D}_r$, que l'on note encore f , est borné sur $\mathcal{D}_r$, on note $\|f\| = \sup_{z \in \mathcal{D}_r} |f(z)|$ sa norme infinie. Clairement, la norme infinie sur $\mathbb{M}_r$ prolonge la norme uniforme sur $\mathbb{A}_r$. On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de $\mathbb{M}_r$ est une *suite de Cauchy* si pour tout entier n suffisamment grand, la fonction $f_{n+1} - f_n$ est prolongeable par continuité sur $\mathcal{D}_r$, son prolongement par continuité sur ce disque est borné et la suite $(\|f_{n+1} - f_n\|)_n$ converge vers 0. L'auteur remercie Escassut pour lui avoir fourni le schéma de preuve de la proposition suivante que ce dernier a annoncée au détour d'une remarque dans [13, Chapter C].

Proposition 25. *Le corps $\mathbb{M}_r$ est complet pour la norme infinie.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy et N un entier tel que pour tout entier $n \geq N$, la fonction $f_{n+1} - f_n$ soit bornée sur $\mathcal{D}_r \setminus (S_{f_{n+1}} \cup S_{f_n})$. Nécessairement, la fonction $f_{n+1} - f_n$ est sans pôle dans $\mathcal{D}_r$. Par [12, Theorem 32.4], la fonction $f_{n+1} - f_n$ est analytique sur $\mathcal{D}_r$. Puisque $\mathbb{A}_r$ est complet et que la série $\sum_{n \geq N} (f_{n+1} - f_n)$ est une série de $\mathbb{A}_r$ absolument convergente, elle converge dans $\mathbb{A}_r$. Ainsi, la suite $(f_n)_n$ converge dans $\mathbb{M}_r$ vers $f_N + \sum_{n=N}^{+\infty} (f_{n+1} - f_n)$. $\square$

Les deux lemmes suivants sont bien connus dans $\mathbb{C}$.

Lemme 26. *Soit $P_0, \dots, P_s$ des polynômes de $\mathcal{K}[z]$, avec P_s non nul et f une fonction méromorphe sur $\mathcal{D}_r$. On suppose que pour tout $z \in \mathcal{D}_r$ qui n'est pas un pôle de f , on a*

$$\sum_{i=0}^s P_i(z) f^i(z) = 0.$$

Alors, f admet au plus $\deg(P_s)$ pôles dans $\mathcal{D}_r$.

Démonstration. Soit $a \in \mathcal{D}_r$ un pôle de f . Il existe $(m, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{K}^\times$ tel que $\lim_{\substack{z \in \mathcal{D}_r \\ z \rightarrow a}} (z - a)^m f(z) = c$. Par continuité,

$$\lim_{\substack{z \in \mathcal{D}_r \\ z \rightarrow a}} \sum_{i=0}^s (z - a)^{ms - mi} P_i(z) ((z - a)^m f(z))^i = \lim_{\substack{z \in \mathcal{D}_r \\ z \rightarrow a}} (z - a)^{ms} \sum_{i=0}^s P_i(z) f^i(z) = 0.$$

Ceci implique que $P(a)c^s = 0$ et donc $P(a) = 0$. $\square$

Lemme 27. Soit $a \in \mathcal{D}_r$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{D}_r$ convergente uniformément vers une fonction f . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ a est un pôle de f_n , alors, a est un pôle de f .

Démonstration. La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ implique qu'il existe $(N, m, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathcal{K}^\times$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $\lim_{\substack{z \in \mathcal{D}_r \\ z \rightarrow a}} (z - a)^m f_n(z) = c$. Par conséquent, par convergence uniforme, la fonction $(z - a)^m f$ tend vers c quand z tend vers a . De plus, par la Proposition 25, f est méromorphe sur $\mathcal{D}_r$. Ainsi, a est bien un pôle de f . $\square$

RÉFÉRENCES

- [1] M. Ably, L. Denis, F. Recher, *Transcendance de l'invariant modulaire en caractéristique finie*, Math. Zeitschrift **231** (1999), 75–89.
- [2] D. Adam, *Transcendance des factorielles de Carlitz-Goss aux places finies*, manuscrit.
- [3] D. Adam, L. Denis, *Indépendance algébrique de polylogarithmes de Carlitz en v -adique*, soumis.
- [4] G. W. Anderson, D. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. Math. **132.1** (1990), 159–191.
- [5] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special Γ -values*, Ann. Math. **160.2** (2004), 237–313.
- [6] J. Bell, N. Bruin, M. Coons, *Transcendence of generating functions whose coefficients are multiplicative*, Trans. American Math. Soc. **364.2**, 933–959.
- [7] P. J. Cahen, J. L. Chabert, *Old problems and new questions around integer-valued polynomials and factorial sequences*, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra, Springer (2006), 89–108.
- [8] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Mathematical Journal **1** (1935), 137–168.
- [9] L. Carlitz, *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Mathematical Journal **3.3** (1937), 503–517.
- [10] L. Denis, *Indépendance algébrique des dérivées d'une période du module de Carlitz*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **69.1** (2000), 8–18.
- [11] L. Denis, *Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique p* , Bull. Austral. Math. Soc. **74.3** (2006), 461–470.
- [12] A. Escassut, *Value distribution in p analysis*, World Scientific (2016).
- [13] A. Escassut, *p -adic analytic functions*, World Scientific (2021).
- [14] Y. Flicker, *Algebraic independence by a method of Mahler*, J. Australian Math. Soc. **27.2** (1979), 173–188.
- [15] J. M. Geijssels, *Transcendence in fields of positive characteristic*, Acad. Proefschr., Amsterdam, (1978).
- [16] D. Goss, *The Γ -function in the arithmetic of function fields*, Duke Math. J. **66** (1988), 163–191.
- [17] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **35**, Springer Berlin (1996).
- [18] P. Halmos, *Naïve set theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.
- [19] A. Goto, T. A. Tanaka, *Algebraic independence of the values of functions satisfying Mahler type functional equations under the transformation represented by a power relatively prime to the characteristic of the base field*, J. Numb. Theo. **184** (2018), 384–410.
- [20] R. Harada, *On the period interpretation for some special values of Thakur hypergeometric functions*, pré-publication.
- [21] A. N. Kochubei, *Polylogarithms and a zeta function for finite places of a function field*, Ultrametric functional analysis, Contemp. Math. **384** (2005) Amer. Math. Soc., 157–165.
- [22] K. K. Kubota, *On a transcendence problem of K. Mahler*, Canadian J. Math. **29.3** (1977), 638–647.
- [23] V. Laohakosol, K. Kongsakorn, P. Ubolsri, *Some transcendental elements in positive characteristic*, Science Asia **26** (2000), 39–48.
- [24] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Springer (1995).
- [25] Ku. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics **1631** (1996).

- [26] F. Pellarin, *An introduction to Mahler's method for transcendence and algebraic independence*, *t*-Motives : Hodge structures, transcendence and other motivic aspects, European Math. Soc. pub. (2020), 297–349.
- [27] W.H. Schikhof, *Ultrametric Calculus* Cambridge University Press (1982).
- [28] A. Thiery, *Indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes d'un module de Drinfeld*, The Arithmetic of Function Fields, Walter de Gruyter (1992), 265–284.
- [29] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$* , Duke Math. J. **8.4** (1941), 701–720.
- [30] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, II*, Duke Math. J. **10** (1943), 587–594.
- [31] J.Y. Yao, *Carlitz-Goss gamma function, Wade's method, and transcendence*, Journal f/ur die reine und angewandte Mathematik **579** (2005), 175–193.
- [32] J.Y. Yao, *Some transcendental functions over function fields with positive characteristic*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **334** (2002), 939–943.
- [33] J. Yu, *Transcendence theory over function fields*, Duke Math. J. **52** (1985), 517–527.
- [34] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic p* , Annals Math. **134.1** (1991), 1–23.

TAHITI, FRANCE

Email address: david.adam.tahiti@outlook.fr