

Title: SN1987A y la masa del neutrino: Sincronización de eventos multimensajero

Abstract

En este documento se analiza el evento multimensajero SN1987A desde el punto de vista de la relatividad especial de campos. Obtendremos primero la velocidad de los neutrinos que, junto con la estimación de su energía cinética, nos permitirá dar una idea de su masa. También se predecirán las características del próximo evento de Betelgeuse y se dan relaciones para otros eventos multimensajeros.

Autor: Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Este proyecto precisa de financiación, no dude en contactar para apoyarlo.
This project requires funding, please do not hesitate to contact for supporting us.

Málaga, 23 de Noviembre de 2023. Revisado a 30 de Septiembre de 2025.

Table of Contents

Introducción.....	2
Factores de Lorentz generalizados.....	3
Sincronización de eventos multimensajero no simultáneos.....	4
Eventos neutrino-fotón.....	5
Eventos fotón-gravitón.....	6
Eventos neutrino-gravitón (tentativo).....	7
Esquema de distancias.....	8
SN1987A.....	8
GW170817.....	8
Betelgeuse.....	9
Evento multimensajero SN1987A: potenciales gravitatorios.....	9
Tiempos de tránsito.....	10
Masa de los neutrinos.....	11
Evento multimensajero GW170817.....	12
Evento multimensajero SN1987A: potenciales de inercia.....	14
Extrapolación a betelgeuse.....	14
Comentarios finales.....	15
Anexo I: Cálculo de distancias en la bóveda celeste.....	16
SN1987A.....	16
GW170817.....	17
Betelgeuse.....	17
Anexo II: Halo de materia oscura en la vía láctea.....	18
Anexo III: Expresión del potencial gravitatorio.....	18
Anexo IV: Cálculo del potencial.....	19
Potencial de una esfera en coordenadas esféricas y densidad constante.....	21

Potencial de una esfera en coordenadas esféricas y densidad variable.....	22
Anexo V: Potencial inducido.....	24
Aplicación a la vía láctea.....	25
Anexo VI: Agujeros negros primordiales y el impulsor dinámico antigravitatorio.....	26
Anexo VII: Cota a la masa de los neutrinos.....	27
Anexo VIII: Cambio de sistema de referencia.....	28
Anexo IX: Sincronización de eventos con incrementos temporales.....	28
Eventos neutrino-fotón.....	29
Eventos fotón-gravitón.....	29
Eventos neutrino-gravitón (tentativo).....	30
Referencias.....	30

Introducción

El evento SN1987A (SN) es un evento multimensajero^[5] que se produjo en 1987, fue una explosión de supernova ‘dentro’ de la vía láctea de la que se pudieron registrar señales de fotones y neutrinos (se detectaron antineutrinos electrónicos, para ser precisos).

Vamos a suponer en el análisis que tanto neutrinos como fotones viajan en línea recta desde la gran nube de magallanes (LMC) a la vía láctea (MW). El que ambas detecciones se produjeran prácticamente de manera simultánea nos permitirá imponer que los tiempos de viaje son iguales y ello nos permitirá calcular la energía cinética de los neutrinos. Del resultado de la detección de los neutrinos tenemos una estimación de su energía (10MeV) lo que nos permite dar un valor a su masa.

El cálculo inicial de la masa de los neutrinos se realizó teniendo en cuenta sólo la materia oscura de la vía láctea, pero para refinarlo, se incluye en el cálculo la materia oscura de la gran nube de magallanes. Los perfiles de materia oscura basados en einasto admiten el cálculo numérico del potencial (el valor converge tomando un radio lo bastante grande), pero los perfiles de materia oscura para LMC se suelen dar mediante el perfil de Navarro-Frenk-White (NFW) que no admiten una integración numérica; por lo que pasamos a adoptar un cálculo analítico de los potenciales.

El documento ha precisado de una corrección adicional importante; ya que, inicialmente, tomamos unas unidades para la constante GM_s no acordes con el resto de unidades, ello llevó a un valor ‘razonable’ para la masa de los neutrinos; pero revisando los cálculos del redshift quedaba claro que había un error. El corregir este error, tener un valor para la masa de los neutrinos y un valor del redshift razonables exige prescindir del modelo de materia oscura y exige introducir el potencial de la fuerza de inercia^[12], que es el responsable del redshift en los denominados ‘experimentos de rotor mossbauer’^[11].

A priori, el potencial de la fuerza de inercia, como se comentó en la referencia [12], está sujeto a compensación de las fuerzas de inercia. Por ejemplo, para los fotones, la rotación de la tierra sobre sí misma se ve compensada por el mero hecho de enfocar, y mantener el enfoque, sobre la supernova; no así el efecto de rotación de la galaxia o la rotación de la tierra entorno al sol, que sería el potencial que calcularíamos del lado de los fotones. Para los neutrinos, en cambio, como no hay ‘enfoque’ sobre el cuerpo a observar, calcularíamos todos los potenciales asociados con la rotación sobre sí misma de la tierra, entorno al sol y de rotación de la galaxia. En general, los potenciales de

rotación de un cuerpo sobre sí mismo son mucho mas importantes que el resto de rotaciones del sistema, por lo que el resto de potenciales se podrían despreciar frente a estos. La realidad es un poco más complicada de esta imagen inicial, ya que las integrales con exponenciales ‘filtran’ los potenciales que no intervienen en el cálculo; se volverá sobre este tema en su momento.

Los potenciales de rotaciones de cuerpos sobre sí mismos son una buena aproximación al valor real. Tanto porque no hay mucha variación al considerarse una rotación sin excentricidad, como por el hecho de la que la rotación la consideramos de velocidad angular constante (consultar la referencia [12] para una explicación más extendida sobre cálculo de potenciales de inercia)

A lo largo del documento se propondrán esquemas de cálculo para otros eventos multimensajeros, como el GW170817 (GW) y lo usaremos para determinar la rotación de la galaxia junto con un modelo de materia oscura basado en rotaciones como sólido rígido.

Factores de Lorentz generalizados

Para ajustar los eventos que vamos a analizar, hicieron falta algunos ajustes en los factores de Lorentz de la referencia [3]. Los adelantamos ahora. Para potenciales gravitatorios de bosones donde $v > c_m$,

$$\frac{d\tau}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right),$$

donde dt' es el tiempo escalado,

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

despejando éste,

$$dt \sqrt{2} = dt',$$

y sustituyendo en la anterior por el tiempo dt ,

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) \right).$$

En el caso en que no estuviéramos ante potenciales gravitatorios (PG) con $v > c_m$, (potencial no gravitatorio es un potencial derivado del principio de equivalencia, PPE), el raíz de 2 se convertiría en un 1. El raíz de 2, en general, sólo multiplica a potenciales gravitatorios con $v > c_m$; y si la expresión incluye de ambos potenciales, en virtud del principio de superposición, debemos asegurarnos de que el raíz de 2 sólo afecta al potencial gravitatorio. Haciendo esa transformación para neutrinos también,

$$\frac{d\tau}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 2 + \frac{1}{\gamma},$$

debemos jugar un poco con la expresión, ya que hemos de mantener la referencia temporal cuando no hay efecto de velocidad ni potenciales,

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{2} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1 \right) + \frac{1}{\gamma}$$

y la expresión debería ser congruente cuando el raíz de 2 se convierte en un 1 por actuar potenciales no gravitatorios. En versiones previas de los factores de lorentz generalizados donde no estaba la exponencial, las constantes daban menos problemas; se irá indicando dónde se encuentran. La adopción de los factores de lorentz generalizados actuales se deriva de las expresiones del efecto doppler, ver referencia [17] para más detalles.

Nos queda la tabla,

		$v > c_m$	$v \leq c_m$
bosones	PG	$\frac{d\tau_f}{dt} = 1 + \sqrt{2} \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) \right)$	$\frac{d\tau_g}{dt} = 1$
	PPE	$\frac{d\tau_f}{dt} = 2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right)$	
bariones	PG	$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{2} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1 \right) + \frac{1}{\gamma}$	$\frac{d\tau}{dt} = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 1$
	PPE	$\frac{d\tau}{dt} = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 1$	

Donde los test implicados y las partículas a que afectan son,

	$v > c_m$	$v \leq c_m$
bosones	Fotones:retardo shapiro	Gravitones: evento GW
bariones	Neutrinos: evento SN Muones: muones atmosféricos	Toda la materia ordinaria: relojes de Maryland

El experimento de los muones se resumió al principio de la referencia que trata el retardo shapiro [18]. Los eventos GW170817 (fotones-gravitones) y SN1987A (fotones-neutrinos) se tratan en este texto y el experimento de los relojes de Maryland en las referencias [3] y [17].

En realidad la ecuación de los neutrinos es la única que podría ser, alternativamente, para PPE por ejemplo,

$$\frac{d\tau_n}{dt} = \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 1.$$

Pero la expresión listada en la tabla parece encajar mejor con los datos.

Sincronización de eventos multimensajero no simultáneos

Vamos a exponer la forma de las ecuaciones que se plantean en eventos no simultáneos, por si pueden servir para emparejar eventos.

Se basan en igualar los tiempos de vuelo de las distintas partículas, introduciendo una diferencia temporal que llamaremos delta. Vamos a describir las ecuaciones para potenciales no gravitatorios (PPE) ya que son los más importantes. Para el caso neutrino-fotón,

$$\tau_f = \tau_n + \delta.$$

Donde delta es positivo si el fotón llegó después que el neutrino. Ver el ‘Anexo IX: Sincronización de eventos con incrementos temporales’ para una demostración alternativa.

Eventos neutrino-fotón

Los factores de lorentz generalizados que intervienen son,

$$\begin{aligned}\frac{d\tau_f}{dt_e} &= 2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right), \\ \frac{d\tau_n}{dt_e} &= \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 1.\end{aligned}$$

Donde t_e hace referencia al tiempo de la tierra, para tener claro cuál es la referencia de potencial,

$$\Delta U = U - U_e.$$

Y la ecuación que se plantea es,

$$\tau_f = \tau_n + \delta.$$

o,

$$\int_0^{t_f} \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right)\right) dt_e = \int_0^{t_f} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 1\right) dt_e + \delta,$$

Como se ha comentado, los factores de lorentz generalizados que usamos en la versión anterior del documento, se asociaba el -1 de la parte de los neutrinos con el factor de lorentz de forma natural, pero al cambiar los factores para hacerlos compatibles con el efecto doppler, esta asociación directa se ha perdido, esto deja claro que la teoría debe tener un marco teórico superior que no presente estos problemas; ahora, para lo que nos interesa, vamos a asociar el -1 con el factor de lorentz (porque es la única forma en que esto funciona) y porque el que el factor de lorentz esté a su inverso o no, depende de la velocidad del observador. De este modo queda,

$$\int_0^{t_f} \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right)\right) dt_e = \int_0^{t_f} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma - 1}\right) dt_e + \delta,$$

En la integral del neutrino se ha supuesto que llega a su destino a t_f , porque su velocidad es similar a la del fotón (esto se puede comprobar a posteriori y corregir el cálculo si no es cierto, para SN se cumple en la distancia que hay en el evento). Suponemos, además, que la velocidad del neutrino no cambia en todo el trayecto, por lo que sale de la integral como constante,

$$\int_0^{t_f} \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right)\right) dt_e = \int_0^{t_f} \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) dt_e + \frac{t_f}{\gamma - 1} + \delta,$$

Obviamente, t_f se calcula como la distancia recorrida entre la velocidad de la luz. Pasando la integral del neutrino a la izquierda y agrupando,

$$\int_0^{t_f} \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) dt_e = \frac{t_f}{\gamma - 1} + \delta,$$

Donde ahora vamos a hacer el cambio de variable a tiempo adimensional,

$$\tau = \frac{t_e}{t_f},$$

$$d\tau = \frac{dt}{t_f}.$$

Esto estandariza la integración,

$$t_f \int_0^1 \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) d\tau = \frac{t_f}{\gamma - 1} + \delta,$$

Por lo que el tiempo de tránsito acaba dividiendo a delta y, probablemente, haciendo que sea despreciable, su expresión final es,

$$\int_0^1 \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) d\tau = \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{\delta}{t_f}.$$

La integral presenta un comportamiento muy estándar, para valores grandes del potencial, la exponencial decae rápidamente (el potencial es una cantidad negativa) y su valor es 0, haciendo 2 el valor de la integral. Para valores del potencial muy pequeños, la exponencial decae muy despacio y su valor efectivo es 1, haciendo 0 la integral. Por lo que hay una banda de valores muy estrecha en los que la integral da resultados. Esto será muy útil en el evento GW para determinar la velocidad de rotación de la galaxia.

En esta expresión es crítico que el delta se mida correctamente, porque puede tener gran influencia en el cálculo.

Eventos fotón-gravitón

Los factores de lorentz generalizados que intervienen son,

$$\frac{d\tau_f}{dt_e} = 2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right),$$

$$\frac{d\tau_g}{dt_e} = 1.$$

Y la ecuación que se plantea es,

$$\tau_f = \tau_g + \delta.$$

O,

$$\int_0^{t_f} \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) \right) dt_e = \int_0^{t_f \sqrt{2}} dt_e + \delta,$$

Nótese que al viajar el gravitón a la velocidad $c/\sqrt{2}$, tarda raíz de 2 veces el tiempo del fotón en recorrer el camino. Resolviendo la integral del lado derecho y sacando del lado izquierdo un uno,

$$t_f + \int_0^{t_f} \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) \right) dt_e = t_f \sqrt{2} + \delta,$$

Expresando en tiempo adimensional y agrupando constantes a la derecha,

$$\int_0^1 \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) \right) d\tau = \sqrt{2} - 1 + \frac{\delta}{t_f}.$$

Que es la expresión final.

Eventos neutrino-gravitón (tentativo)

Los factores de lorentz generalizados que intervienen son,

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_n}{dt_e} &= \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 1, \\ \frac{d\tau_g}{dt_e} &= 1. \end{aligned}$$

Y la ecuación que se plantea es,

$$\tau_g = \tau_n + \delta.$$

O,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f \sqrt{2}} dt_e &= \int_0^{t_f} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 1 \right) dt_e + \delta, \\ t_f \sqrt{2} &= \frac{t_f}{\gamma} + \int_0^{t_f} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1 \right) dt_e + \delta, \\ \int_0^{t_f} \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) dt_e &= \frac{t_f}{\gamma} - t_f \sqrt{2} + \delta, \\ \int_0^1 \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) d\tau &= \frac{1}{\gamma} - \sqrt{2} + \frac{\delta}{t_f}, \\ \int_0^1 \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) d\tau &= \frac{1}{\gamma - 1} + 1 - \sqrt{2} + \frac{\delta}{t_f}, \end{aligned}$$

Expresión que sólo va a dar energías medibles cuando,

$$\delta = t_f (\sqrt{2} - 1).$$

Que viene a decir que cada mensajero llega según su velocidad y que veremos un delta dado por esta diferencia. Sustituyendo el delta en la expresión,

$$\int_0^1 \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) d\tau = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Esquema de distancias

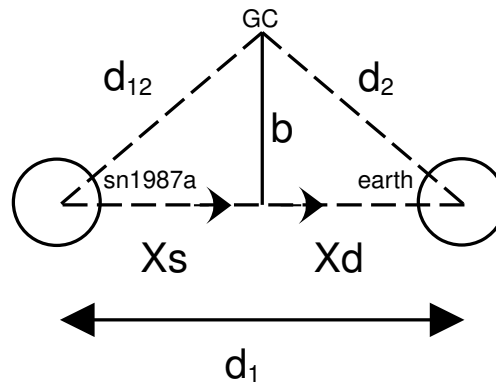
SN1987A

Primero necesitamos hacernos una idea de cómo se posicionan SN1987A (SN), el centro galáctico (GC) y la tierra (referencia respecto a donde se realiza la medición de tiempos). El GC es importante porque por él pasa el eje de rotación de MW, y es respecto a él del que se calcula la distancia mínima.

Estos tres puntos forman un plano; en él, tenemos que calcular el par de triángulos rectángulos que describen el movimiento de las partículas. Denotamos con b la separación al centro galáctico, según la línea ortogonal a la propagación de las partículas desde el emisor (sn1987a) al receptor (earth).

En general, las distancias se tienen medidas desde la tierra (d_1 es la distancia a SN, d_2 la distancia al GC), por lo que tenemos que empezar por calcular la distancia de SN al centro galáctico (d_{12}). En el “Anexo I: Cálculo de distancias en la bóveda celeste” detallamos como se realiza este cálculo.

Seguiremos el siguiente esquema,



Para el que tenemos los valores,

$$\begin{aligned}d_1 &= 51.474 \text{ kpc}, \\d_2 &= 7.4 \text{ kpc}, \\d_{12} &= 50.9357 \text{ kpc}.\end{aligned}$$

De la figura deducimos,

$$\begin{aligned}X_s &= \frac{d_{12}^2 - d_2^2 + d_1^2}{2d_1} = 50.4049 \text{ kpc}, \\X_d &= d_1 - X_s = 1.0691 \text{ kpc}, \\b &= \sqrt{d_2^2 - X_d^2} = 7.3224 \text{ kpc}.\end{aligned}$$

Con,

$$d_1 > d_{12} > d_2.$$

GW170817

Sigue el mismo esquema anterior, y sólo cambian las distancias,

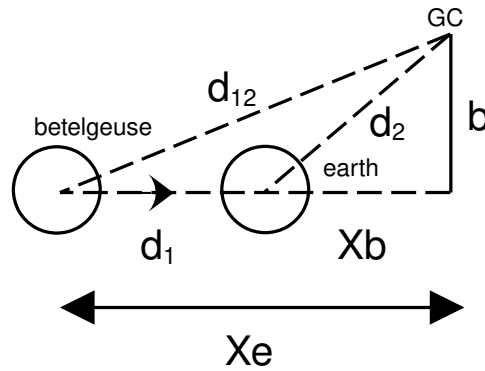
$$\begin{aligned}d_1 &= 41000 \text{ kpc} , \\d_2 &= 7.4 \text{ kpc} , \\d_{12} &= 40996.44424 \text{ kpc} .\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}X_s &= 40996.44373 \text{ kpc} , \\X_D &= 3.5563 \text{ kpc} , \\b &= 6.4894 \text{ kpc} .\end{aligned}$$

Betelgeuse

También vamos a establecer el diagrama para el sistema betelgeuse-GC, el esquema queda en este caso (el esquema del caso anterior no hace cuadrar los números),



Para el que tenemos los valores,

$$\begin{aligned}d_1 &= 0.152672 \text{ kpc} , \\d_2 &= 7.4 \text{ kpc} , \\d_{12} &= 7.542049 \text{ kpc} .\end{aligned}$$

De la figura deducimos,

$$\begin{aligned}X_b &= \frac{d_{12}^2 - d_2^2 - d_1^2}{2d_1} = 5.949 \text{ kpc} , \\X_e &= d_1 + X_b = 6.102 \text{ kpc} , \\b &= \sqrt{d_2^2 - X_b^2} = 4.401 \text{ kpc} .\end{aligned}$$

Con,

$$d_{12} > d_2 > d_1 .$$

Evento multimensajero SN1987A: potenciales gravitatorios

Este apartado estima la masa de los neutrinos calculando numéricamente el potencial del halo de materia oscura dado en ‘Anexo II: Halo de materia oscura en la vía láctea’ usando la expresión integral del ‘Anexo III: Expresión del potencial gravitatorio’ y principio del ‘Anexo IV: Cálculo del potencial’. Para refinar el cálculo, se incluye el halo de materia oscura de LMC, y se recalcula el

halo de MW ya con potenciales mediante los perfiles de NFW listados en ‘Anexo IV: Cálculo del potencial:Potencial de una esfera en coordenadas esféricas y densidad variable’.

También se analizó la posibilidad de que la materia oscura sea en realidad mucha menos porque parte de la masa se explique a través del potencial inducido, ver el ‘Anexo V: Potencial inducido’.

Para este cálculo se usaron los factores de lorentz generalizados de la referencia [3] En la versión 2 del documento. Se han dejado los apartados sin cambios para ofrecer una continuidad en la explicación, pero puede omitirse este epígrafe completo, sólo se deja aquí para justificar que los halos de materia oscura no resuelven el problema; si es que existen.

Tiempos de tránsito

Para un evento multimensajero entre fotones y neutrinos, imponemos que los tiempos de llegada a la tierra son iguales (ya se adelanta que 6 horas de diferencia entre las señales sigue haciendo que puedan considerarse simultáneas a todos los efectos, como se verá seguidamente).

Suponemos que la trayectoria que realizan las partículas es rectilínea (ya que carecemos de los datos para hacer otra cosa) y el tiempo de tránsito sólo se ve afectado por el ‘retardo shapiro’, cuyo efecto se calcula a través del factor de Lorentz generalizado^[3]. Nótese que el tiempo de tránsito, está referido al tiempo medido en la referencia de la tierra (τ).

Para los fotones, la ecuación del tiempo de tránsito es,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta U}{c_m^2}.$$

Mientras que para los neutrinos,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta U}{c^2} - (\gamma - 1).$$

Donde hemos impuesto que ambas partículas viajan a velocidades superiores a la del gravitón, en particular, a la velocidad de la luz (o casi, para los neutrinos) Integrando ambas expresiones durante el tiempo de tránsito e igualando,

$$\int_0^{t_f} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta U}{c_m^2} \right) dt = \int_0^{t_f} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta U}{c^2} - (\gamma - 1) \right) dt.$$

Donde,

$$t_f = \frac{d_1}{c_m}.$$

Pudiendo simplificar el término constante; además, suponemos que la velocidad de los neutrinos es constante en todo el trayecto (esto es razonable ya que aunque se mueven hacia donde el campo gravitatorio es más intenso, la velocidad que poseen es ya casi la de la luz y puede variar muy poco),

$$-\int_0^{t_f} \frac{\Delta U}{c_m^2} dt = \int_0^{t_f} \frac{\Delta U}{c^2} dt - (\gamma - 1) t_f.$$

Despejando el término del factor de Lorentz,

$$(\gamma - 1)t_f = \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c_m^2} \right) \int_0^{t_f} \Delta U dt.$$

Sustituyendo la velocidad de los gravitones,

$$c_m = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Da,

$$(\gamma - 1)t_f = \frac{3}{c^2} \int_0^{t_f} \Delta U dt.$$

Y realizando el cambio de variables en la integral, adimensionalizando el tiempo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_a = \frac{t}{t_f} \\ d\tau_a = \frac{dt}{t_f} \end{array} \right\},$$

queda,

$$(\gamma - 1) = \frac{3}{c^2} \int_0^1 \Delta U d\tau_a.$$

Lo que nos permite calcular la velocidad de los neutrinos.

Masa de los neutrinos

Como la energía de los neutrinos es conocida,

$$E_n = (\gamma - 1)m_n c^2.$$

Podemos calcular la masa de los mismos,

$$m_n = \frac{E_n}{(\gamma - 1)c^2}.$$

Dando,

$$m_n = \frac{E_n}{\frac{1}{3} \int_0^1 \Delta U d\tau_a}.$$

Para expresar el resultado en eV/c², multiplicamos por c²,

$$m_n = \frac{E_n c^2}{\frac{1}{3} \int_0^1 \Delta U d\tau_a} = 31.97 \text{ TeV} / c^2.$$

Pero sabemos que este valor es incorrecto por reacciones nucleares bien conocidas (ver ‘Anexo VII: Cota a la masa de los neutrinos’).

Evento multimensajero GW170817

Este evento lo usamos para calcular la velocidad de rotación de la galaxia, porque el evento SN da como resultado una masa para los neutrinos demasiado alta para ser correcta (KATRIN^[19] ya ha puesto un límite preciso de $0.45\text{eV}/c^2$ a fecha de este documento) La velocidad que se obtiene con GW también da una masa para los neutrinos demasiado alta ($w=13.7268\text{ km/s/kpc}$, que da $m_n=18.28\text{ eV}/c^2$), por lo que, en base al modelo de materia oscura^[12], y dada la distancia tan alta a la que se produce GW, se intuye que el cambio de la velocidad de rotación de la galaxia tiene un efecto importante en el cálculo. Para estimar esa velocidad hizo falta calibrar el modelo de materia oscura, con datos similares a los de la vía láctea, para que nos dijera cómo se produce la variación con el tiempo de la velocidad de rotación de la galaxia, ver referencia [12] para los detalles.

Vamos a plantear la ecuación, usando los potenciales de las fuerzas de inercia, que son lo únicos relevantes (están detallados en la referencia indicada del modelo de materia oscura); ya que la ‘materia oscura’ que se asigna a la galaxia da un potencial gravitatorio sustancialmente inferior (ver el cálculo inicial de la masa de los neutrinos en el apartado anterior, que se ha mantenido como justificación de esto).

La ecuación, despreciando ya el delta,

$$\int_0^1 \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) \right) d\tau = \sqrt{2} - 1.$$

El esquema que presenta el evento GW coincide con el mostrado para SN, sólo cambiando las distancias, como se ha comentado.

Con,

$$t_f = \frac{d_1}{c}.$$

El potencial en función de la coordenada x de nuestro esquema, se calcula como,

$$U(x) = \frac{-1}{2} w^2 d_{min}^2(x).$$

Donde la distancia mínima viene dada por,

$$d_{min}^2(x) = x^2 + b^2 - (x v_x + y v_y)^2,$$

por lo que,

$$\Delta U = \frac{-w^2}{2} \left(x^2 + X_d^2 - (x v_x + y v_y)^2 + (-X_d v_x + y v_y)^2 \right),$$

Al compartir esquema de distancias los eventos GW y SN, esta expresión es válida para SN también. El vector (v_x, v_y, v_z) sería el vector unitario del eje de rotación de la galaxia, proyectado sobre los ejes que hemos definido (0.63333, 0.34794, -0.69126) aproximadamente, ver ‘Anexo VIII: Cambio de sistema de referencia’.

Con el potencial de fuerzas de inercia obtenemos un primer valor para w, éste valor sirve para calibrar la velocidad de rotación del sol en la vía láctea. Entonces repetimos el cálculo, esta vez

usando el potencial (PPE) Q no conservativo, y variamos w hasta que quede satisfecha la ecuación de GW. Para Q , la ecuación que se resuelve es,

$$\int_0^{t_f} \left(1 - \exp \left(\frac{-Q + Q_o}{c_m^2} \right) \right) dt_e = \sqrt{2} - 1.$$

Al definirse Q como una cantidad positiva. Q se integra en las ecuaciones del modelo de materia oscura hacia atrás en el tiempo, para aportar valores útiles al caso actual. Se probaron la integración cuando w está en decrecimiento (resultó en una w demasiado grande, sobre 77km/s/kpc) y en descenso, dando $w=10.824822$ km/s/kpc que es el valor que adoptamos.

Para evaluar Q se usó una spline sobre octave, dados los vectores de puntos (d, Q) ,

```
> pp=spline(d,Q);
> save("-binary","spline.dat","pp");
```

Esta spline puede salvarse en un binario son 'save' y cargarlo con 'load' en el cálculo de GW, donde hacemos,

```
> load("-binary","spline.dat","pp");
> Qe=ppval(pp,de);
```

Donde de son los puntos en que queremos el valor de Q , que se usa para el cálculo de la integral con 'quadgk'.

Vamos a resaltar que para calcular la integral usando el potencial de las fuerzas de inercia debido a la rotación de la galaxia, hay dos rotaciones extra en el cálculo: la de la tierra sobre su eje (de 24 horas de período) y la de rotación entorno al sol (de 365 días de período). En virtud del principio de superposición, el potencial total es la suma de todos los potenciales de cada rotación.

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2,$$

$$\int_0^{t_f} \left(1 - \exp \left(\frac{\Delta U_1}{c_m^2} \right) \exp \left(\frac{\Delta U_2}{c_m^2} \right) \right) dt_e = \sqrt{2} - 1.$$

Ambas rotaciones extra dan un valor tremendo para la rotación en unidades de km/(s·kpc) por lo que el potencial es muy grande (en valor absoluto, ya que es negativo) y la exponencial va a cero, dando la integral igual a 1. Éste es un problema que presenta el cálculo; hay que saber (probando) qué potenciales deben incluirse. Dicho problema no se presentaría si al separar potenciales la integral quedara,

$$\int_0^{t_f} \left(1 - \exp \left(\frac{\Delta U_1}{c_m^2} \right) - \exp \left(\frac{\Delta U_2}{c_m^2} \right) \right) dt_e = \sqrt{2} - 1.$$

De modo que cada término irrelevante no afectara al cálculo. Está claro que a la teoría le falta 'algo más'.

Por otro lado, podemos afirmar que la galaxia no rota respecto algún baricentro universal, de lo contrario no cuadraría nuestro cálculo (ni el de SN). Esto suponiendo que existe una jerarquía de velocidades de 'mientras más grande más lento', como se ha venido cumpliendo con cada rotación. Sí podría rotar con una velocidad muy grande sin que lo notáramos en el cálculo, pero yo lo veo poco probable.

Evento multimensajero SN1987A: potenciales de inercia

El único cambio aquí es que usamos Q para evaluar el incremento de potencial en la integral del evento. Dicha integral queda, despreciando el delta,

$$\int_0^1 \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) d\tau = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

En función de Q,

$$\int_0^1 \left(2 - \exp\left(2(-Q + Q_o)\right) - \exp(-Q + Q_o) \right) d\tau = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Nótese que para Q es muy importante poner la referencia de Q (Q_o) porque el incremento de potencial en la tierra debe ser 0, y el valor de x del esquema no es cero en ese punto.

El vector (v_x, v_y, v_z) sería (-0.528989, -0.076336, -0.845189) aproximadamente.

El valor para la masa de los neutrinos que obtenemos es,

$$\begin{aligned} &0.632887 \text{ eV}/c^2 \\ &0.070418e^{-10} \text{ eV} \\ &0.112822e^{-35} \text{ kg} \end{aligned}$$

Podemos añadir que a través de todos los cambios de parámetros del sistema de ecuaciones y sus soluciones, el valor final podría variar un 30% (porcentaje relativo), dando el rango $0.0211 < m_n < 19$, que KATRIN nos acota a, $0.0211 < m_n < 0.45$.

Extrapolación a betelgeuse

El valor de la energía de los neutrinos no podemos calcularlo con potenciales de inercia, debido a que la velocidad de rotación de Betelgeuse no es conocida. Si la suponemos cero, entonces queda el valor de la energía de los neutrinos: 0.306350 GeV. Pero si su rotación es parecida a la del sol en la galaxia, el incremento de potencial sería cero, igual que la energía predicha. Por desgracia el modelo de materia oscura no va a ayudar a resolver esto, porque la distancia al centro galáctico de Betelgeuse es casi igual que la del sol y esto va a dar un Q muy similar. Nótese que la diferencia de potencial de objetos que rotan dentro de la misma galaxia no se calcula del mismo modo que para objetos extragalácticos^[11]; el potencial no está definido si cambia w, sólo puede cambiar la distancia mínima entre puntos, si hay un cambio de w entre dos puntos, el potencial sería,

$$\Delta U = \frac{-1}{2} (w_{BT} - w_s)^2 \Delta d_{min}^2.$$

Sin embargo, de la expresión con delta, podemos decir que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{\delta}{t_f} &= 0, \\ \frac{\delta}{t_f} &= \frac{-1}{\gamma - 1} = \frac{-m_n c^2}{E_n}, \\ E_n &= \frac{-t_f m_n c^2}{\delta}. \end{aligned}$$

Sólo un delta negativo (neutrino llegando después que el fotón) cumple la ecuación, por lo que no esperamos ninguna detección de neutrinos de gran energía anticipando el fin de Betelgeuse. Para un delta de -1s se obtendrían 1.57GeV.

En cuanto al tiempo de tránsito,

$$\tau_f = t_f \left(1 + \int_0^1 \left(1 - \exp \left(\frac{\Delta U}{c_m^2} \right) \right) d\tau \right),$$

La máxima variación que puede experimentar es $2 \cdot t_f$, por el retardo shapiro. Pero en este caso es una variación muy pequeña la que experimenta el tiempo, ya que la integral es del orden de 10^{-8} , de ahí que sea crucial el valor de delta.

En cuanto a si es posible observar otras energías, si llamamos I a la integral, y despejamos el factor de lorentz, y sustituimos la expresión de la energía,

$$I = \int_0^1 \left(2 - \exp \left(\frac{\Delta U}{c_m^2} \right) - \exp \left(\frac{\Delta U}{c^2} \right) \right) d\tau = \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{\delta}{t_f},$$

$$\gamma - 1 = \frac{1}{I - \frac{\delta}{t_f}},$$

$$E_n = \frac{m_n c^2}{I - \frac{\delta}{t_f}}.$$

Para un delta de -711s se obtiene un incremento de la energía de 1MeV aproximadamente (pasa de 10MeV a 11MeV).

Nótese que en el evento SN los neutrinos llegaron de 2 a 3 horas antes que los fotones; sin embargo no hemos usado este hecho en los cálculos, porque tampoco he conseguido una referencia sólida de los tiempos y energías (desde 20MeV a 40MeV). Los valores que existen apuntan a una incongruencia en los datos (en energías y tiempos) cuando se intentan contrastar con los resultados de los cálculos, de hecho hacen negativo el valor de la energía antes citado ya que δ/t_f se encuentra entre $4.6e^{-7}$ a $6.9e^{-7}$ ($t_f = 496$ años), mientras que la integral 'I' resulta en $6.3289e^{-8}$. También es cierto que, según 'modelos de supernovas', el tiempo de liberación de fotones y neutrinos es distinto, al parecer los fotones quedan atrapados (como pasa en el sol) y tienen que propagarse para salir de la nube de la explosión, por lo que los tiempos de tránsito no podrían medirse desde el mismo instante.

Comentarios finales

El resultado final de la masa de los neutrinos es aún un cálculo incompleto, ya que se despreciaron algunos hechos, como el delta o la aceleración de la velocidad angular de rotación de la galaxia como sólido rígido. Pero puede considerarse una prueba de la teoría porque acercarse al valor que busca KATRIN ya es todo un comienzo.

Anexo I: Cálculo de distancias en la bóveda celeste

Para medir la distancia entre dos cuerpos celestes, empezamos por localizar ambos cuerpos y definir sus vectores de posición en coordenadas cartesianas o esféricas, el módulo del vector diferencia es la distancia que los separa.

SN1987A

Vamos a realizar el cálculo para el sistema SN1987A-GC, los datos de partida los suministra SIMBAD^[1] en forma de ascensión recta (RA) y declinación (DEC); en este orden. Para SN1987A obtenemos,

$$\begin{aligned} RA & 5^h 35^m 28.02^s, \\ DEC & -69^\circ 16' 11.1''. \end{aligned}$$

Mientras que para el centro galáctico ('galactic center' en el diálogo de SIMBAD),

$$\begin{aligned} RA & 17^h 45^m 39.6^s, \\ DEC & -29^\circ 00' 22.0''. \end{aligned}$$

Estos datos están expresados en el sistema de coordenadas J2000 (que va cambiando cada 50 años). La ascensión recta se mide en horas, minutos y segundos, mientras que la declinación es en grados, minutos y segundos. Para convertir la ascensión recta a grados, multiplicamos por 360° y dividimos por 24 horas, resultando para SN1987A,

$$\begin{aligned} RA & 83.867^\circ, \\ DEC & -69.270^\circ. \end{aligned}$$

Mientras que para el centro galáctico,

$$\begin{aligned} RA & 266.415^\circ, \\ DEC & -29.01^\circ. \end{aligned}$$

Ahora necesitamos conocer las distancias a la tierra, si obtenemos el dato en forma de paralaje, la inversa del paralaje en arcosegundos es la distancia en parsecs. Por ejemplo 7.54 mas (mili-arcosegundos) serían 132.626 parsecs aproximadamente (Polaris).

Las distancias que se han utilizado para los cálculos se han tomado de la página de wikipedia del objeto celeste. Otro servicio que proporciona datos astrométricos es el Gaia Archive de la ESA^[2], entrando al tab 'SINGLE OBJECT' (puede que RA y DEC vengan directamente en grados).

Junto con las distancias, los datos que hemos obtenido son, para SN1987A,

$$\begin{aligned} d_1 &= 51.474 \text{ kps}, \\ \alpha_1 &= 83.867^\circ, \\ \delta_1 &= -69.270^\circ. \end{aligned}$$

Mientras que para el centro galáctico,

$$\begin{aligned} d_2 &= 7.4 \pm 0.3 \text{ kps}, \\ \alpha_2 &= 266.415^\circ, \\ \delta_2 &= -29.01^\circ. \end{aligned}$$

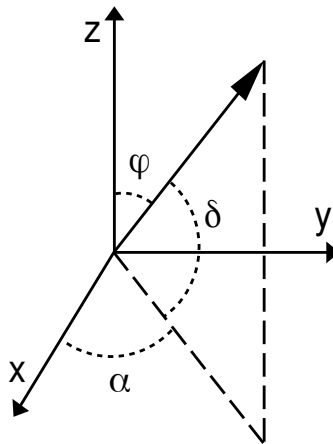
Como hemos indicado, con estos datos se calcular las componentes de su vector de posición, las coordenadas rectangulares serían,

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\alpha) \cos(\delta), \\y &= r \sin(\alpha) \cos(\delta), \\z &= r \sin(\delta).\end{aligned}$$

Con los dos vectores de posición así definidos, realizamos su diferencia y calculamos el módulo del vector resultante, que es la distancia de separación de ambos objetos celestes (en kilo-parsecs),

$$d_{12} = 50.9357 \text{ kps}.$$

Nótese que el sistema sería el de las coordenadas esféricas habituales excepto por la declinación, que se define como el ángulo del vector de posición al plano XY, al contrario que en esféricas que se define como el ángulo entre el eje Z y el vector de posición (ver figura).



Las coordenadas esféricas siguen las ecuaciones,

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\alpha) \sin(\varphi), \\y &= r \sin(\alpha) \sin(\varphi), \\z &= r \cos(\varphi).\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\varphi = 90^\circ - \delta.$$

GW170817

Para GW,

$$\begin{aligned}RA & 13^h 9^m 48.09^s, \\DEC & -23^\circ 22' 53.3''.\end{aligned}$$

Betelgeuse

Vamos a repetir el cálculo para el sistema betelgeuse-GC. Para betelgeuse, SIMBAD nos aporta (esta vez sí, con paralaje),

$$\begin{aligned} RA & 5^h 55^m 10.31^s, \\ DEC & 7^\circ 24' 25.4'', \\ Parallax & 6.55 mas. \end{aligned}$$

o,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 88.793^\circ, \\ \delta_1 &= 7.4071^\circ, \\ d_1 &= 152.672 ps. \end{aligned}$$

Con los mismos datos del centro galáctico, obtenemos la distancia betelgeuse-GC,

$$d_{12} = 7.542049 kps.$$

Anexo II: Halo de materia oscura en la vía láctea

Seguimos la referencia [4], donde se publica un halo con un perfil einasto calibrado con datos de gaia dr3. Nótese que en el perfil de la curva de rotación de la galaxia de la referencia ya observamos un decaimiento, por lo que la masa de materia oscura de esta referencia es sensiblemente menor. El perfil queda,

$$\rho(r) = \rho_o \exp \left[- \left(\frac{r}{h} \right)^{1/n} \right],$$

Con las constantes,

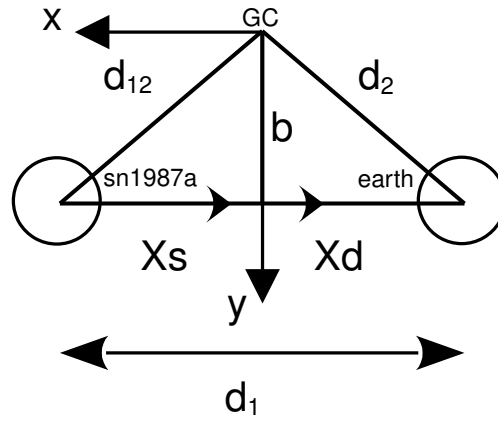
$$\begin{aligned} GM_s &= 1.32712440018 e^{20} m^3/s^2 = 4.30091642825 kpc \cdot m^2/s^2, \\ c &= 299,792,458 m/s, \\ n &= 0.43, \\ h &= 11.41 kps, \\ \rho_o &= 1.992 e^7 M_s/kps^3, \\ 1 eV/c^2 &= 1.782663 e^{-36} kg. \end{aligned}$$

Anexo III: Expresión del potencial gravitatorio

Para calcular el potencial vamos a despreciar todo excepto el halo de materia oscura, que es muy importante. Es incorrecto reducir el halo a un punto cuando nos encontramos dentro de él, por lo que la expresión que hay que usar para el cálculo es,

$$U = -G \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Integral que vamos a resolver en coordenadas esféricas, para lo que vamos a definir el sistema de ejes,



por lo que las partículas se mueven en el plano XY.

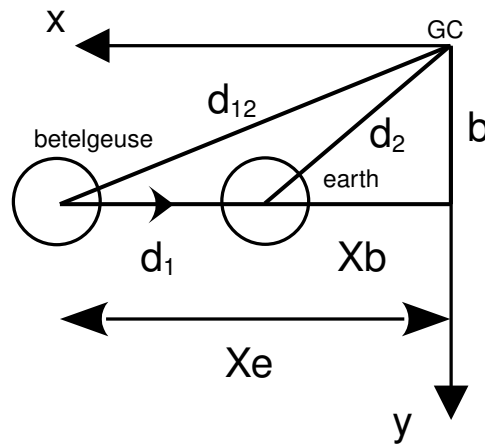
El potencial lo vamos a expresar en función a la coordenada x, ya que las partículas se mueven hacia la dirección negativa de x, pero paralelas a él. Expresando ahora x en función del tiempo adimensional,

$$x = X_s(1 - \tau_a) - X_d \tau_a.$$

Y con la referencia del potencial,

$$U_o(x = -X_d).$$

El diagrama de cálculo para betelgeuse quedaría,



Expresando ahora x en función del tiempo adimensional,

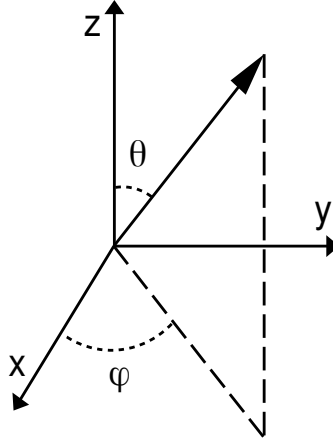
$$x = d_1(1 - \tau_a) + X_b.$$

Y con la referencia del potencial,

$$U_o(x = X_b).$$

Anexo IV: Cálculo del potencial

En coordenadas esféricas definimos,



Con,

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Y,

$$x = r \cos(\varphi) \sin(\theta), \\ y = r \sin(\varphi) \sin(\theta), \\ z = r \cos(\theta).$$

Cuyo determinante del jacobiano es,

$$|J| = r^2 \sin(\theta).$$

Con el esquema definido en el anexo anterior, r queda,

$$r = \sqrt{b^2 + x^2}.$$

Al estar el movimiento en el plano XY,

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right), \\ \theta = \pi/2.$$

Los límites de integración de la integral quedarían,

$$U(x) = -G \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

En realidad R podríamos considerarla $R=R(x)$, y hacerla variar con el tiempo adimensional de modo que $R=r$, esto lleva a valores de la integral negativos y por eso se ha tomado $R=d_{12}$. El fijar R para cubrir ‘todo’ el halo de materia oscura a, por ejemplo, 100 kpc no modifica el resultado de la integral.

En cuando a los vectores de posición,

$$\vec{r} = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \hat{x} + r \sin(\theta) \sin(\varphi) \hat{y} + r \cos(\theta) \hat{z}, \\ \vec{r}' = r' \sin(\theta') \cos(\varphi') \hat{x} + r' \sin(\theta') \sin(\varphi') \hat{y} + r' \cos(\theta') \hat{z}.$$

su diferencia es,

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}' = & (r \sin(\theta) \cos(\varphi) - r' \sin(\theta') \cos(\varphi')) \hat{x} \\ & + (r \sin(\theta) \sin(\varphi) - r' \sin(\theta') \sin(\varphi')) \hat{y} \\ & + (r \cos(\theta) - r' \cos(\theta')) \hat{z},\end{aligned}$$

y la distancia queda,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' (\sin(\theta) \cos(\varphi) \sin(\theta') \cos(\varphi') + \sin(\theta) \sin(\varphi) \sin(\theta') \sin(\varphi') + \cos(\theta) \cos(\theta'))},$$

agrupando,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' (\sin(\theta) \sin(\theta') (\cos(\varphi) \cos(\varphi') + \sin(\varphi) \sin(\varphi')) + \cos(\theta) \cos(\theta')},$$

y usando la fórmula de la diferencia de ángulos,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' (\sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\varphi - \varphi') + \cos(\theta) \cos(\theta'))},$$

como,

$$\theta = \pi/2,$$

queda,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \sin(\theta') \cos(\varphi - \varphi')},$$

sustituyendo $r=r(x)$,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + b^2 + r'^2 - 2 \sqrt{x^2 + b^2} r' \sin(\theta') \cos(\varphi - \varphi')}.$$

Por lo que la integral queda,

$$U(x) = -G \rho_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r'^2 \sin(\theta') \exp\left[-\left(\frac{r}{h}\right)^{1/n}\right] dr' d\varphi' d\theta'}{\sqrt{x^2 + b^2 + r'^2 - 2 \sqrt{x^2 + b^2} r' \sin(\theta') \cos(\varphi - \varphi')}}.$$

Por lo que la variación en el tránsito quedaría,

$$\int_0^1 \Delta U d\tau_a = \int_0^1 U(\tau_a) d\tau_a - U_0.$$

Que hay que resolver numéricamente para perfiles einasto o analíticamente para NFW.

Potencial de una esfera en coordenadas esféricas y densidad constante

Vamos a calcular la expresión del potencial supuesta una densidad de masa constante, para una esfera de radio R y masa M. La ecuación de Poisson queda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= 4 \pi G \rho, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= 4 \pi G \rho r^2,\end{aligned}$$

haciendo una primera integración,

$$r^2 \frac{\partial U}{\partial r} = 4 \pi G \rho \frac{r^3}{3} + C_1,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{4}{3} \pi G \rho r + \frac{C_1}{r^2},$$

y haciendo una segunda integración,

$$U = \frac{2}{3} \pi G \rho r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Con C_1 y C_2 dos constantes de integración. Ahora introducimos las condiciones de contorno,

$$\frac{\partial U}{\partial r}(r=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0,$$

$$U(r=R) = -\frac{GM}{R} \rightarrow \frac{2}{3} \pi G \rho R^2 + C_2 = -\frac{GM}{R} \rightarrow C_2 = -\frac{2}{3} \pi G \rho R^2 - \frac{GM}{R},$$

o,

$$U = \frac{2}{3} \pi G \rho (r^2 - R^2) - \frac{GM}{R}.$$

Donde vamos a expresar la densidad en función a la masa M ,

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

sustituyendo en la anterior expresión del potencial,

$$U = \frac{GM}{2R^3} (r^2 - R^2) - \frac{GM}{R}.$$

Introduciendo R^2 dentro del paréntesis, y agrupando con el último término del segundo miembro, llegamos a la expresión final,

$$U = \frac{GM}{2R} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 3 \right).$$

Nótese que el potencial en el origen ($r=0$) está perfectamente definido,

$$U(r=0) = -\frac{3GM}{2R}.$$

Potencial de una esfera en coordenadas esféricas y densidad variable

Vamos a calcular la expresión del potencial supuesta una densidad de masa dada por un perfil de Navarro-Frenk-White (NFW),

$$\frac{\rho}{1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2},$$

para una esfera de radio R y masa M . La ecuación de Poisson queda,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{4 \pi G \rho}{1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{4 \pi G \rho r^2}{1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2},$$

haciendo una primera integración,

$$r^2 \frac{\partial U}{\partial r} = 4 \pi G \rho \left(a^2 r - a^3 \operatorname{atan} \left(\frac{r}{a} \right) \right) + C_1,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{4 \pi G \rho}{r^2} \left(a^2 r - a^3 \operatorname{atan} \left(\frac{r}{a} \right) \right) + \frac{C_1}{r^2},$$

y haciendo una segunda integración,

$$U = 4 \pi G \rho a^2 \left(\frac{1}{2} \ln |r^2 + a^2| + \frac{a}{r} \operatorname{atan} \left(\frac{r}{a} \right) \right) - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Con C_1 y C_2 dos constantes de integración. Ahora introducimos las condiciones de contorno,

$$\frac{\partial U}{\partial r}(r=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0,$$

o,

$$U = 4 \pi G \rho a^2 \left(\frac{1}{2} \ln |r^2 + a^2| + \frac{a}{r} \operatorname{atan} \left(\frac{r}{a} \right) \right) + C_2.$$

Y la masa M ,

$$M = 4 \pi \rho a^2 \left(R - a \operatorname{atan} \left(\frac{R}{a} \right) \right),$$

Nótese que el valor de C_2 no importa porque vamos a usar el potencial en una ecuación en diferencias donde siempre se va a simplificar.

Vamos a seleccionar los valores de las constantes libres para que a $r=50\text{kpc}$, la masa M no sea muy diferente de la masa conocida que contiene la galaxia, tanto para LMC como para la vía láctea (MW). Cada una según los valores que da su referencia para el perfil de NFW.

Para LMC^[14], con

$$\rho_2 = 1 e^7 M_s / \text{kpc}^3,$$

$$a = 1 \text{ kpc},$$

$$M = 6.09 e^9 M_s,$$

Mientras que para MW^[15],

$$\rho_1 = 1 e^7 M_s / \text{kpc}^3,$$

$$a = 5.5 \text{ kpc},$$

$$M = 1.6 e^{11} M_s,$$

Donde M_s denota masa solar.

Anexo V: Potencial inducido

Como vimos en el documento sobre la precesión del perihelio de mercurio^[3], el potencial inducido del sol (subíndice 1) sobre mercurio (subíndice 2), tiene por expresión,

$$\vec{E}_{12} = \frac{-GM_1}{c_m^2 R_{12}} \left(\frac{\vec{a}_1}{\gamma'_{11}} - \frac{\vec{a}_2}{\gamma'_{22}} \right).$$

Este potencial explica la precesión anómala (atribuida a relatividad general) del perihelio de mercurio en casi un 33%^[3].

Si despreciamos la aceleración del sol, e integramos a lo largo de la trayectoria de mercurio, podemos obtener la evolución del potencial inducido,

$$V_{12} = - \int \vec{E}_{12} \cdot d\vec{x}_2,$$

si lo expresamos en función del tiempo,

$$V_{12} = - \int \frac{\vec{E}_{12} \cdot \vec{v}_2}{\gamma'_{22}} dt,$$

o, en forma diferencial,

$$\frac{dV_{12}}{dt} = \frac{-\vec{E}_{12} \cdot \vec{v}_2}{\gamma'_{22}},$$

que sustituyendo,

$$\frac{dV_{12}}{dt} = \frac{-GM_1}{c_m^2 R_{12}} \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{v}_2}{\gamma'^2_{22}},$$

Esta ecuación diferencial se integra junto con el resto de las ecuaciones dinámicas de mercurio, y el potencial inducido se suma al potencial conservativo de las fuerzas gravitatorias. El sistema es consistente y el cambio modifica muy poco el resultado que se obtuvo.

El hecho de que las trayectorias de mercurio no sean cerradas (por la propia precesión del perihelio) hace que el potencial se acumule poco a poco (no se incrementa en cada rotación porque fluctúa, pero la tendencia es a hacerse cada vez mas negativo). Lo que resulta para la partícula en un potencial extra al que le ejerce el sol y que hace que mercurio se vea atraído por más masa de la que el sol tiene.

El ‘aumento’ de la masa del sol se traduce en un acercamiento de mercurio al sol y, por conservación del momento angular, a un aumento de la velocidad orbital de mercurio. Esto último no se ha podido comprobar en las simulaciones porque el potencial en 100 años se acumula de manera ridícula frente al potencial del sol. Si bien este efecto podría explicar la materia oscura. Pero sólo en parte, porque intentar repetir el cálculo del evento multimensajero con sólo materia bariónica lleva a una incongruencia en el cálculo. Por lo que sólo podría explicar en parte la materia oscura. El conocimiento de la masa del neutrino, podría arrojar luz sobre la proporción de materia oscura/bariónica real.

Nótese que si pensamos en cuerpos celestes que orbitan su estrella, los más próximos a ella rotan más rápido alrededor y ello acumula potencial más rápidamente que los cuerpos con un periodo

superior, por lo que parecería que la materia oscura se acumula cerca de la estrella anfitriona y disminuye conforme nos alejamos como lo perfiles trazados de materia oscura mediante Einasto o NFW.

Aplicación a la vía láctea

Si hacemos uso de la identidad,

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{a}_2}{\gamma'^2_2},$$

en la expresión anterior,

$$dV_{12} = \frac{-GM_1}{c_m^2 R_{12}} \frac{\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2}{\gamma'^2_2},$$

que podemos integrar (suponiendo constante el factor de lorentz) para dar,

$$V_{12} = \frac{-GM_1}{c_m^2 R_{12} \gamma'^2_2} \frac{v_2^2 - v_{2o}^2}{2}.$$

La constante de integración v_{2o} indica que cuando la velocidad tenía ese valor, el potencial era nulo. Como en este apartado sólo queremos conocer el orden de magnitud de su influencia, vamos a suponer la constante nula, por lo que sobrestimamos el efecto del potencial inducido.

Para poder calcular este efecto nos vamos a apoyar en la aproximación lineal a la curva de rotación de la referencia [8],

$$v_2 = v(r_o) + \beta(r - r_o),$$

donde r_o es la distancia del sol al centro galáctico, y β es una constante negativa, por lo que la curva es una aproximación lineal decreciente,

$$\beta = -1.7 e^3 \frac{m}{s kpc},$$

de la referencia [9] obtenemos,

$$r_o = 8.122 kpc,$$

Si suponemos halo esférico, la ecuación de Poisson para la distribución de masa quedaría,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_{ind}}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho.$$

Como nuestro V_{12} es el potencial inducido,

$$V_{ind} = \frac{-GM_1}{c_m^2 r \gamma'^2_2} \frac{v_2^2}{2},$$

sustituimos en él el valor de la velocidad de la curva de rotación,

$$V_{ind} = \frac{-GM_1}{2c_m^2 \gamma'^2_2} \frac{(v_o + \beta(r - r_o))^2}{r},$$

e introducimos esto en la ecuación de Poisson,

$$r^2 \frac{\partial V_{ind}}{\partial r} = \frac{-GM_1}{2c_m^2 \gamma'_2} r^2 \left(\frac{2\beta(v_o + \beta(r-r_o))}{r} - \frac{(v_o + \beta(r-r_o))^2}{r^2} \right),$$

$$r^2 \frac{\partial V_{ind}}{\partial r} = \frac{-GM_1}{2c_m^2 \gamma'_2} (v_o + \beta(r-r_o))(-v_o + \beta(r+r_o)),$$

volviendo a derivar,

$$\frac{-GM_1}{2c_m^2 \gamma'_2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} ((v_o + \beta(r-r_o))(-v_o + \beta(r+r_o))) = 4\pi G \rho,$$

dando,

$$\frac{-M_1}{2c_m^2 \gamma'_2} \frac{1}{r^2} (\beta(-v_o + \beta(r+r_o)) + \beta(v_o + \beta(r-r_o))) = 4\pi \rho,$$

que se simplifica a,

$$\frac{-M_1}{c_m^2 \gamma'_2} \frac{\beta^2}{4\pi r} = \rho,$$

que nos da una densidad negativa de masa, pero más nos interesa el orden de magnitud del valor. Suponemos que M_1 es la masa del agujero negro en el centro galáctico (SgrA*). Tomando las constantes,

$$M_1 = 4e^6 M_s.$$

Obtenemos,

$$\frac{-2.0471e^{-5} M_s / kpc^2}{r \gamma'_2} = \rho,$$

Valor que es despreciable frente a la contribución de la materia oscura,

$$\rho_o = 1.992e^7 M_s / kps^3.$$

Para este apartado también se ha consultado la referencia [10].

Anexo VI: Agujeros negros primordiales y el impulsor dinámico antigravitatorio

Los agujeros negros primordiales son un intento de explicar la materia oscura. Lo interesante de ellos es que se forman (supuestamente) por agrupamiento en un mismo estado cuántico de bosones (fotones) en el plasma primordial.

Si recordamos la aceleración inducida en mercurio (subíndice 2) por el sol (subíndice 1) es,

$$\vec{a}_2 = \frac{\sum_{j \neq 2} \frac{-GM_j \vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{GM_1 \vec{a}_1}{c_m^2 \gamma'_1 r_{12}}}{1 - \frac{GM_1}{c_m^2 \gamma'_2 r_{12}}}.$$

Si atendemos al denominador y suponiendo que los factores de Lorentz generalizados son la unidad, dicho denominador se anula a la distancia del radio de Schwarzschild (R_{sc}). Dicho de otro modo, a distancia inferior a R_{sc} , las fuerzas gravitatorias se vuelven repulsivas; por lo que no se puede caer a un agujero negro (de ningún tipo). También indicamos en la referencia [13], que R_{sc} está sobreestimado y que un valor más acorde con la propiedad de no emisión de radiación implica un radio del orden de diez veces inferior al R_{sc} .

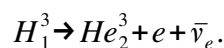
Una aplicación directa de lo que estamos diciendo sería fabricar y confinar un agujero negro primordial en una esfera, fijando la esfera a un vehículo se podría impulsar dicho vehículo con antigravedad sin mas que comenzar el movimiento. Fabricar el agujero negro sería posible si se introduce un haz láser en la esfera por una cavidad que no permite el escape del mismo. La esfera debe tener las dimensiones correctas para que el haz interfiera constructivamente, y ser de material reflectante al haz (casi cualquier metal). Imagino que para poder realizar movimientos de velocidad alta, haría falta dotar al agujero negro de carga y rotación, para que el confinamiento pudiera ser magnético (mucho mas fiable).

Aunque podría pensarse que la energía que hay que invertir es mucha (y lo es), la energía no va a ningún lado, porque está confinada; así que el problema real ahora es cómo recuperarla de manera eficiente una vez que el vehículo abandona la atmósfera. O hacer un confinamiento realmente bueno, si se quiere usar para transporte terrestre. Una posibilidad sería dotar de rotación a la esfera, de modo que, probablemente, la rotación en el sentido de giro del haz suministra energía al haz, y rotando en sentido contrario, se resta energía al haz (que esto puede hacerse se deduce de los resultados de experimentos sagnac, ver [11]).

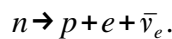
Desde hace tiempo existen varias propuestas para recuperar energía de agujeros negros, nótese que aplicar con éxito alguna de las propuestas podría permitir aprovechar incluso la energía de los neutrinos (solares, por ejemplo) que serían atrapados por el agujero negro.

Anexo VII: Cota a la masa de los neutrinos

La podemos determinar de la reacción que usa KATRIN para detectar los antineutrinos electrónicos^[16], en el decaimiento beta del tritio,



El subíndice indica el número atómico Z, y el superíndice el número de nucleones (neutrones+protones). En la reacción se convierte un neutrón (n) en un protón (p) mas un electrón (e) mas un antineutrino electrónico. La podemos expresar,



Donde las masas conocidas,

$$M_n = 939.5654205254 \text{ MeV}/c^2,$$

$$M_p = 938.2720881629 \text{ MeV}/c^2,$$

$$M_e = 0.519989500015 \text{ MeV}/c^2.$$

Y la liberación de 18.6keV, dan una cota para la masa del antineutrino electrónico,

$$M_{\bar{\nu}_e} < M_n - M_p - M_e - 0.0186,$$

$$M_{\bar{\nu}_e} < 0.763733412 \text{ MeV}/c^2.$$

Supuestas velocidades nulas para los productos de la reacción.

Anexo VIII: Cambio de sistema de referencia

El cambio del sistema de referencia nos sirve para simplificar la integración y merece ser comentado en algún detalle. Vamos a analizar el cambio en el sistema SN1987a-tierra-MW_GC (milky way galactic center).

Las coordenadas ecuatoriales ofrecen un sistema de referencia centrado en la tierra con los ejes en una posición poco favorable respecto a nuestro esquema de referencia. En nuestro nuevo sistema, queremos que el eje x_n venga dado por el vector de posición de SN1987A (r_{1u} , la u es para notar que el vector debe ser unitario, en las fórmulas viene notado con un gorrito en vez de la fecha de vector), para definir el eje z_n recurrimos al producto vectorial de r_{2u} (vector de posición del MW_GC) con r_{1u} , esto da un eje z_n que ‘sale del papel’. Para el eje y_n hacemos de nuevo el producto vectorial, esta vez entre los recién obtenidos z_n y x_n . Es muy importante renormalizar cada vector obtenido porque el producto vectorial estropea rápidamente los vectores unitarios e introduce errores numéricos apreciables. La definición de los vectores queda,

$$\begin{aligned}\hat{x}_n &= \hat{r}_1, \\ \hat{z}_n &= \hat{r}_2 \wedge \hat{r}_1, \\ \hat{y}_n &= \hat{z}_n \wedge \hat{x}_n.\end{aligned}$$

Después de calcular la matriz de transformación de vectores antiguos a nuestro nuevo sistema (T), necesitamos aplicar a los vectores una traslación para pasar del sistema geocéntrico al nuevo con centro en MW_GC. El vector de traslación es $r_o = [-X_d, b, 0]$. La matriz T se define como,

$$T = \begin{bmatrix} [x_{n,x}, x_{n,y}, x_{n,z}] \\ [y_{n,x}, y_{n,y}, y_{n,z}] \\ [z_{n,x}, z_{n,y}, z_{n,z}] \end{bmatrix}.$$

En notación de octave, $T = [x_n; y_n; z_n]$. Siendo x_n vectores unitarios fila (1 fila y 3 columnas). Para calcular vectores en el nuevo sistema,

$$\vec{v}_n = T \cdot \vec{v} + \vec{r}_o.$$

En notación de octave, $vn = (T * v')' + ro$, ya que trabajamos con vectores fila y el producto por la derecha exige vectores columna y devuelve vector columna.

Como comprobación de que todo funciona, el vector $[1, 0, 0]$ del nuevo sistema debe ser r_{1u} rotado mediante la matriz inversa de T. En octave, $(inv(T) * [1; 0; 0])'$, o $(T \backslash [1; 0; 0])'$.

Lo único que es diferente para el sistema Betelgeuse-tierra-MW_GC es el vector de traslación $r_o = [X_b, b, 0]$.

Anexo IX: Sincronización de eventos con incrementos temporales

Empecemos por definir el incremento temporal,

$$\Delta t = \tau - t_e.$$

por lo que los incrementos temporales para cada mensajero,

$$\begin{aligned}\frac{d \Delta t_s}{dt_e} &= 1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) \rightarrow \Delta t_s = \int_0^{t_f} \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right)\right) dt_e, \\ \frac{d \Delta t_n}{dt_e} &= \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 2 \rightarrow \Delta t_n = \int_0^{t_f} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 2\right) dt_e, \\ \frac{d \Delta t_g}{dt_e} &= 0 \rightarrow \Delta t_g = 0.\end{aligned}$$

El primero es el retardo shapiro de los fotones, ‘positivo’. El incremento temporal de los neutrinos es ‘negativo’ y los gravitones no tienen.

Para establecer las ecuaciones de sincronización, ahora calculamos el tiempo de tránsito y le sumamos el incremento que corresponda. Lo referimos todo al tiempo de tránsito del fotón (t_f) por ser el tiempo mas corto.

Eventos neutrino-fotón

La ecuación queda,

$$t_f + \Delta t_s = t_f + \Delta t_n + \delta,$$

Donde simplificando y sustituyendo los incrementos,

$$\int_0^{t_f} \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right)\right) dt_e = \int_0^{t_f} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 2\right) dt_e + \delta.$$

Reagrupando las exponenciales con sus constantes a la izquierda, e integrando el factor de lorentz,

$$\int_0^{t_f} \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)\right) dt_e = \frac{t_f}{\gamma - 1} + \delta,$$

donde hemos agrupado el 1 del factor de lorentz en su fracción, recuérdese que de esa fracción no despejamos gamma, usamos gamma-1 para despejar la energía del neutrino.

Pasando al tiempo adimensional y dividiendo por t_f llegamos a la expresión final,

$$\int_0^1 \left(2 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right)\right) d\tau = \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{\delta}{t_f}.$$

Eventos fotón-gravitón

La ecuación queda,

$$t_f + \Delta t_s = t_f \sqrt{2} + \Delta t_g + \delta,$$

Donde simplificando y sustituyendo los incrementos,

$$t_f + \int_0^{t_f} \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right)\right) dt_e = t_f \sqrt{2} + \delta,$$

dejando sólo la integral en el primer miembro, pasando al tiempo adimensional y dividiendo por t_f llegamos a la expresión final,

$$\int_0^1 \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c_m^2}\right) \right) d\tau = \sqrt{2} - 1 + \frac{\delta}{t_f}.$$

Eventos neutrino-gravitón (tentativo)

La ecuación queda,

$$t_f \sqrt{2} + \Delta t_g = t_f + \Delta t_n + \delta,$$

Donde simplificando y sustituyendo los incrementos,

$$t_f \sqrt{2} = t_f + \int_0^{t_f} \left(\exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) + \frac{1}{\gamma} - 2 \right) dt_e + \delta,$$

llevando la integral y constantes al primer miembro, pasando al tiempo adimensional y dividiendo por t_f llegamos a la expresión final,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) dt_e + t_f(\sqrt{2} - 1) &= \int_0^{t_f} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) dt_e + \delta, \\ \int_0^1 \left(1 - \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) \right) d\tau + t_f(\sqrt{2} - 1) &= \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{\delta}{t_f}. \end{aligned}$$

Referencias

- [1] SIMBAD <https://simbad.cds.unistra.fr>
- [2] Gaia Archive <https://gea.esac.esa.int/archive/>
- [3] Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos.
<https://vixra.org/abs/2404.0013> versión 4.
- [4] Detection of the Keplerian decline in the Milky Way rotation curve. [arxiv:2309.00048](https://arxiv.org/abs/2309.00048)
[v4](#)
- [5] Neutrinos from SN1987A.
<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1987ApJ...318L..63B/abstract>
- [6] Constraints on neutrino speed, weak equivalence principle violation, Lorentz invariance violation, and dual lensing from the first high-energy astrophysical neutrino source TXS 0506+056. [arxiv:1807.05621](https://arxiv.org/abs/1807.05621) v2

- [7] New Precision Test of the Einstein Equivalence Principle from SN1987A. Michael J. Longo. 1987. Physical review Letters.
- [8] Mapping the Milky Way Disk with Gaia DR3: 3D Extended Kinematic Maps and Rotation Curve to 30kpc. Wang et al. Artículo publicado el 28 Dec 2022.
- [9] Mass Models of the Milky Way and Estimation of Its Mass from the Gaia DR3 Data Set. Labini et al. Artículo publicado el 1 marzo 2023.
- [10] Gaia-DR2 extended kinematical maps. Part III: Rotation curves analysis, dark matter, and Modified Newtonian dynamics test. Chrobáková et al. [arxiv:2007.14825v1](https://arxiv.org/abs/2007.14825v1)
- [11] Análisis del experimento del rotor mossbauer. <https://vixra.org/abs/2404.0118v2>
- [12] Distance Determination Using Redshift and the Universe Expansion: Dark Matter Model for Rotational Systems. <https://vixra.org/abs/2502.0095v3>
- [13] Desplazamiento en frecuencia gravitacional de fotones en relatividad especial de campos. <https://vixra.org/abs/2211.0117>
- [14] The rotation curve of the large magellanic cloud and the implications for microlensing. David R. Alves et al. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0006018v1>, versión 1 del 1 Jun 2000.
- [15] Unified rotation curve of the galaxy – decomposition into de Vaucouleurs bulge, disk, dark halo, and the 9-kpc rotation dip- Yoshiaki Sofue et al. <https://arxiv.org/abs/0811.0859v2>. Versión 2 del 7 Nov 2008.
- [16] Exact relativistic tritium β -decay endpoint spectrum in a hadron model. Fedor Simkovic et al. <https://arxiv.org/abs/0712.3926v2>. Versión 2 del 5 May 2008.
- [17] Efecto doppler en relatividad especial de campos. <https://vixra.org/abs/2509.0132v1>
- [18] Retardo shapiro en relatividad especial. <https://vixra.org/abs/2303.0133v1>
- [19] <https://en.wikipedia.org/wiki/KATRIN>