

Циклическое представление уравнения Дирака

С.Я. Котковский

На основе разработанной киральной алгебры бикватернионов получено новое представление уравнения Дирака. Наша формулировка этого фундаментального уравнения определённым образом сочетает в себе прямой и обратный операторы 4-градиентов, действующие на правую и левую киральные составляющие волновой функции частицы, а также оператор циклического преобразования, действующий на всю волновую функцию частицы. Полученное представление позволяет увидеть в уравнении Дирака связь линейного и циклического времён, а используемая при этом киральная алгебра даёт новые методы для исследования релятивистской физики спина. Выведено преобразование вращения – аналог преобразования Лоренца, который создаёт собственное вращение массивной частицы. Показано, что циклическое преобразование, входящее в полученное представление уравнения Дирака, в декартовом базисе выражается с помощью комплекснозначной матрицы Адамара, что указывает на связь уравнения Дирака с известными алгоритмами помехоустойчивой передачи информации.

Ключевые слова: уравнение Дирака, бикватернионы, нулькватернионы, изотропный базис, киральная алгебра, кососимметрия, киральность, циклическое представление, циклическое сопряжение, матрицы Адамара, спин, преобразование вращения.

Содержание

[Введение](#)

[Часть 1. Киральная алгебра.](#)

[1.1. Бикватернионы.](#)

[1.2. Изотропный базис.](#)

[1.3. Знаковые бикватернионы и проекторы.](#)

[1.4. Типы умножения бикватернионов.](#)

[1.5. Обменные сопряжения бикватернионов.](#)

[Часть 2. Уравнение Дирака.](#)

[2.1. Уравнение Дирака в вейлевских спинорах.](#)

[2.2. Бикватернионная волновая функция.](#)

[2.3. Градиенты.](#)

[2.4. Циклическое сопряжение.](#)

[2.5. Циклическое представление уравнения Дирака.](#)

[2.6. Раздельное представление.](#)

[2.7. Преобразования Лоренца.](#)

[2.8. Плоские волны.](#)

[2.9. Спин.](#)

[2.10. Преобразование вращения.](#)

[2.11. Альтернативные формы циклического представления.](#)

[2.12. Уравнение Дирака и матрицы Адамара.](#)

[Приложения.](#)

[1. Изоморфизм бикватернионов и матриц.](#)

[2. Произведения элементов изотропного базиса.](#)

[Обсуждение и выводы.](#)

[Список литературы.](#)

Введение.

Уравнение Дирака, определяющее релятивистскую волновую функцию, занимает центральное место в квантовой теории поля [1]. Это уравнение описывает волновые функции элементарных частиц полуцелого спина. Обычно уравнение Дирака выводится с помощью факторизации уравнения Клейна-Гордона. Смысл последнего уравнения заключается в том, что квадрат массы играет роль собственного значения квадрата оператора энергии-импульса.

Ранее другими авторами были получены бикватернионные представления уравнения Дирака [6][7]. В работе [9] была выведена форма этого уравнения в спинорах, составленных из сплит-кватернионов. В настоящей статье мы приводим новое бикватернионное представление уравнения Дирака, принципиально отличное от представлений, полученных в указанных работах.

Наша статья разделена на две основные части. Первая часть, математическая, называется «Киральная алгебра». Она посвящена построению новых методов алгебры бикватернионов с использованием изотропного базиса бикватернионного пространства, построенного на основе нулькватернионов. Здесь нами вводятся ранее неизвестные способы бикватернионного умножения и сопряжения, а также определяются типы бикватернионов, обладающих особыми свойствами проективности. Во второй, физической, части статьи «Уравнение Дирака», на основе киральной алгебры мы получаем новое представление уравнения Дирака, названное нами циклическим. Наша формулировка этого фундаментального уравнения определённым образом сочетает в себе прямой и обратный линейные операторы градиентов, действующие на правую и левую киральные части волновой функции частицы, с оператором циклического преобразования, действующим на всю волновую функцию частицы.

Часть 1. Киральная алгебра.

1.1. Бикватернионы.

Бикватернионы были открыты В. Гамильтоном вслед за открытием им кватернионов, как комплекснозначное расширение последних [10]. Л. Зильберштейном была выяснена та центральная роль, которую играют бикватернионы в релятивистской теории, или теории единого пространства-времени [11]. Им же было введено наиболее удобное и наглядное скалярно-векторное представление бикватернионов [8]. В скалярно-векторном представлении бикватернионы имеют вид [2][3]:

$$\mathcal{B} = (s, \mathbf{u}), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{C}^3 \quad (1)$$

Как правило, мы будем обозначать бикватернионы заглавными буквами латинского алфавита, тогда как скаляры и векторы прописными. Как следует из определения (1), бикватернион \mathcal{B} это пара, состоящая из комплексного числа s , называемого скаляром, и комплекснозначного трёхмерного вектора \mathbf{u} . s и \mathbf{u} есть скалярная и векторная части бикватерниона \mathcal{B} соответственно. Сумма двух бикватернионов вычисляется покомпонентно, отдельно для скалярной и для векторной частей. Обычное, или *внешнее*, произведение двух бикватернионов $\mathcal{B}_1 = (s_1, \mathbf{u}_1)$ и $\mathcal{B}_2 = (s_2, \mathbf{u}_2)$ вычисляется согласно формуле:

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \odot \mathcal{B}_2 = (s_1 s_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2, s_1 \mathbf{u}_2 + s_2 \mathbf{u}_1 + i \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2), \quad (2)$$

где $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ – скалярное и векторное произведения векторов \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 соответственно, i – мнимая единица. В отличие от других типов произведений бикватернионов, которые будут рассмотрены ниже, для обычного, или внешнего, произведения мы будем использовать оба эквивалентных обозначения $\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_1 \odot \mathcal{B}_2$. Внешнее произведение бикватернионов, как и вводимые далее другие типы их произведений, некоммутативное – оно зависит от порядка следования сомножителей.

Произвольный комплексный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ представляет собой частный случай бикватерниона, у которого скалярная часть равна нулю:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

Комплексное сопряжение бикватерниона $\mathcal{B} = (s, \mathbf{u})$ имеет вид:

$$\mathcal{B}^* = (s^*, \mathbf{u}^*) \quad (4)$$

Комплексное сопряжение бикватернионов соответствует эрмитовому сопряжению матричной алгебры (см. приложение 1).

Векторное сопряжение¹ бикватерниона $B = (s, \mathbf{u})$ имеет вид:

$$\bar{B} = (s, -\mathbf{u}) \quad (5)$$

Одновременное применение комплексного и векторного сопряжений даёт *двойное сопряжение* бикватерниона:

$$\bar{B}^* = (s^*, -\mathbf{u}^*) \quad (6)$$

Два бикватерниона называются *эквивалентными*, если они равны друг другу с точностью до скалярного (комплексно-числового) множителя:

$$B_1 \approx B_2: B_1 = \lambda B_2, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \quad (7)$$

Квадрат модуля бикватерниона $B = (s, \mathbf{u})$ есть комплексное число, определяемое согласно формуле:

$$|B|^2 = B\bar{B} = s^2 - \mathbf{u}^2, \quad |B|^2 \in \mathbb{C} \quad (8)$$

1.2. Изотропный базис.

В этом разделе мы вводим в рассмотрение изотропный базис² пространства бикватернионов. Этот базис построен на бикватернионах, имеющих нулевой квадрат модуля. В физике такие величины обычно описывают свет и называются изотропными, что и определяет название базиса.

Рассмотрим более подробно два возможных типа бикватернионов Q , имеющих нулевой квадрат модуля (8): $|Q| = 0$. В нашей терминологии такие бикватернионы называются *нулькватернионами* [2]. Первый из двух возможных типов нулькватернионов это нульвекторы³ - трёхмерные комплексные векторы, квадрат которых равен нулю. Каждый нульвектор \mathbf{q} раскладывается в комплексную сумму двух взаимно-ортогональных векторов \mathbf{A} и $i\mathbf{B}$ одинаковой длины (Рис.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \\ \mathbf{q} &\in \mathbb{C}^3, \quad \mathbf{q}^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Вектор \mathbf{q}^* , комплексно сопряжённый данному нульвектору \mathbf{q} , также является нульвектором. Нульвектором является и вектор $\lambda\mathbf{q}$, где λ – произвольное, отличное от нуля, комплексное число.

¹ Сопряжение, именуемое здесь «векторным», часто называют просто сопряжением или «бикватернионным сопряжением». Название «векторное сопряжение» применяется нами для того, чтобы чётко отличать этот вид от других видов сопряжений бикватернионов.

² Другое название изотропного базиса *световой базис*.

³ Нульвекторы также называют изотропными векторами.

Второй тип нулькватернионов составляют *однородные нулькватернионы* N , каждый из которых можно получить из соответствующего вещественного вектора единичной длины \mathbf{n} следующим образом:

$$N = \lambda(1, \mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{n}^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}; \quad N\bar{N} = 0 \quad (10)$$

Векторное сопряжение однородного нулькватерниона N снова даёт однородный нулькватернион $\bar{N} = \lambda(1, -\mathbf{n})$.

Изотропный базис бикватернионного пространства состоит из следующих четырёх фиксированных элементов, каждый из которых является нулькватернионом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + i\mathbf{B}) \\ \mathbf{q}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - i\mathbf{B}) \\ N = \frac{1}{2}(1, \mathbf{n}) \\ \bar{N} = \frac{1}{2}(1, -\mathbf{n}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{q}, \mathbf{q}^*, N, \bar{N} = const \\ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = \mathbf{n}^2 = 1 \end{array} \quad (11)$$

Первые два из этих элементов \mathbf{q} и \mathbf{q}^* это нульвекторы, а оставшиеся два N и \bar{N} – однородные нулькватернионы. Нульвекторы \mathbf{q} и \mathbf{q}^* лежат в одной плоскости Π , которую мы назовём *поперечной плоскостью*; в этой плоскости лежат составляющие \mathbf{q} и \mathbf{q}^* вещественные векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} . Единичный *продольный* вещественный вектор \mathbf{n} нормален этой плоскости. Изотропный базис, таким образом, задаётся некоторым постоянным направлением в пространстве (вектор \mathbf{n}) и фиксированным углом поворота в плоскости Π , определяющим положение пары взаимно-ортогональных векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} . Нульвекторы \mathbf{q} и \mathbf{q}^* и однородные нулькватернионы N и \bar{N} связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^* = N, \quad \mathbf{q}^*\mathbf{q} = \bar{N} \quad (12)$$

В (12) $\mathbf{q}\mathbf{q}^*$ и $\mathbf{q}^*\mathbf{q}$ – обычные, или внешние, бикватернионные произведения (2). Одновременно с этим имеет место векторная связь: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{n}$, где $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ обозначает векторное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} . Рис. 2 даёт схематическое изображение изотропного базиса.

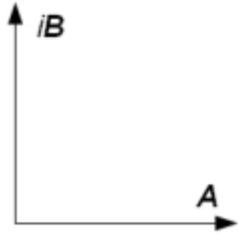


Рис.1. Нульвектор \mathbf{q}
(плоскость Π).

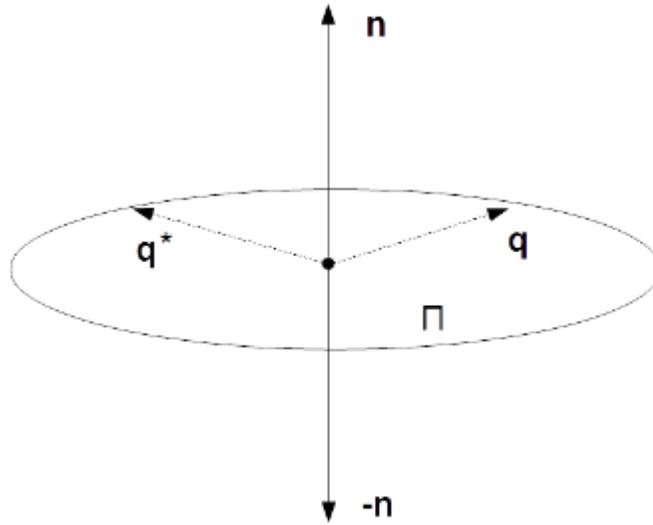


Рис.2. Изотропный базис.

В обычном ортонормальном базисе, построенном на вещественных векторах $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{n}$, векторы $\mathbf{n}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^*$ имеют следующие комплексные декартовы координаты:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Произвольный бикватернион \mathcal{B} раскладывается по изотропному базису с помощью комплексно-числовых координат α, β, ξ, η :

$$\mathcal{B} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi \mathbf{n} + \eta \bar{\mathbf{n}}, \quad \alpha, \beta, \xi, \eta \in \mathbb{C} \quad (14)$$

Легко показывается единственность этого разложения.

Разложим бикватернион \mathcal{B} (14) на две составляющие:

$$\mathcal{B} = \mathbf{u} + \mathcal{P}, \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* \\ \mathcal{P} = \xi \mathbf{n} + \eta \bar{\mathbf{n}} \end{cases} \quad (15)$$

Первая составляющая \mathbf{u} , назовём её *поперечником*, это комплексный вектор, лежащий в плоскости Π . Вторая составляющая \mathcal{P} , назовём её *продольником*, это бикватернион, векторная часть которого параллельна нормали \mathbf{n} к плоскости Π . Разложение (15), таким образом, даёт *продольно-поперечное* представление бикватерниона \mathcal{B} .

Рассмотрим некоторую точку бикватернионного пространства, рассматриваемого как пространство-время. Пусть эта точка описывается декартовыми координатами, включая время: t, x, y, z . Связь декартовых и изотропных координат выражается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha = x - iy \\ \beta = x + iy \\ \xi = t + z \\ \eta = t - z \end{cases} \quad (16)$$

Соотношения типа (16) естественным образом применимы не только к координатам точки, но и к компонентам любого другого бикватерниона. Из (16) можно получить связь между частными производными в изотропном и декартовом базисах:

$$\begin{cases} \partial_\alpha = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \\ \partial_\beta = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \partial_\xi = \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_z) \\ \partial_\eta = \frac{1}{2}(\partial_t - \partial_z) \end{cases} \quad (17)$$

1.3. Знаковые бикватернионы и проекторы.

Сгруппируем члены разложения (14) так, чтобы представить его в следующем виде:

$$B = B_+ + B_-, \quad \begin{cases} B_+ = \alpha\mathbf{q} + \eta\bar{N} \\ B_- = \beta\mathbf{q}^* + \xi N \end{cases} \quad (18)$$

Бикватернионы вида B_+ и B_- назовём *знаковыми* – положительным и отрицательным соответственно. Тот факт, что некоторый бикватернион B является положительным знаковым, мы будем обозначать в символической форме как $B = B_+$, а отрицательным знаковым – соответственно как $B = B_-$.

Разложим теперь тот же бикватернион B (14) другим способом:

$$B = B^+ + B^-, \quad \begin{cases} B^- = \alpha\mathbf{q} + \xi N \\ B^+ = \beta\mathbf{q}^* + \eta\bar{N} \end{cases} \quad (19)$$

Бикватернионы вида B^- и B^+ назовём *проекторами* – отрицательным и положительным соответственно. Далее в (28) будет дано объяснение этому названию. Из однозначности разложения по изотропному базису следует, что каждый бикватернион однозначным образом раскладывается как в сумму знаковых бикватернионов, так и в сумму проекторов.

Знаковые бикватернионы и проекторы связаны между собой операцией векторного сопряжения (5):

$$\begin{cases} \overline{B_+} = B'^- \\ \overline{B_-} = B'^+ \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{B^-} = B'^+ \\ \overline{B^+} = B'^- \end{cases} \quad (20)$$

Из соответствия (20) следует изоморфизм между знаковыми бикватернионами и проекторами по внешнему умножению с учётом того, что произведение двух проекторов

должно браться в порядке обратном произведению знаковых бикватернионов. Следует обратить внимание на то, что хотя оба рассматриваемых типа бикватернионов, проекторы и знаковые бикватернионы, обладают знаковой характеристикой, термин «знаковый» и «знаковость» применяется нами только к первым. Как будет показано далее, в используемом нами представлении волновых функций киральные (право- или левосторонние) состояния являются проекторами.

1.4. Типы умножений бикватернионов.

Помимо обычного, или внешнего, способа умножения бикватернионов (2) можно ввести и другие способы их умножения. В настоящей работе используются четыре различных способа умножения бикватернионов. Ниже приводится вид произведений этих типов для двух бикватернионов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 , представленных в продольно-поперечном представлении и в изотропном базисе как:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathcal{P}_1 = \alpha_1 \mathbf{q} + \beta_1 \mathbf{q}^* + \xi_1 N + \eta_1 \bar{N} \\ \mathcal{B}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathcal{P}_2 = \alpha_2 \mathbf{q} + \beta_2 \mathbf{q}^* + \xi_2 N + \eta_2 \bar{N} \end{cases} \quad (21)$$

В соответствии с (18) каждый из этих бикватернионов можно разложить на знаковые части:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_{1+} + \mathcal{B}_{1-} \\ \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{2+} + \mathcal{B}_{2-} \end{cases} \quad (22)$$

Первые два из приводимых ниже типов умножения бикватернионов, внешнее и внутреннее, отвечают первым двум возможным способам умножения квадратных матриц второго порядка – при помощи сложения произведений элементов строк первой матрицы на элементы столбцов второй матрицы либо при помощи их вычитания. (см. приложение 1). Внешнее и внутреннее умножения непосредственно задействованы в формулировке циклического представления уравнения Дирака. Третий по счёту, диагональный, тип умножения в матричном представлении использует сложение умножаемых компонент не по горизонтали или по вертикали, а по диагонали. К этому типу умножения мы обратимся, когда будем описывать спин частицы. Четвёртый, перекрёстный, тип определённым образом сочетает в себе первые два типа.

1) Внешнее произведение \odot

Внешнее⁴, или обычное, произведение бикватернионов было определено выше в формуле (2). В изотропном базисе внешнее произведение двух бикватернионов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 выражается как:

$$\mathcal{B}_1 \odot \mathcal{B}_2 = (\xi_1 \alpha_2 + \alpha_1 \eta_2) \mathbf{q} + (\eta_1 \beta_2 + \beta_1 \xi_2) \mathbf{q}^* + (\alpha_1 \beta_2 + \xi_1 \xi_2) N + (\beta_1 \alpha_2 + \eta_1 \eta_2) \bar{N} \quad (23)$$

2) Внутреннее произведение \otimes

В изотропном базисе внутреннее произведение двух бикватернионов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 выражается как:

⁴ Используемые в настоящей работе термины *внешнее* и *внутреннее произведения* имеют иной смысл, чем в алгебре Грассмана.

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = (\alpha_1 \alpha_2 + \xi_1 \eta_2) \mathbf{q} + (\beta_1 \beta_2 + \eta_1 \xi_2) \mathbf{q}^* + (\beta_1 \xi_2 + \xi_1 \alpha_2) N + (\alpha_1 \eta_2 + \eta_1 \beta_2) \bar{N} \quad (24)$$

В приложении 2 приводятся попарные произведения элементов изотропного базиса по внешнему и по внутреннему умножению. На основе этих произведений можно получить общие формулы соответствующих произведений (23),(24).

Внутреннее произведение обладает рядом удивительных и неожиданных свойств, подробное изучение которых выходит за рамки данной статьи. Приведём лишь один из примеров таких свойств, как то, что внутреннее произведение двух комплексных чисел λ_1 и λ_2 есть поперечный вектор: $\lambda_1 \otimes \lambda_2 = \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{A}$. Также внутреннее произведение числа на бикватернион не обладает обычной для таких произведений дистрибутивностью:

$$\lambda \otimes (\alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N}) \neq \lambda \alpha \mathbf{q} + \lambda \beta \mathbf{q}^* + \lambda \xi N + \lambda \eta \bar{N}.$$

3) Диагональное произведение \times

В изотропном базисе диагональное произведение двух бикватернионов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 выражается как⁵:

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \xi_2) \mathbf{q} + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \eta_2) \mathbf{q}^* + (\xi_1 \alpha_2 + \eta_1 \xi_2) N + (\xi_1 \beta_2 + \eta_1 \eta_2) \bar{N} \quad (25)$$

4) Перекрёстное произведение \diamond

Перекрёстное умножение бикватернионов определённым образом соединяет в себе внешнее и внутреннее умножения. Перекрёстное произведение двух бикватернионов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 имеет вид:

$$\mathcal{B}_1 \diamond \mathcal{B}_2 = \mathbf{u}_1 \odot \mathbf{u}_2 + \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 \quad (26)$$

$$\mathcal{B}_1 \diamond \mathcal{B}_2 = \eta_1 \xi_2 \mathbf{q} + \xi_1 \eta_2 \mathbf{q}^* + \alpha_1 \beta_2 N + \beta_1 \alpha_2 \bar{N} \quad (27)$$

Перекрёстное произведение положительного проектора слева на любой бикватернион справа всегда даёт положительный знаковый бикватернион, а перекрёстное произведение слева отрицательного проектора на любой бикватернион всегда даёт отрицательный знаковый бикватернион. Аналогичные свойства имеют произведения проекторов справа. Запишем все четыре возможных варианта произведений проекторов разных знаков P^\pm на произвольный бикватернион \mathcal{B} слева и справа:

$$\forall \mathcal{B}: \begin{cases} B_1^+ \diamond \mathcal{B} = B_{2+} \\ B_1^- \diamond \mathcal{B} = B_{2-} \\ \mathcal{B} \diamond B_1^+ = B_{2-} \\ \mathcal{B} \diamond B_1^- = B_{2+} \end{cases} \quad (28)$$

Соотношения (28) обуславливают название проекторов: бикватернионы этого типа проецируют произвольный бикватернион на положительный или отрицательный знаковый бикватернион. Заметим, что имеют место соотношения аналогичные (28), в которых

⁵ Важно не путать знак диагонального произведения \times , применяемый к бикватернионам, с так же выглядящим знаком векторного произведения, применяемым к векторам.

знаковые бикватернионы имеют проекционные свойства по отношению к самим проекторам.

1.5. Обменные сопряжения бикватернионов.

Выше были рассмотрены классические типы сопряжений бикватернионов: комплексное B^* (4) и векторное \bar{B} (5). Помимо приведённых выше сопряжений можно ввести и другие типы сопряжения, которые мы рассмотрим ниже. Каждое из этих сопряжений является собой определённую перестановку координат данного бикватерниона в изотропном базисе.

1) *Обменное сопряжение первого типа B^* .*

Определим обменное сопряжение первого типа⁶ следующим образом:

$$B = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \rightarrow B^* = \alpha \mathbf{q}^* + \eta N + \beta \mathbf{q} + \xi \bar{N} \quad (29)$$

Схематично это сопряжение изображается как:

$$B = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \rightarrow B^*$$

2) *Обменное сопряжение второго типа \tilde{B} .*

Введём операцию обменного сопряжения второго типа:

$$B = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \rightarrow \tilde{B} = \xi \mathbf{q} + \eta \mathbf{q}^* + \alpha N + \beta \bar{N} \quad (30)$$

или схематично:

$$B = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \rightarrow \tilde{B}$$

В будущем обменное сопряжение второго типа мы также будем называть просто обменным сопряжением.

3) *Обменное сопряжение третьего типа \ddot{B} .*

Операция обменного сопряжения третьего типа имеет вид:

$$B = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \rightarrow \ddot{B} = \eta \mathbf{q} + \xi \mathbf{q}^* + \beta N + \alpha \bar{N} \quad (31)$$

или схематично:

$$B = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \rightarrow \ddot{B}$$

⁶ В нашей работе [4] обменное сопряжение первого типа называлось знаковым сопряжением, а обменное сопряжение второго типа называлось обменным сопряжением. Также важно не путать символ обменного сопряжения первого типа $*$ с символом комплексного сопряжения $*$.

Опишем некоторые свойства введённых выше трёх обменных сопряжений. Каждое из этих сопряжений обратно по отношению к самому себе: $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B}$, $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$, $\ddot{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$. Каждое из трёх типов обменного сопряжения представляет собой симметричную операцию: $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1^* \Leftrightarrow \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2^*$; $\mathcal{B}_2 = \widetilde{\mathcal{B}}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1 = \widetilde{\mathcal{B}}_2$; $\mathcal{B}_2 = \ddot{\mathcal{B}}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1 = \ddot{\mathcal{B}}_2$. Операции обменного сопряжения различных типов перестановочны по отношению друг к другу: $(\widetilde{\mathcal{B}})^* = \widetilde{\mathcal{B}^*}$ и т.д. Имеет место транзитивная связь между различными типами обменного сопряжения: совместное применение сопряжений двух выбранных типов даёт сопряжение третьего типа: $\widetilde{\mathcal{B}^*} = \ddot{\mathcal{B}}$; $\ddot{\mathcal{B}^*} = \widetilde{\mathcal{B}}$; $(\ddot{\mathcal{B}})^* = \mathcal{B}^*$.

Обменные сопряжение дают возможность обращения множителей бикватернионного произведения с изменением типа произведения: для двух произвольных бикватернионов $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 &= \mathcal{B}_2 \odot \ddot{\mathcal{B}}_1 \\ \widetilde{\mathcal{B}}_1 \otimes \mathcal{B}_2 &= \mathcal{B}_2 \odot \mathcal{B}_1^* \end{aligned} \tag{32}$$

Кроме рассмотренных выше видов сопряжений бикватернионов, ниже мы приводим ещё один тип бикватернионного сопряжения – циклическое сопряжение (40), играющее ключевую роль в нашей формулировке бикватернионного уравнения Дирака.

Часть 2. Уравнение Дирака.

2.1. Уравнение Дирака в вейлевских спинорах.

В представлении спиноров Вейля уравнение Дирака имеет следующий вид [13]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi_L - im \psi_R \\ \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = +(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi_R - im \psi_L \end{cases} \quad (33)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ – трёхмерный вектор, составленный из матриц Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad (34)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

m – масса частицы; $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ – трёхмерный оператор набла; ψ_L и ψ_R – вейлевские трёхмерные спиноры, представляющие собой лево- и правокиральные состояния соответственно:

$$\begin{cases} \psi_L = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_L \\ \psi_R = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}_R \end{cases} \quad u, v, u', v' \in \mathbb{C} \quad (35)$$

Подстрочные символы L и R у столбцов в скобках означают, что эти столбцы различны по своему типу: первый – левокиральный, а второй – правокиральный. Ниже в разделе «Спин» мы покажем, как эти типы выражаются в матрицах. Для будущих целей выпишем уравнения (33) в развёрнутом виде – через комплексно-числовые компоненты u, v, u', v' в частных производных изотропного базиса (17):

$$\begin{cases} \partial_\xi u + \partial_\beta v = -im u' \\ \partial_\eta v + \partial_\alpha u = -im v' \\ \partial_\eta u' - \partial_\beta v' = -im u \\ \partial_\xi v' - \partial_\alpha u' = -im v \end{cases} \quad (36)$$

2.2. Бикватернионная волновая функция.

Представим 4-координату точки пространства-времени в виде бикватерниона $Z = (t, \mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. В изотропном базисе этот бикватернион имеет вид⁷: $Z = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N}$. Связь между обычными декартовыми и изотропными координатами даётся формулами (16),(17). Волновая функция дираковской частицы⁸ описывается бикватернионной функцией пространственно-временных координат:

$$F = \mathbf{q}f_\alpha + \mathbf{q}^*f_\beta + Nf_\xi + \bar{N}f_\eta, \quad (37)$$

где $f_\alpha, f_\beta, f_\xi, f_\eta$ – скалярные комплексные функции пространственно-временных координат: $f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{r}), f_\alpha \in \mathbb{C}$ и т.д.

Разложим согласно (19) функцию F на сумму её проекторных составляющих:

$$F = F^+ + F^- \quad (38)$$

$$\begin{cases} F^- = \mathbf{q}f_\alpha + Nf_\xi \\ F^+ = \mathbf{q}^*f_\beta + \bar{N}f_\eta \end{cases}$$

2.3. Градиенты.

Рассмотрим оператор 4-градиента, выраженный в скалярно-векторном бикватернионном виде: $D = (\partial_t, \mathbf{\nabla})$. Векторно-сопряжённый к нему (обратный) оператор имеет вид: $\bar{D} = (\partial_t, -\mathbf{\nabla})$. С помощью преобразований координат (16),(17) эти два оператора можно представить в изотропном базисе:

$$\begin{cases} D = 2(\mathbf{q}\partial_\beta + \mathbf{q}^*\partial_\alpha + N\partial_\xi + \bar{N}\partial_\eta) \\ \bar{D} = 2(-\mathbf{q}\partial_\beta - \mathbf{q}^*\partial_\alpha + N\partial_\eta + \bar{N}\partial_\xi) \end{cases} \quad (39)$$

В операторе D частная производная ∂_α стоит при \mathbf{q}^* , а частная производная ∂_β при \mathbf{q} , а не наоборот, как бы ожидалось с первого взгляда.

Уравнение Дирака в представлении вейлевских спиноров (33), очевидно, можно представить с помощью матричного дифференциального оператора «спинового 4-градиента» $D_s = (\partial_t, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{\nabla})$. Примечательно, что в изотропном базисе этот оператор с точностью до множителя $\frac{1}{2}$ совпадает с оператором 4-градиента D (39): $D_s = \frac{1}{2}D$.

⁷ Заметим, что здесь и ниже изотропные координаты α, β, ξ, η описывают конкретно 4-координату пространства-времени. Выше же в первой части эти же переменные могли описывать компоненты произвольного бикватерниона.

⁸ Следуя общепринятому соглашению, дираковской частицей мы называем частицу, удовлетворяющую уравнению Дирака.

Переход между операторами прямого и обратного 4-градиентов $D = (\partial_t, \nabla)$ и $-\bar{D} = (-\partial_t, \nabla)$ осуществляется отражением производной по времени: $\partial_t \leftrightarrow -\partial_t$. Поэтому оператор D связан с изменением объекта дифференцирования вперёд во времени, а оператор $-\bar{D}$ с его изменением обратно по времени.

2.4. Циклическое сопряжение.

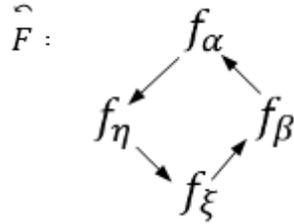
Вводимое ниже бикватернионное представление уравнения Дирака использует операцию циклического сопряжения. Циклическое сопряжение \widehat{F} от бикватерниона F , вычисляется согласно формуле:

$$F = \mathbf{q}f_\alpha + \mathbf{q}^*f_\beta + Nf_\xi + \bar{N}f_\eta \quad \rightarrow \quad \widehat{F} = \mathbf{q}f_\beta + \mathbf{q}^*f_\xi + Nf_\eta + \bar{N}f_\alpha \quad (40)$$

Циклическое сопряжение (40) можно выразить с помощью следующей схемы, на которой показана циклическая перестановка координат для данного бикватерниона F , дающая на выходе \widehat{F} :

$$F = Nf_\xi + \mathbf{q}^*f_\beta + \mathbf{q}f_\alpha + \bar{N}f_\eta \quad \rightarrow \quad \widehat{F} \quad (41)$$

или:



В схеме (41) элементы базиса остаются на месте, а переносятся согласно стрелкам компоненты волновой функции $f_\alpha, f_\beta, f_\xi, f_\eta$. Четырёхкратное применение операции циклического сопряжения возвращает бикватернион в исходное состояние, т.е. реализует полный цикл. Циклическое сопряжение (40) выражается через обменные сопряжения (29) (30) :

$$\widehat{F} = (\widetilde{F} + F^+)^* = \widetilde{F}^* + F^{+*} = F_1^+ + F_1^- \quad (42)$$

$$\begin{cases} F_1^+ = \widetilde{F}^* = \ddot{F}^- \\ F_1^- = F^{+*} \end{cases}$$

Применяя к данной волновой функции F операцию циклического сопряжения дважды, мы получим её обменное сопряжение второго типа:

$$\widehat{F} = \widetilde{F} \quad (43)$$

Формула приводит выражение для *двойного циклического сопряжения*, которое будет востребовано ниже в разделе «Спин» для выяснения физического смысла операции циклического сопряжения.

2.5. Циклическое представление уравнения Дирака.

*Уравнение Дирака в циклическом представлении*⁹ имеет вид:

$$F^- \odot \bar{D} + D \otimes F^+ = im\widehat{F} \quad (44)$$

В уравнении (44) F есть бикватернионная волновая функция дираковской частицы (37), разложенная согласно (38) на сумму её проекторных составляющих: $F = F^+ + F^-$; \widehat{F} – циклическое сопряжение F (40); m – масса частицы, D – бикватернионный оператор 4-градиента, \bar{D} – оператор векторно сопряжённый D (39). Приведём конкретный вид выражений, стоящих в левой части уравнения (44):

$$\begin{aligned} P^- \odot \bar{D} &= 2((- \partial_\beta f_\xi + \partial_\xi f_\alpha) \mathbf{q} + (- \partial_\alpha f_\alpha + \partial_\eta f_\xi) N) \\ D \otimes P^+ &= 2((\partial_\alpha f_\beta + \partial_\xi f_\eta) \mathbf{q}^* + (\partial_\beta f_\eta + \partial_\eta f_\beta) \bar{N}) \end{aligned}$$

Распишем уравнение (44) покомпонентно:

$$\begin{cases} \partial_\xi f_\alpha - \partial_\beta f_\xi = imf_\beta \\ \partial_\eta f_\xi - \partial_\alpha f_\alpha = imf_\eta \\ \partial_\eta f_\beta + \partial_\beta f_\eta = imf_\alpha \\ \partial_\xi f_\eta + \partial_\alpha f_\beta = imf_\xi \end{cases} \quad (45)$$

Уравнение (44), или (45), эквивалентно исходному уравнению Дирака в вейлевских спинорах (33),(36). Соответствие между вейлевскими спинорами ψ_L и ψ_R (35) и бикватернионной волновой функцией, разложенной по изотропному базису (37), $F = \mathbf{q}f_\alpha + \mathbf{q}^*f_\beta + Nf_\xi + \bar{N}f_\eta$ задаётся формулой:

$$\begin{cases} u = f_\alpha & u' = -f_\beta \\ v = -f_\xi & v' = f_\eta \end{cases} \quad (46)$$

или

$$F = \mathbf{q}u - \mathbf{q}^*u' - Nv + \bar{N}v' \quad (47)$$

Из (46),(47) следует, что в используемом нами представлении киральные состояния есть проекторы. Положительный проектор P^+ описывает правокиральное состояние, а

⁹ Форма уравнения Дирака (44) впервые представлена в нашей работе [4].

отрицательный проектор P^- – левокиральное состояние:

$$\begin{cases} F^- \sim \psi_L \\ F^+ \sim \psi_R \end{cases} \quad (48)$$

Действительно, положительный проектор $F^+ = -\mathbf{q}^* u' + \bar{N} v'$ образован из тех же компонент u', v' , что составляют правокиральное вейлевское состояние ψ_R (35). Аналогичным образом отрицательный проектор $F^- = \mathbf{q} u - N v$ образован из компонент u, v , составляющих левокиральное состояние ψ_L .

Ниже в разделе «Спин» будет выяснен физический смысл операции циклического сопряжения волновой функции \hat{F} , входящего в уравнение (44).

2.6. Раздельное представление.

Уравнение (44) можно переписать в виде двух отдельных уравнений для лево- и правокирального состояний описываемой частицы:

$$\begin{cases} F^- \odot \bar{D} = imF^{+*} \\ D \otimes F^+ = im\check{F}^- \end{cases} \quad (49)$$

Выпишем отдельно сопряжённые проекторы, входящие в правые части уравнений (49):

$$\begin{aligned} F^{+*} &= f_\beta \mathbf{q} + f_\eta N \\ \check{F}^- &= f_\xi \mathbf{q}^* + f_\alpha \bar{N} \end{aligned}$$

Для написания уравнений (49) мы воспользовались выражением (42) для циклического сопряжения. Заметим, что в первом из уравнений обе стороны уравнения $F^- \odot \bar{D}$ и imF^{+*} являются отрицательными проекторами, т.е. левокиральными состояниями. Аналогично, во втором из этих уравнений обе стороны представляют собой положительные проекторы, т.е. правокиральные состояния.

Таким образом, циклическое представление уравнения Дирака (44) в неявном виде содержит в себе оба уравнения (49), каждое из которых описывает одно из двух киральных состояний. Посредством операции циклического сопряжения уравнение (44) объединяет в себе обе киральности.

2.7. Преобразования Лоренца.

Мы ограничимся рассмотрением наиболее важного здесь специального преобразования Лоренца для волновой функции дираковской частицы – буста со скоростью $V = th2\theta$ в направлении базисного вектора \mathbf{n} . В представлении вейлевских спиноров (35) это преобразование имеет следующий вид [15]:

$$\begin{cases} \psi_L = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_L \rightarrow \psi'_L = \begin{pmatrix} e^{-\theta} u \\ e^{\theta} v \end{pmatrix}_L \\ \psi_R = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}_R \rightarrow \psi'_R = \begin{pmatrix} e^{\theta} u' \\ e^{-\theta} v' \end{pmatrix}_R \end{cases} \quad (50)$$

Во избежание недоразумений заметим, что в формуле (50) символ штриха имеет два разных очевидных смысла: у функций ψ'_L и ψ'_R это лоренц-преобразованная величина, у величин u' и v' – это составляющие правого спинора согласно формуле (35). В терминах киральной алгебры лоренцевы преобразования выражаются с помощью операций внешнего и внутреннего произведений.

Назовём следующие бикватернионы L и \ddot{L} продольным и поперечным лоренц-операторами соответственно:

$$\begin{cases} L = Ne^{\theta} + \bar{N}e^{-\theta} \\ \ddot{L} = \mathbf{q}e^{-\theta}\mathbf{q}^*e^{\theta} \end{cases} \quad (51)$$

Из (32) следует правило, позволяющее перемещать эти операторы с левой стороны на правую или наоборот:

$$\forall B: B \odot L = \ddot{L} \otimes B \quad (52)$$

Указанный выше буст волновой функции имеет вид:

$$F \rightarrow F' = F \odot L = \ddot{L} \otimes F \quad (53)$$

Преобразование (53) также можно записать, разделяя проекторные составляющие:

$$F \rightarrow F' = F^+ \odot L + \ddot{L} \otimes F^- \quad (54)$$

При преобразованиях Лоренца (50) и (53) и правиле соответствия (46) проекторы и вейлевские спиноры ведут себя одинаковым образом. Применяя преобразование (53) отдельно к каждой проекционной составляющей F^{\pm} , легко убедиться в лоренц-ковариантности уравнения Дирака в отдельном виде (49), а вместе с ним и эквивалентного ему циклического представления этого уравнения (44).

В декартовом базисе энергия-импульс свободной частицы задаётся бикватернионом $K = (\epsilon, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. В световом базисе эта же величина имеет вид: $K = k_{\alpha}\mathbf{q} + k_{\beta}\mathbf{q}^* + k_{\xi}N + k_{\eta}\bar{N}$, Компоненты энергии-импульса в световом и декартовом базисах связаны посредством преобразований вида (17).

Лоренцево преобразование энергии-импульса K выражается в операторах L и $T = \ddot{L}$ общего вида, включающего в себя (51) как частный случай, как:

$$K \rightarrow K' = L^* \odot K \odot L \quad (55)$$

$$K \rightarrow K' = T^* \otimes K \otimes T$$

В (55) обе записи преобразования Лоренца эквивалентны друг другу. Сравнение формул (53) и (55) указывает на характерную особенность преобразований Лоренца различных типов величин. А именно, преобразования волновой функции являются односторонними, а преобразования энергии-импульса двусторонними в плане применения лоренц-операторов.

Пространственно-временная координата $Z = (t, \mathbf{r})$ преобразуется подобно энергии-импульсу (55). Из энергии-импульса частицы и 4-координаты можно составить известный скалярный лоренц-инвариант:

$$\Phi = \epsilon t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{2} (-k_\beta \alpha - k_\alpha \beta + k_\eta \xi + k_\eta N) \quad (56)$$

2.8. Плоские волны.

Простейшее решение уравнения Дирака (44) имеет вид *плоской волны*:

$$F = A e^{i\Phi} + B e^{-i\Phi}, \quad (57)$$

где лоренц-инвариантная фаза волны Φ определяется согласно (56), а A и B – постоянные бикватернионы, для движущейся частицы имеющие следующий вид:

$$A = a_\alpha \mathbf{q} + a_\beta \mathbf{q}^* + a_\xi N + a_\eta \bar{N}, \quad B = b_\alpha \mathbf{q} + b_\beta \mathbf{q}^* + b_\xi N + b_\eta \bar{N} \quad (58)$$

$$\begin{array}{l} a_\alpha = a_1 \\ a_\beta = a_2 \\ a_\xi = \frac{ma_2 - k_\eta a_1}{k_\alpha} \\ a_\eta = \frac{k_\xi a_2 - ma_1}{k_\alpha} \end{array} \quad \begin{array}{l} b_\alpha = b_1 \\ b_\beta = b_2 \\ b_\xi = -\frac{mb_2 + k_\eta b_1}{k_\beta} \\ b_\eta = \frac{k_\xi b_2 + mb_1}{k_\beta} \end{array}$$

Из уравнения Дирака вытекает дисперсионное соотношение:

$$\epsilon^2 - \mathbf{k}^2 = k_\xi k_\eta - k_\alpha k_\beta = m^2 \quad (59)$$

из которого следует досветовой характер массивной дираковской частицы. Ниже мы также рассмотрим аналог уравнения Дирака для сверхсветовой частицы. Составляющие волновой функции $A e^{i\Phi}$ и $B e^{-i\Phi}$ называются положительно-частотной и отрицательно-частотной соответственно.

Для массивной частицы, такой как электрон или позитрон, можно определить состояние покоя. В этом случае $K = m$, или $k_\alpha = k_\beta = 0, k_\xi = k_\eta = m$ и плоская волна (57) принимает вид :

$$F = A_0 e^{imt} + B_0 e^{-imt}, \quad (60)$$

где бикватернионные коэффициенты A_0 и B_0 :

$$A_0 = a_1 \mathbf{q} + a_1 \mathbf{q}^* + a_2 N + a_2 \bar{N}, \quad B_0 = b_1 \mathbf{q} - b_1 \mathbf{q}^* + b_2 N - b_2 \bar{N}$$

2.9. Спин.

Зададимся вопросом как выглядят операторы проекций спина на различные направления в нашем бикватернионном представлении дираковской волновой функции. В представлении вейлевских спиноров эти операторы, с точностью до множителя $\frac{1}{2}$, являются матрицами Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (34). Выше в (35) приведено стандартное выражение лево- и правокирального вейлевских спиноров в виде матричных столбцов. Сейчас же мы выразим их в виде самих матриц 2x2:

$$\begin{cases} \psi_L = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} \\ \psi_R = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}_R \equiv \begin{pmatrix} 0 & u' \\ 0 & v' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (61)$$

Волновая функция частицы общего вида тогда выразится как:

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix} \quad (62)$$

Как мы видим, матричное представление вейлевских спиноров уже не требует указания того, к какому типу, лево- или правокиральному, относится данный столбец. В то же время к этим матрицам употребимы многие операции, имеющие место со столбцами, если использовать обычное матричное умножение. Выпишем вид собственных состояний операторов проекции спина (34) для вейлевских спиноров в их матричном представлении:

$$\begin{cases} \psi_{x\uparrow} = \begin{pmatrix} u & u' \\ u & u' \end{pmatrix}, & \psi_{x\downarrow} = \begin{pmatrix} u & u' \\ -u & -v' \end{pmatrix} \\ \psi_{y\uparrow} = \begin{pmatrix} u & u' \\ iu & iu' \end{pmatrix}, & \psi_{y\downarrow} = \begin{pmatrix} u & u' \\ -iu & -iu' \end{pmatrix} \\ \psi_{z\uparrow} = \begin{pmatrix} u & u' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \psi_{z\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & v' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (63)$$

В (63) $\psi_{x\uparrow}$ это состояние с x -проекцией спина, направленной вверх; $\psi_{x\downarrow}$ это состояние с x -проекцией спина, направленной вниз и т.д. Установим следующее соответствие между матрицами, отображающими вейлевские спиноры (62), и бикватернионами:

$$F = f_\alpha \mathbf{q} + f_\beta \mathbf{q}^* + f_\xi N + f_\eta \bar{N} \leftrightarrow \psi = \begin{pmatrix} f_\alpha & -f_\beta \\ -f_\xi & f_\eta \end{pmatrix}, \quad (64)$$

или $u = f_\alpha$, $v = -f_\xi$, $u' = -f_\beta$, $v' = f_\eta$. Выше в (46), при установлении эквивалентности различных представлений уравнения Дирака, мы уже использовали это соответствие по отношению к вейлевским спинорам-столбцам S помощью этого соответствия между матрицами и бикватернионами устанавливается изоморфизм по сложению и умножению, если для матриц пользоваться обычным умножением, а для бикватернионов – диагональным умножением (25):

$$\psi_1 \psi_2 \leftrightarrow F_1 \times F_2 \quad (65)$$

Прибегая к этому изоморфизму, можно выразить операторы проекции спина в бикватернионах, соответствующие матрицам Паули в матричном представлении:

$$\begin{cases} \hat{S}_x = -(\mathbf{q}^* + N) \\ \hat{S}_y = i(\mathbf{q}^* - N) \\ \hat{S}_z = \mathbf{q} - N \\ \hat{S}_t = \mathbf{q} + \bar{N} \equiv E \end{cases} \quad (66)$$

Каждый из спиновых операторов (66) является бикватернионом и действует на волновую функцию с левой стороны. Четвёртый из этих операторов \hat{S}_t соответствует единичной матрице и является единицей диагонального умножения E . Выразим спиновые состояния (63) в бикватернионном виде:

$$\begin{cases} F_{x\uparrow} = f_\alpha \mathbf{q} + f_\beta \mathbf{q}^* - f_\alpha N - f_\beta \bar{N}, & F_{x\downarrow} = f_\alpha \mathbf{q} + f_\beta \mathbf{q}^* + f_\alpha N + f_\beta \bar{N} \\ F_{y\uparrow} = f_\alpha \mathbf{q} + f_\beta \mathbf{q}^* - if_\alpha N - if_\beta \bar{N}, & F_{y\downarrow} = f_\alpha \mathbf{q} + f_\beta \mathbf{q}^* + if_\alpha N + if_\beta \bar{N} \\ F_{z\uparrow} = f_\alpha \mathbf{q} + f_\beta \mathbf{q}^*, & F_{z\downarrow} = f_\xi N + f_\eta \bar{N} \end{cases} \quad (67)$$

Согласно изоморфизму (65) спиновые операторы (66) использует диагональное умножение. Легко убедиться в том, что волновые функции (67) действительно являются собственными состояниями этих операторов с собственными значениями ± 1 (удвоенный спин):

$$\begin{cases} \hat{S}_x \times F_{x\uparrow} = F_{x\uparrow}, & \hat{S}_x \times F_{x\downarrow} = -F_{x\downarrow} \\ \hat{S}_y \times F_{y\uparrow} = F_{y\uparrow}, & \hat{S}_y \times F_{y\downarrow} = -F_{y\downarrow} \\ \hat{S}_z \times F_{z\uparrow} = F_{z\uparrow}, & \hat{S}_z \times F_{z\downarrow} = -F_{z\downarrow} \end{cases} \quad (68)$$

Продольное направление \mathbf{n} (или z) является выделенным в нашем подходе в силу выбора изотропного базиса¹⁰. Определим *продольный спин* как проекцию спина на направление z . Применяя обменное сопряжение (30) к собственным состояниям продольного спина $F_{z\uparrow}$ и $F_{z\downarrow}$ мы обнаруживаем, что эта операция обращает направление продольного спина на противоположное:

$$\tilde{F}_{z\uparrow} = F_{z\downarrow}, \quad \tilde{F}_{z\downarrow} = F_{z\uparrow} \quad (69)$$

Выше в (43) мы видели, что обменное сопряжение совпадает с двойным циклическим. Таким образом, (69) можно переписать в виде:

$$\tilde{F}_{z\uparrow} = F_{z\downarrow}, \quad \tilde{F}_{z\downarrow} = F_{z\uparrow} \quad (70)$$

В состоянии покоя (60) волновая функция спина направленного вверх по оси z (для положительно-частотной составляющей) имеет вид: $F_{z\uparrow} = a_1 \mathbf{q} + a_1 \mathbf{q}^*$. Применим к этому состоянию преобразование циклического сопряжения: $F_0 = \tilde{F}_{z\uparrow} = a_1(\mathbf{q}^* + N)$. Определим величину z -проекции спина в этом состоянии. Для этого, исходя из соответствия (46), получим представление этого состояния в вейлевских спинорах: $\psi_{0L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_L, \psi_{0R} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_R$. Средняя величина проекции спина s_z в этом состоянии оказывается равной 0: $\langle s_z \rangle = \psi_{0L}^* \sigma_z \psi_{0L} + \psi_{0R} \sigma_z \psi_{0R} = 0$. Назовём F_0 положительно-частотным *нулевым состоянием спина*. Аналогично определяется отрицательно-частотное нулевое состояние спина.

Двойное циклическое сопряжение, оно же обменное сопряжение 2-го типа, есть операция переворота продольного спина. Отсюда следует, что циклическое сопряжение есть операция полу-переворота спина. В наших единицах проекция спина меняется от +1 до -1, Поэтому полу-переворот из состояния с проекцией +1 или -1 осуществляет перевод продольного спина в нулевое состояние F_0 или наоборот – из нулевого состояния F_0 в состояние с проекцией ± 1 . Как мы только что убедились, z -проекция спина в нулевом состоянии, как и должно быть, равна 0. При этом следует иметь ввиду, что операция циклического сопряжения должна отдельно применяться к положительно-частотному и отрицательно-частотному нулевым состояниям. Итак, применение циклического сопряжения к состоянию с нулевой продольной проекцией спина создаёт состояние с проекцией спина ± 1 . Но продольное направление может быть выбрано произвольным образом – при выборе изотропного базиса. Поэтому можно сделать вывод: циклическое сопряжение является оператором надления массивной частицы спином.

2.10. Преобразование вращения.

Как известно, общие преобразования Лоренца включают в себя бусты и повороты. Буст из состояния покоя частицы создаёт состояние с ненулевой линейной скоростью, а поворот

¹⁰ В нашей терминологии продольное направление может не совпадать с направлением импульса частицы, поэтому проекция спина на продольное направление в общем случае не является спиральностью.

поворачивает эту скорость в пространстве. Но тогда должны существовать аналогичные преобразования, переводящие частицу в состояние собственного вращения и преобразования линейного переноса центра этого вращения в пространстве (трансляции). Если ассоциировать спин частицы с её собственным вращением, то, как мы видели в предыдущем разделе, вращение частицы создаётся циклическим сопряжением. Циклическое сопряжение волновой функции частицы составляет правую часть уравнения Дирака (44), Значит, для дираковской частицы преобразование волновой функции, стоящее в левой части уравнения, также работает как генератор вращения частицы:

$$F \rightarrow F'_{rot} = F^- \odot \bar{D} + D \otimes F^+ \quad (71)$$

Покажем, что (71) имеет структуру подобную преобразованиям Лоренца, но несколько иного толка. Перепишем выражение для плоской волны (57) в следующем виде:

$$F = Q_1 + Q_2, \quad (72)$$

где $Q_1 = Ae^{i\Phi}$ и $Q_2 = Be^{-i\Phi}$ – положительно- и отрицательно-частотные составляющие волновой функции F .

Для плоской волны (57)(72) можно сделать следующие замены: $\bar{D} = iK, D = i\bar{K}$ для положительно-частотной составляющей, и $\bar{D} = -iK, D = -i\bar{K}$ для отрицательно-частотной составляющей, так что преобразование (71) запишется как:

$$F \rightarrow F'_{rot} = Q^- \odot K + \bar{K} \otimes Q^+ \quad (73)$$

$$\begin{cases} Q^- = Q_1^- - Q_2^- \\ Q^+ = Q_1^+ - Q_2^+ \end{cases}$$

Назовём Q^- и Q^+ *разностными составляющими* F , а само преобразование (73) *преобразованием вращения*.

Выпишем вместе преобразование Лоренца волновой функции (54) и её преобразование вращения (73):

$$\begin{aligned} F \rightarrow F'_{lor} &= F^+ \odot L + \overset{\dots}{L} \otimes F^- \\ F \rightarrow F'_{rot} &= Q^- \odot K + \bar{K} \otimes Q^+ \end{aligned} \quad (74)$$

Из (74) видно подобие обоих преобразований с той разницей, что в преобразовании Лоренца F'_{lor} входят обычные проекторные составляющие волновой функции F^\pm , а в преобразование вращения F'_{rot} – разностные составляющие Q^\pm ; при этом продольный и поперечный операторы связаны между собой иным образом. В случае с преобразованием вращения роль аналогичную лоренц-операторам (L и $\overset{\dots}{L}$) играют бикватернионы энергии-импульса K и его векторного сопряжения \bar{K} . Связь между продольным и поперечным операторами в первом случае осуществляется через обменное сопряжение $L \rightarrow \overset{\dots}{L}$, а во втором случае через векторное сопряжение $K \rightarrow \bar{K}$.

В терминах преобразования вращения уравнение Дирака (44) может быть записано как:

$$F \rightarrow F'_{rot} = \hat{F} \quad (75)$$

Таким образом, преобразование вращения аналогично преобразованиям Лоренца, но в результате его применения к волновой функции дираковской частицы, последняя приобретает спин (правая часть уравнения \hat{F}). Поэтому это преобразование и есть аналог преобразования Лоренца, который создаёт собственное вращение частицы, о необходимости существования которого мы говорили в начале этого раздела. Остаётся открытым вопрос о нахождении преобразования сдвига (трансляции), связанного с преобразованием вращения,

2.11. Альтернативные формы циклического представления.

Помимо (44) существуют ещё три аналогичных представления уравнения Дирака, использующих свои типы циклических сопряжений. Циклические сопряжения всех четырёх типов тесно связаны с обменным сопряжениями. Детальное рассмотрение всех этих уравнений и их циклических сопряжений выходит за рамки данной статьи. Приведём все четыре возможных записи уравнения Дирака в проекторах, включая рассмотренное выше представление (44):

$$\begin{aligned}
F^- \odot \bar{D} + D \otimes F^+ &= im\tilde{F} \\
F^- \odot \bar{D} - D \otimes F^+ &= im\tilde{F} \\
F^+ \odot \bar{D} + D \otimes F^- &= im\tilde{F} \\
F^+ \odot \bar{D} - D \otimes F^- &= im\tilde{F}
\end{aligned} \tag{76}$$

В (76) $\tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}$ это три других типа циклических сопряжений подобные введённому выше в (40),(41) циклическому сопряжению \tilde{F} . Каждое из уравнений в (76) использует своё собственное представление и соответствие вейлевским спинорам тождественное или аналогичное (46). Каждое из этих уравнений эквивалентно уравнению Дирака и, соответственно, все они эквивалентны друг другу.

Выше мы рассмотрели циклические представления уравнения Дирака в проекторах (76). Выше указывалось на изоморфизм проекторов и знаковых бикватернионов. В силу этого изоморфизма уравнение Дирака также имеет циклические представления в знаковых бикватернионах (18). Эти уравнения, имеющие вид подобный (76), здесь не рассматриваются.

В завершение этого раздела укажем вид уравнения Дирака для *сверхсветовой частицы*:

$$F \odot \bar{D} - D \otimes F^+ = im\tilde{F} \tag{77}$$

Как мы видим, сверхсветовое уравнение Дирака (77) отличается от досветового (44) только знаком между проекторными составляющими $F \odot \bar{D}$ и $D \otimes F^+$. Дисперсионное соотношение для плоской волны (59) при этом заменяется на $\epsilon^2 - \mathbf{k}^2 = k_\xi k_\eta - k_\alpha k_\beta = -m^2$, что и свидетельствует о сверхсветовом характере частицы, описываемой уравнением (77).

2.12. Уравнение Дирака и матрицы Адамара.

С помощью преобразования координат, обратного к (16), можно убедиться, что в декартовых координатах циклическое сопряжение выражается через комплексную матрицу Адамара H_4 :

$$F = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_t \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{F} = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \\ f'_t \end{pmatrix} = H_4 \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_t \end{pmatrix} \tag{78}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 1 \\ i & -1 & -i & -i \\ -1 & i & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В формуле мы выразили согласно (16) ту же самую функцию F (37) в световом базисе через её составляющие в декартовом базисе f_x, f_y, f_z, f_t .

Как известно, матрицы Адамара работают в помехоустойчивых алгоритмах дискретной передачи информации, где на их основе строятся функции Уолша, используемые для кодирования сигналов. Наличие матрицы Адамара в уравнении Дирака указывает на информационный аспект этого уравнения.

Подобные механизмы помехоустойчивости работают и в генетическом коде ДНК, характеризуемом своей многоуровневой кососимметрией и описываемым в терминах генетических матриц Петухова [12]. Ранее нами была предложена математическая модель генетического кода, основанная на методах киральной алгебры [4]. Полученное при этом сходство с теорией спина позволило нам предположить наличие в генетическом коде структур биологического характера подобных спину, обозначенных в указанной работе как *биоспин*.

Приложения.

1. Изоморфизм бикватернионов и матриц.

Между бикватернионами и квадратными матрицами второго порядка существует изоморфизм [14]. Зафиксируем в пространстве бикватернионов некоторый изотропный базис (11). Тогда каждому бикватерниону \mathcal{B} , представленному в этом базисе согласно (14), можно поставить во взаимно-однозначное соответствие квадратную матрицу второго порядка M :

$$\mathcal{B} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \xi & \alpha \\ \beta & \eta \end{pmatrix} \quad (79)$$

Согласно этому правилу соответствия между бикватернионами и квадратными матрицами второго порядка существует изоморфизм по сложению и обычному умножению. Обычное правило умножения матриц, обозначим его как \odot у бикватернионов символом \odot , имеет известный вид:

$$M_1 \odot M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (80)$$

Если для бикватернионов обычное (внешнее) умножение \odot заменить на внутреннее \otimes , то между ними и матрицами также устанавливается изоморфизм:

$$\mathcal{B} = \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}^* + \xi N + \eta \bar{N} \leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \alpha & -\eta \\ \xi & -\beta \end{pmatrix} \quad (81)$$

Однако, для этого изоморфизма требуется поменять правило умножения для матриц на следующее:

$$M_1 \otimes M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} - a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21} - a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} - a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21} - a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (82)$$

Отсюда следует, что внешнее умножение бикватернионов соответствует обычному умножению матриц (80), а внутреннее умножение – умножению матриц (82), при котором произведения элементов строк первой матрицы на элементы столбцов второй матрицы не складываются, а вычитаются.

В настоящей работе используется представление бикватернионов, основанное на изоморфизме первого типа. В силу этого внешнее произведение бикватернионов обладает обычными свойствами умножения матриц, включая ассоциативность. Внутреннее произведение бикватернионов, в отличие от внешнего, не обладает ассоциативностью произведения. Также оказывается, что внешнее произведение бикватернионов не зависит от выбранного базиса, тогда как их внутреннее произведение базисно-зависимое. Между тем можно использовать альтернативное представление бикватернионов, в котором наоборот внутреннее произведение будет ассоциативным и базисно-независимым, а внешнее – неассоциативным и базисно-зависимым.

2. Произведения элементов изотропного базиса.

В таблице 1 приведены попарные произведения элементов бикватернионного изотропного базиса для двух базовых типов умножения: внешнего \odot и внутреннего \otimes .

Таблица 1. Таблица умножения элементов изотропного базиса.

Внешнее (обычное) произведение \odot		Внутреннее произведение \otimes	
$\mathbf{q} \odot \mathbf{q} = 0$	$\mathbf{q}^* \odot \mathbf{q}^* = 0$	$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = 0$	$\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = 0$
$N \odot \bar{N} = 0$	$\bar{N} \odot N = 0$	$N \otimes N = 0$	$\bar{N} \otimes \bar{N} = 0$
$\mathbf{q} \odot \mathbf{q}^* = N$	$\mathbf{q}^* \odot \mathbf{q} = \bar{N}$	$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}$	$\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*$
$N \odot N = N$	$\bar{N} \odot \bar{N} = \bar{N}$	$N \otimes \bar{N} = \mathbf{q}^*$	$\bar{N} \otimes N = \mathbf{q}$
$\mathbf{q} \odot N = 0$	$\mathbf{q}^* \odot \bar{N} = 0$	$\mathbf{q} \otimes N = 0$	$\mathbf{q}^* \otimes \bar{N} = 0$
$\bar{N} \odot \mathbf{q} = 0$	$\bar{N} \odot \mathbf{q}^* = 0$	$\bar{N} \otimes \mathbf{q} = 0$	$N \otimes \mathbf{q}^* = 0$
$\mathbf{q} \odot \bar{N} = \mathbf{q}$	$\mathbf{q}^* \odot N = \mathbf{q}^*$	$\mathbf{q} \otimes \bar{N} = \bar{N}$	$\mathbf{q}^* \otimes N = N$
$N \odot \mathbf{q} = \mathbf{q}$	$\bar{N} \odot \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*$	$N \otimes \mathbf{q} = N$	$\bar{N} \otimes \mathbf{q}^* = \bar{N}$

Из этой таблицы в частности следует, что элементы N, \bar{N} являются идемпотентами по внешнему умножению \odot и нильпотентами по внутреннему, а элементы \mathbf{q}, \mathbf{q}^* – наоборот, нильпотентами по внутреннему умножению \otimes и идемпотентами по внешнему. Таким образом, переход от одного типа умножения к другому переводит идемпотенты и нильпотенты друг в друга.

Обсуждение и выводы.

Путём расширения операций умножения и сопряжения с использованием изотропного базиса нами построена алгебра бикватернионов, которую мы назвали киральной. В терминах киральной алгебры нами получено новое представление уравнения Дирака (44), названное циклическим. В этом бикватернионном представлении уравнение Дирака записывается в одну бикватернионную строку, неявно совмещающую в себе уравнения для состояний обеих киральностей – правой и левой. Помимо операций внешнего и внутреннего умножения бикватернионов, в основе нового представления лежит особая циклическая операция сопряжения, применяемая к компонентам волновой функции частицы. Таким образом, это представление раскрывает внутреннюю циклическую природу дираковской частицы.

Из представления (44) можно сделать вывод: уравнение Дирака описывает связь линейного и циклического времён, характеризующих развитие волновой функции дираковской частицы. Как мы видели выше, обычный градиент D связан с изменением

волновой функции вперёд по времени, тогда как обратный градиент со знаком минус $-\bar{D}$ связан с изменением волновой функции вспять по времени. Отметим, что в нашем уравнении каждый из градиентов прямого и обратного действия сочетается со своим типом умножения, внутренним или внешним и со своей стороной, правой или левой: как $\ominus\bar{D}$ и $D\otimes$. В целом можно утверждать, что в уравнении Дирака сходятся три типа/направления течения времени: линейное прямое, линейное обратное и циклическое. Во взаимосвязи этих времён эволюционирует заданная частица. При этом наличие всех трёх времён – цикла в правой части уравнений и обоих линейных времён в левой части уравнения возможно только для массивной частицы. Циклическое представление уравнения Дирака чётко выявляет временную асимметрию этого уравнения.

Уравнение Дирака и киральная алгебра тесно связаны друг с другом. На языке киральной алгебры уравнение Дирака записывается в кратком и однородном виде, в котором легко просматривается физический смысл. В то же время благодаря этому уравнению конкретный смысл обретают и чисто математические операции киральной алгебры. Так операция обменного сопряжения служит оператором переворота спина, а операция циклического сопряжения наделяет частицу спином.

Нами выведено преобразование вращения – аналог преобразования Лоренца, который создаёт собственное вращение массивной частицы. Левая часть уравнения Дирака даёт такое преобразование для случая плоской волны. Примечательно, что преобразование вращения образуется совместным действием двух линейных операторов энергии-импульса, что напоминает действие пары линейных импульсов в классической механике, которое создаёт вращение твёрдого тела около неподвижного центра. Следующий шаг в развитии этого направления это определение преобразования трансляции, связанного с преобразованием вращения, подобно тому как преобразование поворота связано с преобразованием буста. В целом новый тип пара-лоренцевых преобразований, которыми являются преобразование вращения и трансляция, требует своего дальнейшего изучения.

Киральная алгебра предоставляет для теории спина новый, отличный от традиционного спинорного формализма, математический аппарат. Во многом этот аппарат, как и бикватернионы в целом, существенно проще и легче в обращении традиционно используемого тензорно-спинорного аппарата. Весомым преимуществом бикватернионного аппарата служит отсутствие загромождённости формул индексами.

При использовании киральной алгебры для описания спиновых волновых функций не требуется прибегать к гамма-матрицам. Соответственно, формулы выражаются на более естественном языке. Особенно важно то обстоятельство, что все четыре компоненты разложения в изотропном базисе принципиально различны и отражают существенные характеристики продольно-поперечного разложения. Это позволяет увидеть в получаемых решениях уравнения их поперечную и продольную природу.

Дополнение операции обычного умножения бикватернионов операцией внутреннего умножения позволяет обойти известную проблему делителей нуля бикватернионного пространства, не позволявшую построить алгебру бикватернионов с делением. Эта проблема всегда оказывалась камнем преткновения на пути построения теории

бикватернионных аналитических функций. Как мы убедились выше, произведение одних и тех же множителей в одном типе умножения может быть нулевым, и в то же время в другом типе умножения отличным от нуля. Сочетая оба этих вида умножения, можно построить алгебру бикватернионов с делением и далее, как мы надеемся, полноценный бикватернионный анализ. Можно ожидать, что в таком двустороннем операторном анализе уравнение Дирака окажется условием аналитичности волновой функции. При наличии массы частицы эта аналитическая функция будет иметь особую точку-сингулярность, в которой нарушается её аналитичность, а вычет функции будет описываться правой частью уравнения Дирака.

Обнаруженное нами выражение циклического сопряжения через комплексную матрицу Адамара указывает на связь уравнения Дирака с алгоритмами помехоустойчивости, задействованными в процессах передачи информации.

В настоящей работе мы не занимались описанием в рамках нового подхода квантовых вероятностей, токов, статистики Ферми-Дирака, вторичного квантования и т.д., оставляя на будущее рассмотрение этих важных вопросов.

Список литературы.

1. P.A.M. Dirac. "The Quantum Theory of the Electron". Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 117 (778): 610—624. 1928.
2. С.Я. Котковский. «Нульвекторная алгебра». Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2(23) 12, с.159-172. 2015
3. С.Я. Котковский. «Бивекторная алгебра». Препринт. <https://vixra.org/abs/2108.0015>, 2021.
4. С.Я. Котковский «Алгебраическая модель генетического кода и биоспин». viXra:2406.0163. Принято к публикации в журнале «Биомашсистемы», вып.4, 2024
5. S.Y. Kotkovskiy. "Nonlinear Maxwell equations". arXiv:2403.00836 [physics.class-ph]
6. A. Nofech. «Biquaternionic Dirac Equation Predicts Zero Mass for Majorana Fermions». Symmetry, 2020, 12. 1144. 10.3390/sym12071144.
7. Л.А. Алексеева, «Бикватернионное представление уравнений Дирака и биспинорных полей.», Журнал проблем эволюции открытых систем, 25(1-2), 15–24. 2023
8. Л.А. Алексеева. «Дифференциальная алгебра бикватернионов. Преобразования Лоренца биволновых уравнений». Математический журнал, Алматы, Vol. 10, № 35, 2010, pp. 33 – 41.
9. F. Antonuccio, «Split-Quaternions and the Dirac Equation», arXiv:1405.0187 [physics.gen-ph]. 2014
10. W.R. Hamilton, "On the geometrical interpretation of some results obtained (by calculation with biquaternions)", Proc. Roy. Irish Acad., Vol. 5, pp. 388 – 390, 1853.
11. L. Silberstein. «Quaternionic Form of Relativity», Philos. Mag. S., 6, Vol. 23, №137, pp. 790–809, 1912.
12. С.В. Петухов. «Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость». М., изд-во Регулярная и хаотическая динамика, 2008.
13. I. Bialynicki-Birula, "Photon Wave Function", Progress in Optics, 36 (1996). p. 15.
14. L. Dickson. «Equivalence of the complex quaternion and matrix algebras». Linear Algebras, 1914, p. 13.
15. William O. Straub. "Weyl spinors and Dirac's electron equation". 2005.
16. Л. Б. Окунь. «Лептоны и кварки». М.: Наука. 1990.

Котковский Сергей Яковлевич
18 марта, 2025 г.
email: s_kotkovsky at mail.ru