

Note Sur N Le Deuxième Rayon de Courbure de l'Ellipsoïde de Révolution

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM* 

ABSTRACT. In this note, we study the intersection of the ellipsoid of revolution with a plane orthogonal to the tangent plane at a point on the ellipsoid to show that the second radius of curvature of the ellipsoid (denoted N as the great normal) coincides with the radius of curvature of the ellipse intersecting the plane and the ellipsoid at the point in question.

RÉSUMÉ: Dans cette note, on étudie l'intersection de l'ellipsoïde de révolution avec un plan orthogonal au plan tangent en un point de l'ellipsoïde pour montrer que le deuxième rayon de courbure de l'ellipsoïde (noté N la grande normale) se coïncide pas avec le rayon de courbure de l'ellipse intersection du plan et l'ellipsoïde au point en question.

Keywords: Ellipsoïde de révolution, ellipse, rayons de courbures, équation d'un plan.

*A la mémoire de mon collègue Salah Laaribi, décédé récemment
A ma petite fille Rayhane*

1. NOTATIONS ET CALCULS PRÉLIMINAIRES

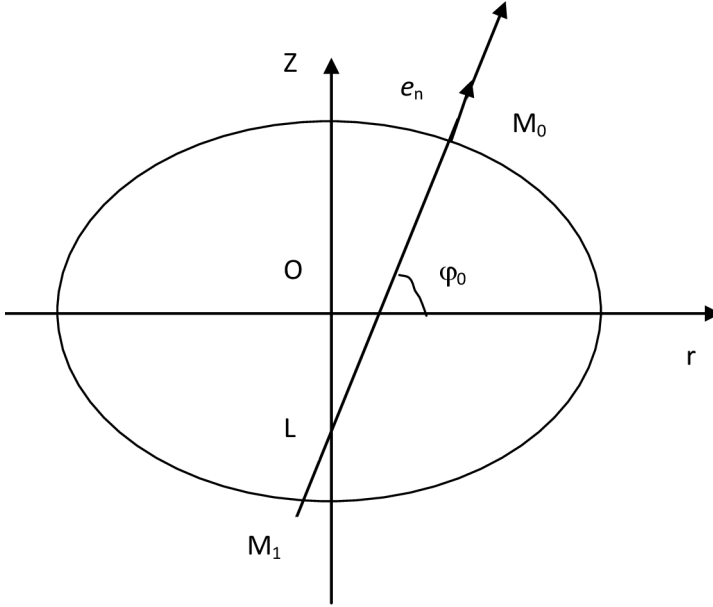
On va étudier l'intersection d'un ellipsoïde de révolution (E) et un plan perpendiculaire au plan tangent en un point M_0 de l'ellipsoïde le long du vecteur tangent. On commence par:

- déterminer les coordonnées du point opposé au point M_0 qui coupe l'ellipsoïde (E) qu'on note par M_1 . On appelle le milieu du segment M_0M_1 par O_1 .
- on procède à un changement de repère soit le passage du repère orthonormé (O, i, j, k) au repère orthonormé centré en O_1 . On définira les vecteurs de base de ce dernier.

1.1. Calcul Préliminaires.

1.1.1. *Calcul des coordonnées du point M_1 .* Dans le plan rOz (**Fig. 1**) avec r et k les vecteurs unitaires des axes Or et Oz , on peut écrire:

$$(1.1) \quad M_0 = \begin{cases} r_0 = N(\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ z_0 = N(\varphi_0)(1 - e^2)\sin\varphi_0 \end{cases}$$

FIGURE 1. Calcul des coordonnées du point M_1

avec respectivement $N = M_0 L = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}$ la grande normale, a le demi-grand

et $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ la première excentricité de l'ellipsoïde de révolution (E).

Dans le repère (O, i, j, k) les coordonnées de M_0 sont:

$$(1.2) \quad M_0 = \begin{cases} x_0 = N(\varphi_0) \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ y_0 = N(\varphi_0) \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ z_0 = N(\varphi_0) (1 - e^2) \sin \varphi_0 \end{cases}$$

On considère le repère orthonormé local en M_0 ($e_\lambda, e_\varphi, e_n$) défini dans la base orthonormée (i, j, k) où e_λ est tangent au parallèle passant par M_0 et dirigé vers l'Est, e_φ tangent à la méridienne, dirigé vers le nord et e_n porté par la normale à l'ellipsoïde (E) dirigé vers le zénith.

Les composantes des vecteurs de la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ dans le repère (O, i, j, k) sont comme suit:

$$(1.3) \quad e_\lambda = \begin{vmatrix} -\sin \lambda_0 \\ \cos \lambda_0 \\ 0 \end{vmatrix} ; e_\varphi = \begin{vmatrix} -\sin \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ -\sin \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ \cos \varphi_0 \end{vmatrix} ; e_n = \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ \sin \varphi_0 \end{vmatrix}$$

Les équations paramétriques de la droite passant par M_0 et normale à l'ellipsoïde sont:

$$(1.4) \quad M_0M = OM_0 + t.e_n = \begin{cases} x = x_0 + t.\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ y = y_0 + t.\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ z = z_0 + t.\sin\varphi_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Le point M_0 appartient à l'ellipsoïde, ses coordonnées vérifient l'équation de l'ellipsoïde de révolution:

$$(1.5) \quad \frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{b^2} = 1$$

Pour $t = 0$, on retrouve le point M_0 . Pour déterminer les coordonnées de M_1 , on remplace les équations (1.4) dans l'équation (1.5) ce qui donne:

$$(1.6) \quad \frac{(x_0 + t.\cos\varphi_0\cos\lambda_0)^2 + (y_0 + t.\cos\varphi_0\sin\lambda_0)^2}{a^2} + \frac{(z_0 + t.\sin\varphi_0)^2}{b^2} = 1 \implies$$

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{b^2} + t^2 \cdot \left(\frac{\cos^2\varphi_0\cos^2\lambda_0 + \cos^2\varphi_0\sin^2\lambda_0}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi_0}{b^2} \right) +$$

$$+ 2t \left(\frac{x_0\cos\varphi_0\cos\lambda_0 + y_0\cos\varphi_0\sin\lambda_0}{a^2} + \frac{z_0\sin\varphi_0}{b^2} \right) = 1$$

Utilisant les équations (1.2) et (1.5), on obtient après des simplifications l'équation:

$$(1.7) \quad t \left[t \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi_0}{b^2} \right) + 2N_0 \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{a^2} + \frac{(1-e^2)\sin^2\varphi_0}{b^2} \right) \right] = 0$$

Il s'ensuit:

$$t = 0, \quad \text{on trouve les coordonnées du point } M_0,$$

$$t \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi_0}{b^2} \right) + 2N_0 \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{a^2} + \frac{(1-e^2)\sin^2\varphi_0}{b^2} \right) = 0$$

On utilise la formule $\frac{1}{a^2} = \frac{1-e^2}{b^2}$, et $e'^2 = e^2/(1-e^2)$ le carré de la deuxième excentricité de (E) , la dernière équation devient:

$$(1.8) \quad t(1-e^2)(1+e'^2\sin^2\varphi_0) + 2N_0(1-e^2) = 0 \implies t = -\frac{2N_0}{1+e'^2\sin^2\varphi_0}$$

Pour faciliter les calculs, on pose:

$$(1.9) \quad \alpha = \frac{1}{1+e'^2\sin^2\varphi_0}, \quad 1-\alpha = \frac{e'^2\sin^2\varphi_0}{1+e'^2\sin^2\varphi_0} \implies t = -2N_0.\alpha$$

Utilisant l'équation (1.4), les coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point M_1 sont:

$$(1.10) \quad M_1 = \begin{cases} x_1 = x_0 + t.\cos\varphi_0\cos\lambda_0 = x_0 - 2x_0\alpha = x_0(1-2\alpha) \\ y_1 = y_0 + t.\cos\varphi_0\sin\lambda_0 = y_0 - 2y_0\alpha = y_0(1-2\alpha) \\ z_1 = z_0 + t.\sin\varphi_0 = z_0 - 2z_0\frac{\alpha}{1-e^2} = z_0 \left(1 - \frac{2\alpha}{1-e^2} \right) \end{cases}$$

1.1.2. Calculons la distance $d = M_0M_1$. :

$$d^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 = 4N_0^2 \cdot \alpha^2 = \frac{4 \cdot N_0^2}{(1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0)^2} \Rightarrow$$

$$d = \frac{2N_0}{1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0}$$

1.1.3. Calcul des coordonnées du point O_1 . Les coordonnées du point O_1 milieu du segment M_0M_1 sont:

$$(1.11) \quad O_1 \begin{cases} x(O_1) = \frac{x_0 + x_1}{2} = x_0 \cdot (1 - \alpha) \\ y(O_1) = \frac{y_0 + y_1}{2} = y_0 \cdot (1 - \alpha) \\ z(O_1) = \frac{z_0 + z_1}{2} = z_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{1 - e^2}\right) \end{cases}$$

2. DÉTERMINATION DE L'ÉQUATION DE L'ELLIPSE

Pour trouver les équations de l'ellipse intersection de l'ellipsoïde et du plan normal au point M_0 le long de la tangente au parallèle $\varphi = \varphi_0$ qu'on note par (P) , on considère le repère orthonormé plan (O_1, e_λ, e_n) . Un point $M(x, y, z)$ de l'ellipse est défini comme suit:

$$(2.12) \quad OM = OO_1 + X \cdot e_\lambda + Y \cdot e_n \Rightarrow \text{les relations liant } (x, y, z) \text{ à } X, Y \Rightarrow$$

$$(2.13) \quad x = x(O_1) - X \sin \lambda_0 + Y \cos \varphi_0 \cos \lambda_0$$

$$(2.14) \quad y = y(O_1) + X \cos \lambda_0 + Y \cos \varphi_0 \sin \lambda_0$$

$$(2.14) \quad z = z(O_1) + Y \sin \varphi_0$$

avec (X, Y) les coordonnées de M dans le repère (O_1, e_λ, e_n) situé dans le plan (P) .

2.1. **Equation du plan (P) .** Le plan (P) est orthogonal au vecteur unitaire e_φ :

$e_\varphi = (-\sin \varphi_0 \cos \lambda_0, -\sin \varphi_0 \sin \lambda_0, \cos \varphi_0)^T$, le plan passe par le point M_0 , d'où l'équation du plan (P) :

$$(2.15) \quad -\sin \varphi_0 \cos \lambda_0 (x - x_0) - \sin \varphi_0 \sin \lambda_0 (y - y_0) + \cos \varphi_0 (z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$z = z_0 + \tan \varphi_0 \cos \lambda_0 (x - x_0) + \tan \varphi_0 \sin \lambda_0 (y - y_0)$$

2.2. **Détermination de l'équation de l'ellipse.** Un point (x, y, z) appartient à l'ellipsoïde (E) , alors ses coordonnées vérifient:

$$(2.16) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

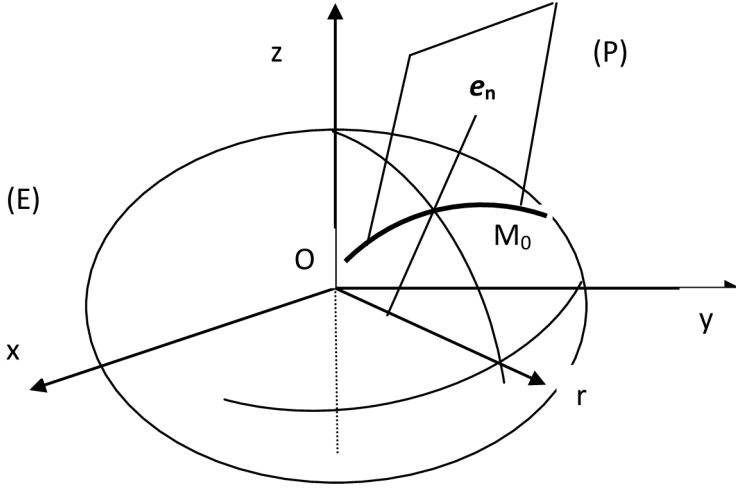


FIGURE 2. Intersection du plan(P) et l'ellipsoïde (E)

On remplace les équations (2.12-2.13-2.14) dans l'équation ci-dessus, on obtient l'équation:

$$\begin{aligned}
 & (x(O_1) - X \sin \lambda_0 + Y \cos \varphi_0 \cos \lambda_0)^2 + (y(O_1) + X \cos \lambda_0 + Y \cos \varphi_0 \sin \lambda_0)^2 + \\
 & \quad \frac{1}{1 - e^2} (z(O_1) + Y \sin \varphi_0)^2 = a^2 \implies \\
 & x^2(O_1) + X^2 \sin^2 \lambda_0 + Y^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \lambda_0 - 2x(O_1)X \sin \lambda_0 + 2x(O_1)Y \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 - XY \cos \varphi_0 \sin 2\lambda_0 \\
 & + y^2(O_1) + X^2 \cos^2 \lambda_0 + Y^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \lambda_0 + 2y(O_1)X \cos \lambda_0 + 2y(O_1)Y \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 + XY \cos \varphi_0 \sin 2\lambda_0 \\
 & + \frac{1}{1 - e^2} (z^2(O_1) + Y^2 \sin^2 \varphi_0 + 2z(O_1)Y \sin \varphi_0)^2 = a^2
 \end{aligned}$$

Après des simplifications, l'équation devient:

$$\begin{aligned}
 & x^2(O_1) + y^2(O_1) + X^2 + Y^2 \cos^2 \varphi_0 - 2X(x(O_1) \sin \lambda_0 - y(O_1)Y \cos \lambda_0) \\
 & \quad + 2Y \cos \varphi_0 (x(O_1) \cos \lambda_0 + y(O_1) \sin \lambda_0) \\
 & + \frac{1}{1 - e^2} (N_0^2 \sin^2 \varphi_0 (1 - e^2 - \alpha)^2 + Y^2 \sin^2 \varphi_0 + 2N_0 Y (1 - e^2 - \alpha) \sin^2 \varphi_0) = a^2
 \end{aligned}$$

Mais $x^2(O_1) + y^2(O_1) = (1 - \alpha)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0$ et $x(O_1) \sin \lambda_0 - y(O_1)Y \cos \lambda_0 = 0$ et $x(O_1) \cos \lambda_0 + y(O_1) \sin \lambda_0 = (1 - \alpha) N_0 \cos \varphi_0$, par suite l'équation devient:

$$\begin{aligned}
 & X^2 + Y^2 \left(\cos^2 \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{1 - e^2} \right) + 2Y N_0 \left((1 - \alpha) \cos^2 \varphi_0 + \frac{(1 - e^2 - \alpha) \sin^2 \varphi_0}{1 - e^2} \right) = \\
 & \quad a^2 - (1 - \alpha)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0 - N_0^2 \sin^2 \varphi_0 \frac{(1 - e^2 - \alpha)^2}{1 - e^2}
 \end{aligned}$$

(2.17)

Or $\cos^2 \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{1 - e^2} = 1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0$, $(1 - \alpha) \cos^2 \varphi_0 + \frac{(1 - e^2 - \alpha) \sin^2 \varphi_0}{1 - e^2} = 0$ et :

$$(1 - \alpha)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0 + N_0^2 \sin^2 \varphi_0 \frac{(1 - e^2 - \alpha)^2}{1 - e^2} = N_0^2 \frac{e'^4 (1 - e^2) \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0}{1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0}$$

Finalement on obtient l'équation de l'ellipse intersection du plan (P) et l'ellipsoïde (E) voir (Fig. 3), comme suit:

$$X^2 + Y^2 (1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0) = \frac{a^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)(1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0)}$$

ou encore:

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1$$

avec:

$$a'^2 = \frac{a^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)(1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0)},$$

$$b'^2 = \frac{a^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)(1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0)^2},$$

3. CALCUL DU RAYON DE COURBURE DE L'ELLIPSE AU POINT M_0

La première excentricité de cet ellipse est $\bar{e}$ telle que:

$$\bar{e}^2 = 1 - \frac{b'^2}{a'^2} = 1 - \frac{1}{1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0} \Rightarrow 1 - \bar{e}^2 = \frac{1}{1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0}$$

Calculons le rayon de courbure ρ_1 de l'ellipse au point M_0 , il est donné par :

$$\rho_1 = \frac{a'(1 - \bar{e}^2)}{(1 - \bar{e}^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Au point M_0 , la latitude géodésique $\varphi = \pi/2$, la valeur de ρ_1 devient:

$$\rho_1 = \frac{a'(1 - \bar{e}^2)}{(1 - \bar{e}^2) \sqrt{1 - \bar{e}^2}} = \frac{a'}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0}} \cdot \frac{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi_0}}{1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} = N = \rho_1 \quad (\text{dit la grande normale})}$$

On a donc achevé la démonstration que le deuxième rayon de courbure N en un point d'un ellipsoïde de révolution est le rayon de courbure de l'ellipse de la section normale au plan tangent au point en question.

REFERENCES

- [1] Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés*, chapitre 5. Géométrie de l'ellipse et de l'ellipsoïde, pp 53-78. Edité par NOOR Publishing, 340 pages, ISBN 978-3-330-96843-1, Imprimé en Allemagne.

A. BEN HADJ SALEM

RÉSIDENCE BOUSTEN 8, AV. MOSQUÉE RAOUDHA,

1181 SOUKRA RAOUDHA, SOUKRA, TUNISIA

Email address: abenhadjsale@gmail.com

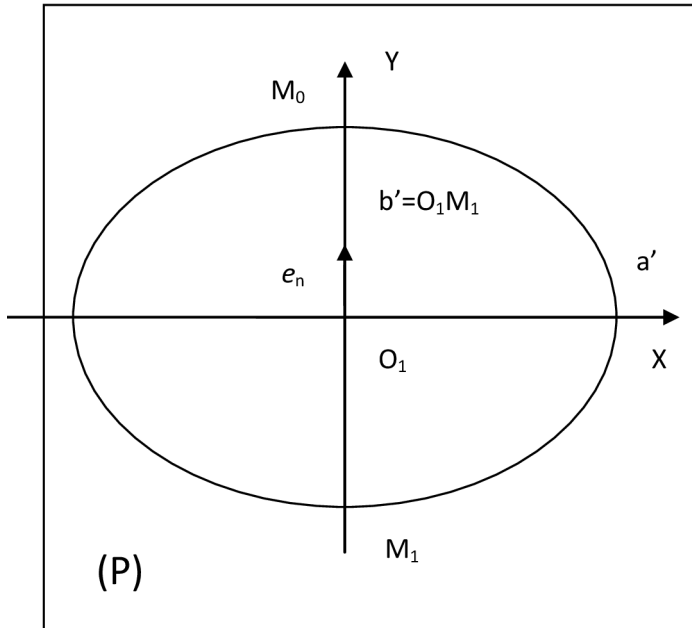


FIGURE 3. Ellipse de la section normale