

Les produits de Lie déformés involutifs dans les espaces de dimension quatre

Sous-titre : Premiers liens avec la représentation des champs
électromagnétiques

©Thierry PERIAT

16 juillet 2025

Nota bene : this document is the french version of the reference : "Deformed Lie Products and Involution - Second part : in a Four-dimensional Space ; viXra :2507.0062, 40 pages". The progression follows a similar way of thinking. But it goes a step further because it can clearly connect a family of deformed Lie products with specific representations of the electromagnetic fields. The conditions precisising the existence of an involution are also better explained.

Ce document explore, dans un espace mathématique de dimension quatre, les notions d'invariance et d'involution lorsque celles-ci s'appliquent à l'action d'un produit de Lie déformé. Il rappelle l'existence de la décomposition sans résidu la plus simple rencontrée au cours des explorations précédentes [a]. Mais il démontre aussi l'existence d'une autre décomposition sans résidu en se servant de la multiplicité des représentations du produit de Lie déformé. Il définit les conditions assurant l'égalité des deux décompositions. Aucune des deux matrices ne peut assurer l'invariance et que seule la décomposition la plus simple permet d'envisager une action de type involutive. Enfin, il établit clairement les relations faisant de la décomposition la plus simple une représentation effective d'un champ électromagnétique ; © Thierry PERIAT : Les produits de Lie déformés involutifs dans les espaces de dimension quatre.

Table des matières

1	Contexte	2
2	L'action des produits de Lie déformés sur les éléments de V_4	3
2.1	L'action d'un produit extérieur sur un élément de V_4	3
2.2	L'action d'un produit de Lie déformé sur un élément de V_4 - représentation via $M(4, \mathbb{C})$	4
2.3	L'action d'un produit de Lie déformé sur un élément de V_4 - représentation via $M(4 \times 6, \mathbb{C})$	7

2.4	Spécificités des cubes antisymétriques et anti-réduits	8
2.5	Description de l'action répétée d'un produit de Lie déformé par un cube antisymétrique donné	13
3	Quelques rappels succincts sur les représentations des champs électromagnétiques	21
3.1	La représentation vectorielle	21
3.2	La représentation via les formes bilinéaires covariantes	22
3.3	Les représentations tensorielles et matricielles	22
3.4	Les spécificités des représentations induites par l'action de pro- duits de Lie déformés	22
4	La décomposition la plus simple lorsque le cube déformant est équivalent à un vecteur	23
4.1	Caractéristiques premières	23
4.2	Analyse	24
4.3	Le chemin menant à la réalité	26
5	La décomposition la plus simple et sans résidu d'une action répétée	29
5.1	Caractéristiques premières	29
6	Conclusion	30
7	Bibliographie	31
7.1	Mes contributions	31
7.2	Oeuvres internationales	31

1 Contexte

La discussion exposée dans ce document concerne des vecteurs d'un espace de dimension quatre dont les composantes sont des nombres complexes ; il est noté : $V_4 = \{\mathbb{C} \otimes E(4, \mathbb{R}), A \in \boxminus^-(\mathbb{C})\}$, écriture dans laquelle apparaît un cube déformant antisymétrique A . Pour rappel, il existe un isomorphisme canonique entre V_4 et son dual V_4^* , lui-même équivalent à $\mathbb{C}^4$, à $M(4 \times 1, \mathbb{C})$ et à $M(1 \times 4, \mathbb{C})$. L'antisymétrie du cube A signifie que tous ses noeuds vérifient la relation :

$$\forall \alpha, \beta, \chi \in Ind_4 = \{0, 1, 2, 3\} : A_{\alpha\beta}^\chi + A_{\beta\alpha}^\chi = 0$$

En particulier, la répétition d'un indice bas signe la nullité du noeud.

2 L'action des produits de Lie déformés sur les éléments de V_4

2.1 L'action d'un produit extérieur sur un élément de V_4

Remarque 2.1. *Représentations matricielles du produit extérieur de deux vecteurs de V_4 .*

Tout produit extérieur combinant deux éléments $\mathbf{a}$ et $\mathbf{x}_0$ choisis arbitrairement dans V_4 est un élément de l'algèbre extérieure $V^\wedge_4$. Cette algèbre est un espace vectoriel de dimension six représentable de façon équivalente dans $\mathbb{C}^6$, $M(6 \times 1, \mathbb{C})$ et $M(1 \times 6, \mathbb{C})$.

L'action de la fonction $\mathbf{a} \wedge \dots$ sur n'importe quel élément $\mathbf{x}_0$ de V_4 se laisse représenter sous une forme *matricielle* dans $M(6 \times 4, \mathbb{C})$ et $M(4 \times 6, \mathbb{C})$ de la manière qui suit :

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{x}_0 | \\ &= \\ & \left\langle \begin{pmatrix} a^2 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^2 & a^3 \cdot x_0^1 - a^1 \cdot x_0^3 & a^1 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^1 & a^0 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^0 & -(a^0 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^0) & a^0 \cdot x_0^1 - a^1 \cdot x_0^0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \\ & \left\langle \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a^3 & a^2 & -a^1 \\ 0 & a^3 & -a^2 & 0 & 0 & a^0 \\ -a^3 & 0 & a^1 & 0 & -a^0 & 0 \\ a^2 & -a^1 & 0 & a^0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| \end{aligned}$$

Définition 2.1. *Dilatation d'un élément de V_4 .*

La dilatation d'un élément de V_4 est la fonction projetant cet élément dans $M(4 \times 6, \mathbb{C})$:

$$\forall \mathbf{a} \in V_4 \xrightarrow{[\odot]} [\odot(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a^3 & a^2 & -a^1 \\ 0 & a^3 & -a^2 & 0 & 0 & a^0 \\ -a^3 & 0 & a^1 & 0 & -a^0 & 0 \\ a^2 & -a^1 & 0 & a^0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M(4 \times 6, \mathbb{C})$$

... de telle sorte qu'il soit possible d'écrire :

$$\langle {}^{(4)}\mathbf{a} \wedge {}^{(4)}\mathbf{x}_0 | = \underbrace{\langle \mathbf{x}_0 |}_{\in M(1 \times 4, \mathbb{C})} \cdot \underbrace{[\odot({}^{(4)}\mathbf{a})]}_{\in M(4 \times 6, \mathbb{C})}$$

La dilatation est un isomorphisme.

Il est évident que l'action de $\mathbf{a} \wedge \dots$ sur $\mathbf{x}_0$ se laisse tout aussi bien représenter par :

$$\begin{aligned} & |{}^{(4)}\mathbf{a} \wedge {}^{(4)}\mathbf{x}_0 \rangle \in M(6 \times 1, \mathbb{C}) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l} (a^2 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^2) \\ (a^3 \cdot x_0^1 - a^1 \cdot x_0^3) \\ (a^1 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^1) \\ (a^0 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^0) \\ -(a^0 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^0) \\ (a^0 \cdot x_0^1 - a^1 \cdot x_0^0) \end{array} \right\rangle \\
 &= \\
 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -a^3 & a^2 \\ 0 & a^3 & 0 & -a^1 \\ 0 & -a^2 & a^1 & 0 \\ -a^3 & 0 & 0 & a^0 \\ a^2 & 0 & -a^0 & 0 \\ -a^1 & a^0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left| \begin{array}{l} x_0^0 \\ x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{array} \right\rangle \\
 &= \\
 & [\odot({}^{(4)}\mathbf{a})]^t \cdot |{}^{(4)}\mathbf{x}_0\rangle
 \end{aligned}$$

Remarque 2.2. Recherche de similitudes entre les démarches concernant les espaces de dimension trois et quatre.

Peut-être sera-t-il plus tard utile d'avoir remarqué ici que la matrice $[\odot({}^{(4)}\mathbf{a})]^t$ joue, dans un espace de dimension quatre, un rôle similaire (mais non-équivalent) à la matrice $[_J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{a})$ représentant une rotation d'axe ${}^{(3)}\mathbf{a}$ dans un espace de dimension trois.

$$[\odot({}^{(4)}\mathbf{a})]^t = \left[\begin{array}{c|c} |\mathbf{0}\rangle & [_J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{a}) \\ \hline \begin{bmatrix} -a^3 \\ a^2 \\ -a^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^0 \\ 0 & -a^0 & 0 \\ a^0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

2.2 L'action d'un produit de Lie déformé sur un élément de V_4 - représentation via $M(4, \mathbb{C})$

Définition 2.2. La fonction $f(A, {}^{(4)}\mathbf{a})$.

Soit ${}^{(4)}\mathbf{a}$ un élément choisi dans V_4 ; la fonction $[{}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\dots]_A$ est un endomorphisme de $\text{End}(V_4)$ noté:

$$\forall {}^{(4)}\mathbf{x}_0 \in V_4 \xrightarrow{[\mathbf{a}, \dots]_A} {}^{(4)}\mathbf{x}_1 = [{}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{x}_0]_A \in V_4$$

... défini comme étant la moitié d'un produit tensoriel alterné bâti sur un cube anti-symétrique. Concrètement ceci signifie que :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x}_1 \\
 &= \\
 & [\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_A \\
 &=
 \end{aligned}$$

2.2 L'action d'un produit de Lie déformé sur un élément de V_4 -
représentation via $M(4, \mathbb{C})$

$$\frac{1}{2} \cdot \{\otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) - \otimes_A(\mathbf{x}_0, \mathbf{a})\}$$

Avec :

$$A \in \boxplus^-(4, \mathbb{C}), \forall \chi \in Ind_4 :$$

Dans le détail, chaque composante se définit donc par :

$$\forall \alpha, \beta, \chi \in Ind_4 = \{0, 1, 2, 3\} :$$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot x_1^\chi \\ &= \\ & A_{01}^\chi \cdot (a^0 \cdot x_0^1 - a^1 \cdot x_0^0) + A_{02}^\chi \cdot (a^0 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^0) + A_{03}^\chi \cdot (a^0 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^0) \\ &+ A_{10}^\chi \cdot (a^1 \cdot x_0^0 - a^0 \cdot x_0^1) + A_{12}^\chi \cdot (a^1 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^1) + A_{13}^\chi \cdot (a^1 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^1) \\ &+ A_{20}^\chi \cdot (a^2 \cdot x_0^0 - a^0 \cdot x_0^2) + A_{21}^\chi \cdot (a^2 \cdot x_0^1 - a^1 \cdot x_0^2) + A_{23}^\chi \cdot (a^2 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^2) \\ &+ A_{30}^\chi \cdot (a^3 \cdot x_0^0 - a^0 \cdot x_0^3) + A_{31}^\chi \cdot (a^3 \cdot x_0^1 - a^1 \cdot x_0^3) + A_{32}^\chi \cdot (a^3 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^3) \end{aligned}$$

Mais l'antisymétrie du cube A permet de condenser chacune de des sommes en :

$$\begin{aligned} & x_1^\chi \\ &= \\ & A_{01}^\chi \cdot (a^0 \cdot x_0^1 - a^1 \cdot x_0^0) + A_{02}^\chi \cdot (a^0 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^0) + A_{03}^\chi \cdot (a^0 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^0) \\ &+ A_{12}^\chi \cdot (a^1 \cdot x_0^2 - a^2 \cdot x_0^1) + A_{13}^\chi \cdot (a^1 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^1) + A_{23}^\chi \cdot (a^2 \cdot x_0^3 - a^3 \cdot x_0^2) \\ &= \\ & x_1^\chi = \sum_{\alpha < \beta} A_{\alpha\beta}^\chi \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \end{aligned}$$

Remarque 2.3. Représentation de l'action d'un produit de Lie déformé sur un élément de V_4 - représentation via $M(4, \mathbb{C})$.

Chacune des quatre composantes se laissent factoriser comme suit :

$$\begin{aligned} & x_1^\chi \\ &= \\ & (-A_{01}^\chi \cdot a^1 - A_{02}^\chi \cdot a^2 - A_{03}^\chi \cdot a^3) \cdot x_0^0 \\ &+ (A_{01}^\chi \cdot a^0 - A_{12}^\chi \cdot a^2 - A_{13}^\chi \cdot a^3) \cdot x_0^1 \\ &+ (A_{02}^\chi \cdot a^0 - A_{12}^\chi \cdot a^1 - A_{23}^\chi \cdot a^3) \cdot x_0^2 \\ &+ (A_{03}^\chi \cdot a^0 + A_{13}^\chi \cdot a^1 + A_{23}^\chi \cdot a^2) \cdot x_0^3 \end{aligned}$$

De sorte qu'il devient a priori possible de regrouper ces composantes au sein d'une écriture de type matricio-vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{bmatrix}$$

2 L'ACTION DES PRODUITS DE LIE DÉFORMÉS SUR LES ÉLÉMENTS DE V_4

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\left[\begin{array}{cccc} \underbrace{(-A_{01}^0 \cdot a^1 - A_{02}^0 \cdot a^2 - A_{03}^0 \cdot a^3)}_{a^0 \text{ est absent}} & \underbrace{(A_{01}^0 \cdot a^0 - A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3)}_{a^1 \text{ est absent}} & \underbrace{(A_{02}^0 \cdot a^0 - A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3)}_{a^2 \text{ est absent}} & \underbrace{(A_{03}^0 \cdot a^0 + A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2)}_{a^3 \text{ est absent}} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_0^0 \\ x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix} \\
 &= {}^1 \\
 &[\sum_{\beta} A_{\beta \text{ row}}^{\text{line}} \cdot a^{\beta}] \cdot |\mathbf{x}_0 >
 \end{aligned}$$

Définition 2.3. La fonction ${}_A\Phi$ pour un cube A donné.

Il s'agit d'une application de V_4 vers $M(4, \mathbb{C})$

$$A \in \boxplus(4, \mathbb{R}), \forall \mathbf{a} \in V_4 \xrightarrow{{}_A\Phi} {}_A\Phi(\mathbf{a}) \in M(4, \mathbb{C})$$

... telle que :

$$\begin{aligned}
 &{}_A\Phi(\mathbf{a}) \\
 &= \\
 &\beta=3 \\
 &[\sum_{\beta=0}^{\beta=3} A_{\beta \text{ row}}^{\text{line}} \cdot a^{\beta}] \\
 &= \\
 &\left[\begin{array}{cccc} A_{00}^0 \cdot a^0 + A_{10}^0 \cdot a^1 + A_{20}^0 \cdot a^2 + A_{30}^0 \cdot a^3 & A_{01}^0 \cdot a^0 + A_{11}^0 \cdot a^1 + A_{21}^0 \cdot a^2 + A_{31}^0 \cdot a^3 & . & . \\ A_{00}^1 \cdot a^0 + A_{10}^1 \cdot a^1 + A_{20}^1 \cdot a^2 + A_{30}^1 \cdot a^3 & A_{01}^1 \cdot a^0 + A_{11}^1 \cdot a^1 + A_{21}^1 \cdot a^2 + A_{31}^1 \cdot a^3 & . & . \\ A_{00}^2 \cdot a^0 + A_{10}^2 \cdot a^1 + A_{20}^2 \cdot a^2 + A_{30}^2 \cdot a^3 & A_{01}^2 \cdot a^0 + A_{11}^2 \cdot a^1 + A_{21}^2 \cdot a^2 + A_{31}^2 \cdot a^3 & . & . \\ A_{00}^3 \cdot a^0 + A_{10}^3 \cdot a^1 + A_{20}^3 \cdot a^2 + A_{30}^3 \cdot a^3 & A_{01}^3 \cdot a^0 + A_{11}^3 \cdot a^1 + A_{21}^3 \cdot a^2 + A_{31}^3 \cdot a^3 & . & . \end{array} \right] \\
 &\left[\begin{array}{cccc} . & A_{02}^0 \cdot a^0 + A_{12}^0 \cdot a^1 + A_{22}^0 \cdot a^2 + A_{32}^0 \cdot a^3 & A_{03}^0 \cdot a^0 + A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2 + A_{33}^0 \cdot a^3 & . \\ . & A_{02}^1 \cdot a^0 + A_{12}^1 \cdot a^1 + A_{22}^1 \cdot a^2 + A_{32}^1 \cdot a^3 & A_{03}^1 \cdot a^0 + A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2 + A_{33}^1 \cdot a^3 & . \\ . & A_{02}^2 \cdot a^0 + A_{12}^2 \cdot a^1 + A_{22}^2 \cdot a^2 + A_{32}^2 \cdot a^3 & A_{03}^2 \cdot a^0 + A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2 + A_{33}^2 \cdot a^3 & . \\ . & A_{02}^3 \cdot a^0 + A_{12}^3 \cdot a^1 + A_{22}^3 \cdot a^2 + A_{32}^3 \cdot a^3 & A_{03}^3 \cdot a^0 + A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2 + A_{33}^3 \cdot a^3 & . \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Exemple 2.1. Quand le cube A est antisymétrique.

Dans ce cas:

$$A \in \boxminus(4, \mathbb{R}) \equiv [A] \in M(4 \times 6, \mathbb{C})$$

$$[A] \in M(4 \times 6, \mathbb{C}), \forall \mathbf{a} \in V_4 \xrightarrow{[A]\Phi} [A]\Phi(\mathbf{a}) \in M(4, \mathbb{C})$$

With:

$$\begin{aligned}
 &[A]\Phi(\mathbf{a}) \\
 &= \\
 &\left[\begin{array}{cccc} -A_{01}^0 \cdot a^1 - A_{02}^0 \cdot a^2 - A_{03}^0 \cdot a^3 & A_{01}^0 \cdot a^0 - A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3 & A_{02}^0 \cdot a^0 + A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3 & A_{03}^0 \cdot a^0 + A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2 \\ -A_{01}^1 \cdot a^1 - A_{02}^1 \cdot a^2 - A_{03}^1 \cdot a^3 & A_{01}^1 \cdot a^0 - A_{12}^1 \cdot a^2 - A_{13}^1 \cdot a^3 & A_{02}^1 \cdot a^0 + A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{23}^1 \cdot a^3 & A_{03}^1 \cdot a^0 + A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2 \\ -A_{01}^2 \cdot a^1 - A_{02}^2 \cdot a^2 - A_{03}^2 \cdot a^3 & A_{01}^2 \cdot a^0 - A_{12}^2 \cdot a^2 - A_{13}^2 \cdot a^3 & A_{02}^2 \cdot a^0 + A_{12}^2 \cdot a^1 - A_{23}^2 \cdot a^3 & A_{03}^2 \cdot a^0 + A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2 \\ -A_{01}^3 \cdot a^1 - A_{02}^3 \cdot a^2 - A_{03}^3 \cdot a^3 & A_{01}^3 \cdot a^0 - A_{12}^3 \cdot a^2 - A_{13}^3 \cdot a^3 & A_{02}^3 \cdot a^0 + A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3 & A_{03}^3 \cdot a^0 + A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2 \end{array} \right] \\
 &\in M(4, \mathbb{C})
 \end{aligned}$$

On retrouve la matrice apparue pour décrire l'action d'un produit de Lie déformé par un cube A antisymétrique.

1. A cause de l'antisymétrie du cube A

2.3 L'action d'un produit de Lie déformé sur un élément de V_4 - représentation via $M(4 \times 6, \mathbb{C})$

En repartant de l'expression des composantes du produit de Lie déformé $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\mathbf{x}_0)_A]$ (définition 2.2) on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
 & |^{(4)}\mathbf{x}_1 \rangle \\
 & = \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} A_{01}^0 & A_{02}^0 & A_{03}^0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 & A_{23}^0 \\ A_{01}^1 & A_{02}^1 & A_{03}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & A_{23}^1 \\ A_{01}^2 & A_{02}^2 & A_{03}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & A_{23}^2 \\ A_{01}^3 & A_{02}^3 & A_{03}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 & A_{23}^3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -a^3 & a^2 \\ 0 & a^3 & 0 & -a^1 \\ 0 & -a^2 & a^1 & 0 \\ -a^3 & 0 & 0 & a^0 \\ a^2 & 0 & -a^0 & 0 \\ -a^1 & a^0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & = \\
 & (4 \times 6)[A] \cdot (6 \times 1)|^{(4)}\mathbf{a} \wedge ^{(4)}\mathbf{x}_0 \rangle \\
 & = {}^2 \\
 & (4 \times 6)[A] \cdot (6 \times 4)|\odot (^{(4)}\mathbf{a})^t \cdot |^{(4)}\mathbf{x}_0 \rangle
 \end{aligned}$$

Il existe donc une matrice $[P]$ de $M(4, \mathbb{C})$ telle que :

$$|^{(4)}\mathbf{x}_1 \rangle = [P] \cdot |^{(4)}\mathbf{x}_0 \rangle$$

Et cette matrice représente elle aussi l'action de la fonction $f(A, ^{(4)}\mathbf{a})$ sur $\mathbf{x}_0$ lorsque le cube A est antisymétrique, donc réductible à une matrice $[A]$ de $M(4 \times 6, \mathbb{C})$.

Remarque 2.4. *Distinctions entre les deux représentations de l'action d'un produit de Lie déformé sur un élément de V_4 .*

Il convient de noter que :

$$\begin{aligned}
 & [P] \\
 & = \\
 & (4 \times 6)[A] \cdot (6 \times 4)[\odot(\mathbf{a})]^t \\
 & = \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} A_{01}^0 & A_{02}^0 & A_{03}^0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 & A_{23}^0 \\ A_{01}^1 & A_{02}^1 & A_{03}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & A_{23}^1 \\ A_{01}^2 & A_{02}^2 & A_{03}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & A_{23}^2 \\ A_{01}^3 & A_{02}^3 & A_{03}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 & A_{23}^3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -a^3 & a^2 \\ 0 & a^3 & 0 & -a^1 \\ 0 & -a^2 & a^1 & 0 \\ -a^3 & 0 & 0 & a^0 \\ a^2 & 0 & -a^0 & 0 \\ -a^1 & a^0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & =
 \end{aligned}$$

2. A cause des considérations exposées au niveau de la remarque 2.1.

2 L'ACTION DES PRODUITS DE LIE DÉFORMÉS SUR LES ÉLÉMENTS DE V_4

$$\left[\begin{array}{cccc} \underbrace{\begin{matrix} -A_{23}^0 \cdot a^1 + A_{13}^0 \cdot a^2 - A_{12}^0 \cdot a^3 \\ -A_{23}^1 \cdot a^1 + A_{13}^1 \cdot a^2 - A_{12}^1 \cdot a^3 \\ -A_{23}^2 \cdot a^1 + A_{13}^2 \cdot a^2 - A_{12}^2 \cdot a^3 \\ -A_{23}^3 \cdot a^1 + A_{13}^3 \cdot a^2 - A_{12}^3 \cdot a^3 \end{matrix}}_{a^0 \text{ est absent}} & \underbrace{\begin{matrix} A_{23}^0 \cdot a^0 - A_{03}^0 \cdot a^2 + A_{02}^0 \cdot a^3 \\ A_{23}^1 \cdot a^0 - A_{03}^1 \cdot a^2 + A_{02}^1 \cdot a^3 \\ A_{23}^2 \cdot a^0 - A_{03}^2 \cdot a^2 + A_{02}^2 \cdot a^3 \\ A_{23}^3 \cdot a^0 - A_{03}^3 \cdot a^2 + A_{02}^3 \cdot a^3 \end{matrix}}_{a^1 \text{ est absent}} & \underbrace{\begin{matrix} -A_{13}^0 \cdot a^0 + A_{03}^0 \cdot a^1 - A_{01}^0 \cdot a^3 \\ -A_{13}^1 \cdot a^0 + A_{03}^1 \cdot a^1 - A_{01}^1 \cdot a^3 \\ -A_{13}^2 \cdot a^0 + A_{03}^2 \cdot a^1 - A_{01}^2 \cdot a^3 \\ -A_{13}^3 \cdot a^0 + A_{03}^3 \cdot a^1 - A_{01}^3 \cdot a^3 \end{matrix}}_{a^2 \text{ est absent}} & \underbrace{\begin{matrix} A_{12}^0 \cdot a^0 - A_{02}^0 \cdot a^1 + A_{01}^0 \cdot a^2 \\ A_{12}^1 \cdot a^0 - A_{02}^1 \cdot a^1 + A_{01}^1 \cdot a^2 \\ A_{12}^2 \cdot a^0 - A_{02}^2 \cdot a^1 + A_{01}^2 \cdot a^2 \\ A_{12}^3 \cdot a^0 - A_{02}^3 \cdot a^1 + A_{01}^3 \cdot a^2 \end{matrix}}_{a^3 \text{ est absent}} \end{array} \right]$$

Par conséquent et en général :

$$[P] \neq {}_A\Phi^{(4)}(\mathbf{a}), A \in \boxminus^-(4, \mathbb{C})$$

Il existe cependant un ensemble de conditions simples permettant d'identifier ces deux décompositions sans résidu ; elles s'écrivent :

$$\forall \chi \in Ind_4 : A_{01}^\chi = A_{23}^\chi, A_{02}^\chi = -A_{13}^\chi, A_{03}^\chi = A_{12}^\chi$$

L'existence de deux représentations distinctes d'une décomposition sans résidu pour un produit de Lie déformé donné renvoie aux réflexions exposées dans [b]. Plus précisément, ces deux représentations sont obligatoirement liées par une contrainte simple sur le déterminant de leur différence :

$$|^{(4 \times 6)}[A] \cdot ^{(6 \times 4)}[\odot(\mathbf{a})]^t - {}_A\Phi^{(4)}(\mathbf{a})| = 0, A \in \boxminus^-(4, \mathbb{C})$$

2.4 Spécificités des cubes antisymétriques et anti-réduits

L'ensemble des cubes dont les noeuds vérifient les propriétés de l'antisymétrie et de l'anti-réduction n'est pas vide car ces conditions sont compatibles entre elles :

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in Ind_4 : \\ A \in \boxminus^-(4, \mathbb{C}) : A_{\alpha\beta}^\delta + A_{\beta\alpha}^\delta &= 0 \\ \boxplus^\downarrow(4, \mathbb{C}) : A_{\alpha\beta}^\delta + A_{\alpha\delta}^\beta &= 0 \\ \Downarrow \\ A_{\alpha\beta}^\chi &= -A_{\beta\alpha}^\chi = A_{\beta\chi}^\alpha = -A_{\chi\beta}^\alpha = A_{\chi\alpha}^\beta = -A_{\alpha\chi}^\beta = A_{\alpha\beta}^\chi = etc... \end{aligned}$$

Pour autant, le nombre de noeuds non-nuls est restreint. Ainsi, en décidant d'écrire par convention :

$$\begin{aligned} A^0 &= A_{12}^3 \\ A^1 &= A_{03}^2 \\ A^2 &= A_{13}^0 \\ A^3 &= A_{02}^1 \end{aligned}$$

... et en cas d'antisymétrie combinée à une anti-réduction :

$$\begin{aligned} A \in \boxminus(4, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\text{anti-symmetry}} [A] \in M(4 \times 6, \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{anti-reduction}} {}^{(4)}\mathbf{A} \in V_4 \\ A \rightarrow {}^{(4)}\mathbf{A} &\equiv (A_{23}^1, A_{23}^0, A_{13}^0, A_{02}^1) = (A^0, A^1, A^2, A^3) \in V_4^* \end{aligned}$$

Remarque 2.5. Action de la fonction $[\!^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\dots]_{\mathbf{A}}$ via un élément dans $M(4, \mathbb{C})$.

Ici :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}\Phi(\mathbf{a}) \\ &= \\ & \begin{bmatrix} 0 & -A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3 & A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3 & A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2 \\ -A_{02}^1 \cdot a^2 - A_{03}^1 \cdot a^3 & 0 & A_{02}^1 \cdot a^0 - A_{23}^1 \cdot a^3 & A_{03}^1 \cdot a^0 + A_{23}^1 \cdot a^2 \\ -A_{01}^2 \cdot a^1 - A_{03}^2 \cdot a^3 & A_{01}^2 \cdot a^0 - A_{13}^2 \cdot a^3 & 0 & A_{03}^2 \cdot a^0 + A_{13}^2 \cdot a^1 \\ -A_{01}^3 \cdot a^1 - A_{02}^3 \cdot a^2 & A_{01}^3 \cdot a^0 - A_{12}^3 \cdot a^2 & A_{02}^3 \cdot a^0 + A_{12}^3 \cdot a^1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \\ & \begin{bmatrix} 0 & -A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3 & A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3 & A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2 \\ A_{12}^0 \cdot a^2 + A_{13}^0 \cdot a^3 & 0 & -A_{12}^0 \cdot a^0 - A_{23}^1 \cdot a^3 & -A_{13}^0 \cdot a^0 + A_{23}^1 \cdot a^2 \\ -A_{12}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^3 & A_{12}^0 \cdot a^0 + A_{23}^1 \cdot a^3 & 0 & -A_{23}^0 \cdot a^0 - A_{13}^1 \cdot a^1 \\ -A_{13}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^2 & A_{13}^0 \cdot a^0 - A_{23}^1 \cdot a^2 & A_{23}^0 \cdot a^0 + A_{13}^1 \cdot a^1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice est antisymétrique et donc un élément de $M^-(4, \mathbb{C})$. Elle permet de définir six nombres complexes :

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= -A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3 \\ \Phi_{02} &= A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3 \\ \Phi_{03} &= A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2 \\ \Phi_{12} &= -A_{12}^0 \cdot a^0 - A_{23}^1 \cdot a^3 \\ \Phi_{13} &= -A_{13}^0 \cdot a^0 + A_{23}^1 \cdot a^2 \\ \Phi_{23} &= -A_{23}^0 \cdot a^0 - A_{13}^1 \cdot a^1 \end{aligned}$$

... qui s'écrivent aussi grâce à la convention d'écriture adoptée plus haut :

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= A^3 \cdot a^2 - A^2 \cdot a^3 \\ \Phi_{02} &= -A^3 \cdot a^1 + A^1 \cdot a^3 \\ \Phi_{03} &= A^2 \cdot a^1 - A^1 \cdot a^2 \\ \Phi_{12} &= A^3 \cdot a^0 - A^0 \cdot a^3 \\ \Phi_{13} &= -A^2 \cdot a^0 + A^0 \cdot a^2 \\ \Phi_{23} &= A^1 \cdot a^0 - A^0 \cdot a^1 \end{aligned}$$

Pour rappel :

$$|^{(4)}\mathbf{a} \wedge {}^{(4)}\mathbf{A}\rangle = \begin{bmatrix} a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2 \\ a^3 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^3 \\ a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1 \\ a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0 \\ -(a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \\ a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0 \end{bmatrix} \in M(6 \times 1, \mathbb{C})$$

Il devient alors évident que la décomposition sans résidu, $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$, est une des multiples représentations possibles du produit vectoriel classique $\mathbf{a} \wedge \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a} \wedge \mathbf{A}$$

Elle représente l'action de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ dans $M(4, \mathbb{C})$ de la manière la plus simple possible sans en être l'unique visage. La matrice $\mathbf{A}\Phi(^{(4)}\mathbf{a})$ est l'équivalent pour les discussions tenues dans un espace de dimension quatre de la matrice $\mathbf{A}\Phi(^{(3)}\mathbf{a})$ apparue au cours des discussions tenues dans un espace de dimension trois.

Remarque 2.6. Action de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ via un élément dans $M(4 \times 6, \mathbb{C})$.

Ici, la matrice déformante $^{(4 \times 6)}[A]$ représentant la déformation implicitement portée par le cube antisymétrique A devient :

$$^{(4 \times 6)}[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 & A_{23}^0 \\ 0 & A_{02}^1 & A_{03}^1 & 0 & 0 & A_{23}^1 \\ A_{01}^2 & 0 & A_{03}^2 & 0 & A_{13}^2 & 0 \\ A_{01}^3 & A_{02}^3 & 0 & A_{12}^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On constate alors que la convention d'écriture adoptée plus au permet de poursuivre avec :

$$^{(4 \times 6)}[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A^3 & A^2 & -A^1 \\ 0 & A^3 & -A^2 & 0 & 0 & A^0 \\ -A^3 & 0 & A^1 & 0 & -A^0 & 0 \\ A^2 & -A^1 & 0 & A^0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\odot(\mathbf{A})]$$

Ce qui fait de la matrice déformante une dilatation du vecteur :

$$^{(4)}\mathbf{A} : (A^0, A^1, A^2, A^3) \in V_4$$

L'action de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ via un élément dans $M(4 \times 6, \mathbb{C})$ prend alors le visage simplifié :

$$\begin{aligned} & [P] \\ & = \\ & ^{(4 \times 6)}[\odot(\mathbf{A})] \cdot ^{(6 \times 4)}[\odot(\mathbf{a})]^t \\ & = \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A^3 & A^2 & -A^1 \\ 0 & A^3 & -A^2 & 0 & 0 & A^0 \\ -A^3 & 0 & A^1 & 0 & -A^0 & 0 \\ A^2 & -A^1 & 0 & A^0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a^3 & a^2 \\ 0 & a^3 & 0 & -a^1 \\ 0 & -a^2 & a^1 & 0 \\ -a^3 & 0 & 0 & a^0 \\ a^2 & 0 & -a^0 & 0 \\ -a^1 & a^0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & = \\ & \begin{bmatrix} A^1 \cdot a^1 + A^2 \cdot a^2 + A^3 \cdot a^3 & -A^1 \cdot a^0 & -A^2 \cdot a^0 & -A^3 \cdot a^0 \\ -A^0 \cdot a^1 & A^0 \cdot a^0 + A^2 \cdot a^2 + A^3 \cdot a^3 & -A^2 \cdot a^1 & -A^3 \cdot a^1 \\ -A^0 \cdot a^2 & -A^1 \cdot a^2 & A^0 \cdot a^0 + A^1 \cdot a^1 + A^3 \cdot a^3 & -A^3 \cdot a^2 \\ -A^0 \cdot a^3 & -A^1 \cdot a^3 & -A^2 \cdot a^3 & A^0 \cdot a^0 + A^1 \cdot a^1 + A^2 \cdot a^2 \end{bmatrix} \\ & = \\ & <^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{a}>_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Remarque 2.7. *Distinctions entre les deux représentations de l'action d'un produit de Lie déformé sur un élément de V_4 lorsque la cube est antisymétrique et anti-réduit.*

Les situations étudiées dans cette sous-section constituent des cas particuliers de celles exposées au cours des remarques 2.3 et 2.4. Ainsi, dans le cas général, il convient d'écrire :

$${}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a}) \neq \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a})$$

En l'accompagnant de la contrainte obligatoire :

$$| \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a}) - {}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a}) | = 0$$

Deux informations faciles à glaner confirment les différences effectives entre ces deux représentations :

- Au cas exceptionnel où $\mathbf{a} = \mathbf{A}$, la matrice ${}_{\mathbf{A}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{A})$ s'annule systématiquement ; ce n'est pas le cas pour sa concurrente qui s'écrit alors :

$$\langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A})$$

Et est assujettie à vérifier :

$$| \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A}) | = 0_{\mathbb{C}}$$

- La matrice ${}_{\mathbf{A}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{a})$ est forcément antisymétrique ; ce n'est pas le cas de sa concurrente qui ne le devient que si :

$$\frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a}) + T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{A})\} = \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4$$

En conséquence de quoi, les deux représentations peuvent devenir identiques si (i) la concurrente de la matrice ${}_{\mathbf{A}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{a})$ est également antisymétrique et (ii) les deux relations suivantes sont cohérentes et compatibles entre elles sans que cette obligation de cohérence ne contraigne les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{A}$ à être égaux :

$$\exists z \in \mathbb{C} - \{0_{\mathbb{C}}\} : \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{A}) - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a})\} = z \cdot {}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a}) + T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{A})\} - \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 = {}^{(4)}[0_{\mathbb{C}}]$$

Dans le cas général, ces deux représentations diffèrent l'une de l'autre et il convient sans doute de remarquer l'analogie entre le formalisme de leur différence et celui des matrices que j'ai nommé *périennes* au cours des discussions concernant la dualité électromagnétique exprimée dans les espaces de dimension trois, [c ; §2, p.3].

Remarque 2.8. *Concernant la compatibilité de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ avec le concept d'invariance.*

Dans l'absolu, il se peut que l'action de la fonction de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ laisse invariant l'élément de V_4^* sur lequel elle agit. Qu'en est-il réellement ? L'antisymétrie de la matrice $\mathbf{A}\Phi(^{(4)}\mathbf{a})$ a pour conséquence d'interdire cette invariance. Sa concurrente pouvant a priori être totalement symétrique, il faut examiner cette éventualité de plus près. La symétrie exclusive exige d'imposer la nullité de la partie antisymétrique, c'est-à-dire de pouvoir valider la relation matricielle :

$$T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\mathbf{A}) = T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{a})$$

Ce n'est possible que si :

$$\exists z \in \mathbb{C} : \mathbf{a} = z \cdot \mathbf{A}$$

Au cas où la symétrie serait réalisée, l'invariance serait obtenue pour l'ensemble des cubes antisymétriques et anti-réduits tels que :

$$z \cdot \{ < ^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A}) \} = Id_4$$

Mais dans ce cas, la concurrente de la décomposition la plus simple (ici au demeurant nulle) vaut :

$$z \cdot \{ < ^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A}) \}$$

... en étant assujettie à vérifier :

$$| < ^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A}) | = 0_{\mathbb{C}}$$

Or si elle représente une situation d'invariance, il se trouve qu'on aurait :

$$< ^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A}) = \frac{1}{z} \cdot Id_4$$

... dont le déterminant vaut :

$$| < ^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{A}) | = \frac{1}{z^4} \neq 0_{\mathbb{C}}$$

Il n'est pas nul. Par conséquent, la concurrente de la matrice $\mathbf{A}\Phi(^{(4)}\mathbf{a})$ ne peut pas non plus laisser invariant l'élément de V_4^* sur lequel elle agit.

Lemme 2.1. *Sur l'invariance suite à l'action de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$.*

Quelle qu'en soit la représentation, l'action de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ sur un élément de V_4^* ne laisse jamais celui-ci invariant.

2.5 Description de l'action répétée d'un produit de Lie déformé par un cube antisymétrique donné

Qui dit involution dit répétition de l'action de la fonction $[(4)\mathbf{a}, (4)\dots]_A$, A étant antisymétrique, sur un élément donné $\mathbf{x}_0$ de V_4 .

Proposition 2.1. *La répétition de l'action de la fonction $[\mathbf{a}, \dots]_{[A]}$ est équivalente à l'action d'une fonction notée $[\mathbf{a}, \dots]_{B([A], \mathbf{a})}$, écriture dans laquelle B désigne a priori un cube qui dépend des caractéristiques $([A], \mathbf{a})$ de la fonction répétée.*

Démonstration. Il s'agit de calculer les composantes du produit de Lie déformé $[\mathbf{a}, \mathbf{x}_1]_{[A]}$:

$$\begin{aligned}
 & \forall \epsilon \in Ind_4 : \\
 & \{[\mathbf{a}, \mathbf{x}_1]_{(4 \times 6)[A]}\}^\epsilon \\
 & = \\
 & \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot (a^\chi \cdot x_1^\delta - a^\delta \cdot x_1^\chi) \\
 & = \\
 & \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot \{a^\chi \cdot \{\sum_{\alpha < \beta} A_{\alpha\beta}^\delta \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha)\} - a^\delta \cdot \{\sum_{\alpha < \beta} A_{\alpha\beta}^\chi \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha)\}\} \\
 & = \\
 & \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot \sum_{\alpha < \beta} \underbrace{\{(a^\chi \cdot A_{\alpha\beta}^\delta - a^\delta \cdot A_{\alpha\beta}^\chi)\}}_{= T_{\chi\delta\alpha\beta}} \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \\
 & = \\
 & \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot \sum_{\alpha < \beta} T_{\chi\delta\alpha\beta} \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha)
 \end{aligned}$$

Dans un espace de dimension quatre, les paires (α, β) telles que $\alpha < \beta$ sont les suivantes : $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ and $(2, 3)$. On peut évidemment les indiquer avec les éléments de l'ensemble Ind_6 :

$$\{\forall \alpha, \beta \in Ind_4 \mid \alpha < \beta\} \Rightarrow \{\exists \mu \in Ind_6 \mid \mu \equiv (\alpha, \beta)\}$$

Le calcul se poursuit donc avec :

$$\begin{aligned}
 & \{[\mathbf{a}, \mathbf{x}_1]_{(4 \times 6)[A]}\}^\epsilon \\
 & = \\
 & \sum_{\mu \in Ind_6} A_\mu^\epsilon \cdot \sum_{\alpha < \beta} T_{\mu\alpha\beta} \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \\
 & = \\
 & \sum_{\alpha < \beta} \sum_{\mu \in Ind_6} \underbrace{A_\mu^\epsilon \cdot T_{\mu\alpha\beta}}_{= B_{\alpha\beta}^\epsilon} \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \\
 & =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha < \beta} B_{\alpha\beta}^\epsilon \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \\ = \\ \{ [{}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{x}_0]_{B({}^{(4 \times 6)}[A], {}^{(4)}\mathbf{a})} \}^\epsilon \end{aligned}$$

Comme annoncé dans la proposition, la répétition de l'action de la fonction qu'on a sous la main est encore un produit de Lie mais il est cette fois-ci déformé par un cube B défini par :

$$B_{\alpha\beta}^\epsilon({}^{(4 \times 6)}[A], {}^{(4)}\mathbf{a}) = \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot (a^\chi \cdot A_{\alpha\beta}^\delta - a^\delta \cdot A_{\alpha\beta}^\chi)$$

L'antisymétrie du cube déformant A se répercute sur ce cube B (preuve évidente). Il résulte des considérations exposées plus haut dans ce document que le cube B est aussi un élément de $\boxplus^-(4, \mathbb{C})$ et qu'il se laisse représenter par un élément $[B]$ de $M(4 \times 6, \mathbb{C})$. On peut donc légitimement écrire :

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_{(4 \times 6)[A]}]_{(4 \times 6)[A]} = [\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_{(4 \times 6)[B]}$$

□

Remarque 2.9. *La matrice $[T]$.*

La description de la répétition de l'action de la fonction $[\mathbf{a}, \dots]_{[A]}$ introduit un objet mathématique comportant quatre indices. Cet objet se définit par (voir ci-dessus) :

$$\forall \chi, \delta, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \alpha < \beta, \chi < \delta :$$

$$T_{\chi\delta\alpha\beta} = a^\chi \cdot A_{\alpha\beta}^\delta - a^\delta \cdot A_{\alpha\beta}^\chi$$

Puisque les paires d'indices (α, β) et (χ, δ) ne peuvent prendre chacune que 6 valeurs différentes, cet objet peut en principe se laisser représenter par un élément de $M(6, \mathbb{C})$.

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{0101} & T_{0102} & T_{0103} & T_{0112} & T_{0113} & T_{0123} \\ T_{0201} & T_{0202} & T_{0203} & T_{0212} & T_{0213} & T_{0223} \\ T_{0301} & T_{0302} & T_{0303} & T_{0312} & T_{0313} & T_{0323} \\ T_{1201} & T_{1202} & T_{1203} & T_{1212} & T_{1213} & T_{1223} \\ T_{1301} & T_{1302} & T_{1303} & T_{1312} & T_{1313} & T_{1323} \\ T_{2301} & T_{2302} & T_{2303} & T_{2312} & T_{2313} & T_{2323} \end{bmatrix}$$

Remarque 2.10. *Précisions concernant la matrice $[B]$.*

L'observation montre que :

$$\begin{aligned} [B({}^{(4 \times 6)}[A], {}^{(4)}\mathbf{a})] \\ = \\ [A] \cdot [T] \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{02}^0 & A_{03}^0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 & A_{23}^0 \\ A_{01}^1 & A_{02}^1 & A_{03}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & A_{23}^1 \\ A_{01}^2 & A_{02}^2 & A_{03}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & A_{23}^2 \\ A_{01}^3 & A_{02}^3 & A_{03}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 & A_{23}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{0101} & T_{0102} & T_{0103} & T_{0112} & T_{0113} & T_{0123} \\ T_{0201} & T_{0202} & T_{0203} & T_{0212} & T_{0213} & T_{0223} \\ T_{0301} & T_{0302} & T_{0303} & T_{0312} & T_{0313} & T_{0323} \\ T_{1201} & T_{1202} & T_{1203} & T_{1212} & T_{1213} & T_{1223} \\ T_{1301} & T_{1302} & T_{1303} & T_{1312} & T_{1313} & T_{1323} \\ T_{2301} & T_{2302} & T_{2303} & T_{2312} & T_{2313} & T_{2323} \end{bmatrix} \\ \in M(4 \times 6, \mathbb{C})$$

Exemple 2.2. La cas d'un cube déformant initial antisymétrique et anti-réduit.

Pour ces situations, l'anti-réduction mène rapidement à constater que la diagonale de la matrice [T] est nulle :

$$\forall \alpha, \beta : T_{\alpha\beta\alpha\beta} = a^\alpha \cdot A_{\alpha\beta}^\beta - a^\beta \cdot A_{\alpha\beta}^\alpha = 0$$

Pour les autres entrées :

$$\begin{aligned} T_{0101} &= a^0 \cdot A_{01}^1 - a^1 \cdot A_{01}^0 = 0 \\ T_{0102} &= a^0 \cdot A_{02}^1 - a^1 \cdot A_{02}^0 = -a^0 \cdot A_{20}^1 = a^0 \cdot A_{21}^0 = -a^0 \cdot A_{12}^0 = a^0 \cdot A^3 \\ T_{0103} &= a^0 \cdot A_{03}^1 - a^1 \cdot A_{03}^0 = -a^0 \cdot A_{30}^1 = a^0 \cdot A_{31}^0 = -a^0 \cdot A_{13}^0 = -a^0 \cdot A^2 \\ T_{0112} &= a^0 \cdot A_{12}^1 - a^1 \cdot A_{12}^0 = a^1 \cdot A^3 \\ T_{0113} &= a^0 \cdot A_{13}^1 - a^1 \cdot A_{13}^0 = -a^1 \cdot A^2 \\ T_{0123} &= a^0 \cdot A_{23}^1 - a^1 \cdot A_{23}^0 = a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1 \\ T_{0201} &= a^0 \cdot A_{01}^2 - a^2 \cdot A_{01}^0 = a^0 \cdot A_{12}^0 = -a^0 \cdot A^3 \\ T_{0202} &= a^0 \cdot A_{02}^2 - a^2 \cdot A_{02}^0 = 0 \\ T_{0203} &= a^0 \cdot A_{03}^2 - a^2 \cdot A_{03}^0 = -a^0 \cdot A_{30}^2 = a^0 \cdot A_{32}^0 = -a^0 \cdot A_{23}^0 = a^0 \cdot A^1 \\ T_{0212} &= a^0 \cdot A_{12}^2 - a^2 \cdot A_{12}^0 = a^2 \cdot A^3 \\ T_{0213} &= a^0 \cdot A_{13}^2 - a^2 \cdot A_{13}^0 = -(a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) \\ T_{0223} &= a^0 \cdot A_{23}^2 - a^2 \cdot A_{23}^0 = a^2 \cdot A^1 \\ T_{0301} &= a^0 \cdot A_{01}^3 - a^3 \cdot A_{01}^0 = a^0 \cdot A_{13}^0 = a^0 \cdot A^2 \\ T_{0302} &= a^0 \cdot A_{02}^3 - a^3 \cdot A_{02}^0 = -a^0 \cdot A_{20}^3 = a^0 \cdot A_{23}^0 = -a^0 \cdot A^1 \\ T_{0303} &= a^0 \cdot A_{03}^3 - a^3 \cdot A_{03}^0 = 0 \\ T_{0312} &= a^0 \cdot A_{12}^3 - a^3 \cdot A_{12}^0 = a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3 \\ T_{0313} &= a^0 \cdot A_{13}^3 - a^3 \cdot A_{13}^0 = -a^3 \cdot A^2 \\ T_{0323} &= a^0 \cdot A_{23}^3 - a^3 \cdot A_{23}^0 = a^3 \cdot A^1 \\ T_{1201} &= a^1 \cdot A_{01}^2 - a^2 \cdot A_{01}^1 = a^1 \cdot A_{12}^0 = -a^1 \cdot A^3 \\ T_{1202} &= a^1 \cdot A_{02}^2 - a^2 \cdot A_{02}^1 = a^2 \cdot A_{20}^1 = -a^2 \cdot A_{21}^0 = a^2 \cdot A_{12}^0 = -a^2 \cdot A^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1203} &= a^1 \cdot A_{03}^2 - a^2 \cdot A_{03}^1 = -a^1 \cdot A_{23}^0 + a^2 \cdot A_{13}^0 = a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2 \\
T_{1212} &= a^1 \cdot A_{12}^2 - a^2 \cdot A_{12}^1 = 0 \\
T_{1213} &= a^1 \cdot A_{13}^2 - a^2 \cdot A_{13}^1 = -a^1 \cdot A_{31}^2 = a^1 \cdot A_{32}^1 = -a^1 \cdot A_{23}^1 = -a^1 \cdot A^0 \\
T_{1223} &= a^1 \cdot A_{23}^2 - a^2 \cdot A_{23}^1 = -a^2 \cdot A^0 \\
T_{1301} &= a^1 \cdot A_{01}^3 - a^3 \cdot A_{01}^1 = a^1 \cdot A_{13}^0 = a^1 \cdot A^2 \\
T_{1302} &= a^1 \cdot A_{02}^3 - a^3 \cdot A_{02}^1 = -a^1 \cdot A_{20}^3 + a^3 \cdot A_{20}^1 = a^1 \cdot A_{23}^0 + a^3 \cdot A_{12}^0 = -(a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) \\
T_{1303} &= a^1 \cdot A_{03}^3 - a^3 \cdot A_{03}^1 = a^3 \cdot A_{30}^1 = -a^3 \cdot A_{31}^0 = a^3 \cdot A_{13}^0 = a^3 \cdot A^2 \\
T_{1312} &= a^1 \cdot A_{12}^3 - a^3 \cdot A_{12}^1 = -a^1 \cdot A_{21}^3 = a^1 \cdot A_{23}^1 = a^1 \cdot A^0 \\
T_{1313} &= a^1 \cdot A_{13}^3 - a^3 \cdot A_{13}^1 = 0 \\
T_{1323} &= a^1 \cdot A_{23}^3 - a^3 \cdot A_{23}^1 = -a^3 \cdot A^0 \\
T_{2301} &= a^2 \cdot A_{01}^3 - a^3 \cdot A_{01}^2 = a^2 \cdot A_{13}^0 - a^3 \cdot A_{12}^0 = a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3 \\
T_{2302} &= a^2 \cdot A_{02}^3 - a^3 \cdot A_{02}^2 = -a^2 \cdot A_{20}^3 = a^2 \cdot A_{23}^0 = -a^2 \cdot A^1 \\
T_{2303} &= a^2 \cdot A_{03}^3 - a^3 \cdot A_{03}^2 = a^3 \cdot A_{30}^2 = -a^3 \cdot A_{32}^0 = a^3 \cdot A_{23}^0 = -a^3 \cdot A^1 \\
T_{2312} &= a^2 \cdot A_{12}^3 - a^3 \cdot A_{12}^2 = -a^2 \cdot A_{21}^3 = a^2 \cdot A_{23}^1 = a^2 \cdot A^0 \\
T_{2313} &= a^2 \cdot A_{13}^3 - a^3 \cdot A_{13}^2 = a^3 \cdot A_{23}^1 = a^3 \cdot A^0 \\
T_{2323} &= a^2 \cdot A_{23}^3 - a^3 \cdot A_{23}^2 = 0
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&[T] \\
&= \\
&\begin{bmatrix}
0 & a^0 \cdot A^3 & -a^0 \cdot A^2 & a^1 \cdot A^3 & -a^1 \cdot A^2 & a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1 \\
-a^0 \cdot A^3 & 0 & a^0 \cdot A^1 & a^2 \cdot A^3 & -(a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) & a^2 \cdot A^1 \\
a^0 \cdot A^2 & -a^0 \cdot A^1 & 0 & a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3 & -a^3 \cdot A^2 & a^3 \cdot A^1 \\
-a^1 \cdot A^3 & -a^2 \cdot A^3 & a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2 & 0 & -a^1 \cdot A^0 & -a^2 \cdot A^0 \\
a^1 \cdot A^2 & -(a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) & a^3 \cdot A^2 & a^1 \cdot A^0 & 0 & -a^3 \cdot A^0 \\
a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3 & -a^2 \cdot A^1 & -a^3 \cdot A^1 & a^2 \cdot A^0 & a^3 \cdot A^0 & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice $[T]$ est la somme de deux matrices, la première est *anti-diagonale* et la seconde est antisymétrique.

$$\begin{aligned}
&[T] \\
&= \\
&\underbrace{\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -(a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2 & 0 & 0 & 0 \\
a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3 & -(a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}}_{=[T'/]} \\
&+ \\
&\underbrace{\begin{bmatrix}
0 & a^0 \cdot A^3 & -a^0 \cdot A^2 & a^1 \cdot A^3 & -a^1 \cdot A^2 & 0 \\
-a^0 \cdot A^3 & 0 & a^0 \cdot A^1 & a^2 \cdot A^3 & 0 & a^2 \cdot A^1 \\
a^0 \cdot A^2 & -a^0 \cdot A^1 & 0 & 0 & -a^3 \cdot A^2 & a^3 \cdot A^1 \\
-a^1 \cdot A^3 & -a^2 \cdot A^3 & 0 & 0 & -a^1 \cdot A^0 & -a^2 \cdot A^0 \\
a^1 \cdot A^2 & 0 & a^3 \cdot A^2 & a^1 \cdot A^0 & 0 & -a^3 \cdot A^0 \\
0 & -a^2 \cdot A^1 & -a^3 \cdot A^1 & a^2 \cdot A^0 & a^3 \cdot A^0 & 0
\end{bmatrix}}_{=[T^-]} \\
&= \\
&[T'/] + [T^-]
\end{aligned}$$

Et de découvrir deux propriétés :

2.5 Description de l'action répétée d'un produit de Lie déformé par un cube antisymétrique donné

- La somme des entrées de la partie de la matrice [T] réalisant une sorte d'*anti-diagonale* est égale au produit scalaire euclidien classique des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{A}$:

$$[T']^{\oplus} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{A} \rangle_{Id_4}$$

- La partie de la matrice [T] notée [T⁻] est entièrement antisymétrique à diagonale nulle et forcément :

$$[T^-]^{\oplus} = 0$$

Dans les circonstances de cet exemple :

$$\begin{aligned}
 & [B] \\
 & = \\
 & [\odot(\mathbf{A})] \cdot [T] \\
 & = \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A^3 & A^2 & -A^1 \\ 0 & A^3 & -A^2 & 0 & 0 & A^0 \\ -A^3 & 0 & A^1 & 0 & -A^0 & 0 \\ A^2 & -A^1 & 0 & A^0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \cdot \\
 & \begin{bmatrix} 0 & a^0 \cdot A^3 & -a^0 \cdot A^2 & a^1 \cdot A^3 & -(a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) & a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1 \\ -a^0 \cdot A^3 & 0 & a^0 \cdot A^1 & a^2 \cdot A^3 & -a^3 \cdot A^2 & a^2 \cdot A^1 \\ a^0 \cdot A^2 & -a^0 \cdot A^1 & 0 & a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3 & -a^3 \cdot A^0 & a^3 \cdot A^1 \\ -a^1 \cdot A^3 & -a^2 \cdot A^3 & a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2 & 0 & -a^1 \cdot A^0 & -a^2 \cdot A^0 \\ a^1 \cdot A^2 & -(a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) & a^3 \cdot A^2 & a^1 \cdot A^0 & 0 & -a^3 \cdot A^0 \\ a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3 & -a^2 \cdot A^1 & -a^3 \cdot A^1 & a^2 \cdot A^0 & a^3 \cdot A^0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \\
 & \begin{bmatrix} a^1 \cdot \{(A^2)^2 + (A^3)^2\} - A^1 \cdot (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3) & a^2 \cdot \{(A^1)^2 + (A^3)^2\} - A^2 \cdot (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) & \cdot \\ -a^0 \cdot \{(A^2)^2 + (A^3)^2\} + A^0 \cdot (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3) & A^1 \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) & \cdot \\ A^2 \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) & A^0 \cdot (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) - a^0 \cdot \{(A^1)^2 + (A^3)^2\} & \cdot \\ A^3 \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) & A^3 \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) & \cdot \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cdot & a^3 \cdot \{(A^1)^2 + (A^2)^2\} - A^3 \cdot (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2) & \cdot \\ \cdot & A^1 \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) & \cdot \\ \cdot & A^2 \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) & \cdot \\ \cdot & A^0 \cdot (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2) - a^0 \cdot \{(A^1)^2 + (A^2)^2\} & \cdot \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cdot & A^0 \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) & \cdot \\ \cdot & a^2 \cdot \{(A^0)^2 + (A^3)^2\} - A^2 \cdot (a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) & \cdot \\ \cdot & A^1 \cdot (a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) - a^1 \cdot \{(A^0)^2 + (A^3)^2\} & \cdot \\ \cdot & A^3 \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) & \cdot \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cdot & A^0 \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) & \cdot \\ \cdot & A^1 \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) & \cdot \\ \cdot & A^2 \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) & \cdot \\ \cdot & -A^3 \cdot (a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) + a^3 \cdot \{(A^1)^2 + (A^0)^2\} & \cdot \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cdot & A^1 \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) & \cdot \\ \cdot & A^2 \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) & \cdot \\ \cdot & -A^3 \cdot (a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) - a^2 \cdot \{(A^0)^2 + (A^1)^2\} & \cdot \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Remarque 2.11. Description de la répétition de l'action de la fonction $[^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots]_{\mathbf{A}}$.

Comme conséquence de la dualité des possibles représentations de l'action de la fonction $[^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots]_{\mathbf{A}}$, il semble exister cinq chemins pour représenter l'action répétée de cette fonction :

1. Celui restant dans $M(4, \mathbb{C})$; dans ce cas :

$$|[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \rangle = {}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a}) \cdot |[\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_{\mathbf{A}} \rangle = \{{}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a})\}^2 \cdot |\mathbf{x}_0 \rangle$$

La représentation de la répétition de l'action de la fonction $[^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots]_{\mathbf{A}}$ est donc la matrice :

$$\{{}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a})\}^2$$

Puisque la décomposition la plus simple $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ est ici une matrice antisymétrique (voir ci-dessus la remarque 2.5), son carré est une matrice symétrique *éventuellement identifiable* avec la matrice identité Id_4 . Autrement dit : les calculs laissent penser que le carré de la décomposition la plus simple de la représentation dans $M(4, \mathbb{C})$ de l'action de la fonction $[(4)\mathbf{a}, (4)\dots]_{\mathbf{A}}$ pourrait éventuellement s'identifier avec la matrice identité Id_4 . Quand tel serait le cas, le déterminant de ce carré vaudrait $1_{\mathbb{C}}$. Or le déterminant de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ vaut en général le carré du produit scalaire euclidien classique des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{A}$; voir [d ; exemple 2.1, pp. 9-10] :

$$|\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})| = (\langle \mathbf{a}, \mathbf{A} \rangle_{\text{Id}_4})^2$$

Donc le déterminant du carré de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ vaut le carré du déterminant de cette matrice :

$$|\{\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})\}^2| = (\langle \mathbf{a}, \mathbf{A} \rangle_{\text{Id}_4})^4$$

Et il existe donc bien a priori des circonstances autorisant à poser :

$$\{\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})\}^2 = \text{Id}_4$$

Elles se caractérisent en particulier par la relation :

$$(\langle \mathbf{a}, \mathbf{A} \rangle_{\text{Id}_4})^4 = 1$$

Ce qui, au sein d'une discussion développée sur le corps des nombres complexes permet d'envisager quatre familles de situations :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{A} \rangle_{\text{Id}_4} \in \{-i, -1, +1, +i\}, i^2 + 1 = 0$$

2. Celui faisant appel à des éléments de $M(4 \times 6, \mathbb{C})$. Dans ce cas il convient de calculer à la main :

$$\begin{aligned} & [\odot(\mathbf{A})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t \\ &= \\ & \begin{bmatrix} A^2 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^2)^2\} - a^2 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^2)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) & 0 & \cdot & \cdot \\ -\{A^1 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^1)^2\} - a^1 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^1)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1)\} & \cdot & 0 & \cdot \\ A^1 \cdot A^2 \cdot \{(a^2)^2 - (a^1)^2\} - a^1 \cdot a^2 \cdot \{(A^2)^2 - (A^1)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & -\{A^2 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^2)^2\} - a^2 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^2)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2)\} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & A^0 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^0)^2\} - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2) \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) & 0 & \cdot \\ \cdot & -\{A^0 \cdot A^2 \cdot \{(a^2)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^2 \cdot \{(A^2)^2 - (A^0)^2\} - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0)\} & \cdot & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & \cdot & A^1 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^1)^2\} - a^1 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^1)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) & \cdot \\ \cdot & 0 & -\{A^0 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^0)^2\} - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2) \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0)\} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & A^0 \cdot A^1 \cdot \{(a^1)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^1 \cdot \{(A^1)^2 - (A^0)^2\} - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & -\{A^1 \cdot A^2 \cdot \{(a^2)^2 - (a^1)^2\} - a^1 \cdot a^2 \cdot \{(A^2)^2 - (A^1)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1)\} \\ \cdot & 0 & \cdot & A^0 \cdot A^2 \cdot \{(a^2)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^2 \cdot \{(A^2)^2 - (A^0)^2\} - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \\ \cdot & \cdot & 0 & -\{A^0 \cdot A^1 \cdot \{(a^1)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^1 \cdot \{(A^1)^2 - (A^0)^2\} - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0)\} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On remarque à cet endroit que :

— La diagonale est nulle.

- Pour les entrées en dehors de la diagonale ($\alpha \neq \beta$), il semble exister un patron dépendant de la position ($\alpha = \text{ligne}, \beta = \text{colonne}$) dans la matrice :

$$\begin{aligned}
 & m_{\alpha\beta}^{\chi\delta} \\
 & = \\
 & (a^\alpha . A^\alpha + a^\beta . A^\beta) . (a^\chi . A^\delta - a^\delta . A^\chi) \\
 & + A^\chi . A^\delta . \{(a^\delta)^2 - (a^\chi)^2\} - a^\chi . a^\delta . \{(A^\delta)^2 - (A^\chi)^2\} \\
 & = \\
 & (a^\chi . A^\delta - a^\delta . A^\chi) . \{(a^\alpha . A^\alpha + a^\beta . A^\beta) - (a^\chi . A^\chi + a^\delta . A^\delta)\}
 \end{aligned}$$

Avec : $\chi \neq \delta, \chi < \delta, \chi$ et $\delta \neq \alpha, \beta$. Ce terme générique est affublé d'un signe moins (-) lorsque $\alpha < \beta$ et d'un signe plus (+) quand $\alpha > \beta$. In fine, on peut donc écrire :

$$m_{\alpha\beta}^{\chi\delta} = -\epsilon_{\alpha\beta} . (a^\chi . A^\delta - a^\delta . A^\chi) . \{(a^\alpha . A^\alpha + a^\beta . A^\beta) - (a^\chi . A^\chi + a^\delta . A^\delta)\}$$

... à partir du moment où on décide de la convention selon laquelle :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = +1 \text{ si } \alpha < \beta, -1 \text{ si } \alpha > \beta, 0 \text{ si } \alpha = \beta$$

- Le résultat de ce calcul est donc une matrice antisymétrique qui ne peut jamais être identifiée avec la matrice identité Id_4 . Ce deuxième chemin ne peut jamais faire de la fonction fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ une involution.
- 3. Le chemin passant par les deux représentations distinctes dans un sens ; par exemple celui consistant à écrire :

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{x}_1]_{\mathbf{A}} > = {}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a}) . |[\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_{\mathbf{A}} > = {}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a}) . \{[\odot(\mathbf{A})] . [\odot(\mathbf{a})]^t\} . |\mathbf{x}_0 >$$

- 4. Le chemin passant par les deux représentations distinctes dans l'autre sens ; par exemple celui consistant à écrire :

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{x}_1]_{\mathbf{A}} > = \{[\odot(\mathbf{A})] . [\odot(\mathbf{a})]^t\} . |\mathbf{x}_1 > = \{[\odot(\mathbf{A})] . [\odot(\mathbf{a})]^t\} . {}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a}) . |\mathbf{x}_0 >$$

- 5. Le chemin passant deux fois par la matrice $[\odot(\mathbf{A})].[\odot(\mathbf{a})]^t$. Dans ce cas, l'involution est réalisée lorsque :

$$\{<^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{a}>_{\text{Id}_4} . \text{Id}_4 - T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{a})\}^2 = \text{Id}_4$$

Or cette relation est mathématiquement équivalente à :

$$<^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{a}>_{\text{Id}_4} . \{<^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{a}>_{\text{Id}_4} . \text{Id}_4 - T_2(\otimes)(^{(4)}\mathbf{A}, ^{(4)}\mathbf{a})\} = \text{Id}_4$$

Par conséquent, pour que cette cinquième opportunité existe, il faut que la matrice $[\odot(\mathbf{A})].[\odot(\mathbf{a})]^t$ soit symétrique. Pour rappel, le sujet a déjà été en partie défloré au niveau des distinctions entre les deux représentations

en remarque 2.7 et de l'étude de l'invariance en remarque 2.8. Il y a été démontré la nécessité de poser ici :

$$\exists z \in \mathbb{C} : \mathbf{a} = z \cdot \mathbf{A}$$

... pour annuler la partie antisymétrique du produit matriciel $[\odot(\mathbf{A})].[\odot(\mathbf{a})]^t$. Par conséquent l'involution du cinquième type, *si elle peut exister*, doit se caractériser par la relation :

$$z^2 \cdot \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A} \rangle_{Id_4} \cdot \{ \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A}) \} = Id_4$$

Pour autant, on sait aussi que le produit matriciel $[\odot(\mathbf{A})].[\odot(\mathbf{a})]^t$ est une des représentations possibles d'une décomposition sans résidu d'un produit de Lie déformé. Ce qui exige ici le respect de la relation :

$$| \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{A}) - \underbrace{\mathbf{A}\Phi(\mathbf{A})}_{= {}^{(4)}[0_{\mathbb{C}}]} | = 0_{\mathbb{C}}$$

Or l'observation des déterminants des matrices présentes de part et d'autre du signe de l'égalité dans la relation caractérisant une éventuelle involution du cinquième type montre que le déterminant situé à gauche du signe doit être nul tandis que celui du déterminant situé à droite doit valoir $1_{\mathbb{C}}$. L'égalité entre les matrices placées à gauche et à droite de ce signe d'égalité est donc strictement irréalisable. Finalement, il n'existe pas d'involution dans le cadre de la cinquième représentation de la répétition de l'action de la fonction $[{}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\dots]_{\mathbf{A}}$ sur un élément de V_4 représenté dans V_4^* .

Les opportunités 3 et 4 ne peuvent représenter des situations involutives que si le produit matriciel $[\odot(\mathbf{A})].[\odot(\mathbf{a})]^t$ est antisymétrique. Il faut donc au minimum que :

$$\frac{1}{2} \cdot \{ T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a}) + T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{A}) \} - \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 = {}^{(4)}[0_{\mathbb{C}}]$$

Pour l'opportunité 3, l'involution signifierait le respect de la relation :

$$\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a}) \cdot \{ \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a}) \} = Id_4$$

Pour l'opportunité 4, l'involution signifierait le respect de la relation :

$$\{ \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a}) \} \cdot \mathbf{A}\Phi(\mathbf{a}) = Id_4$$

Dans ces deux cas, il faut surtout que la table de Pythagore soit antisymétrique pour que son produit avec la décomposition la plus simple devienne automatiquement symétrique ; cette exigence logique se traduit par :

$$T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a})^t = -T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a})$$

Mais cette antisymétrie est-elle réalisable ? Et si elle l'est, quand ? La relation matricielle précédente est équivalente à :

$$T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a}) + T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{A}) = {}^{(4)}[0_{\mathbb{C}}]$$

Ou encore, dans le langage des composantes des vecteurs impliqués :

$$\forall \alpha, \beta \in \text{Ind}_4 : A^\alpha \cdot a^\beta + a^\alpha \cdot A^\beta = 0_{\mathbb{C}}$$

De sorte qu'on a forcément en particulier :

$$\forall \alpha \in \text{Ind}_4 : A^\alpha \cdot a^\alpha = 0_{\mathbb{C}}$$

Cette exigence particulière est réalisée si un des deux vecteurs est nul. Or si un des deux vecteurs est nul, la table de Pythagore dans laquelle il apparait est nulle et il en est de même pour le produit matriciel $[\odot(\mathbf{A})].[\odot(\mathbf{a})]^t$ qui, du coup, ne peut plus être considéré comme étant antisymétrique ! Par conséquent la troisième façon et la quatrième façon de répéter l'action de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ sur un élément de V_4 représenté dans V_4^* ne peuvent jamais être involutives³.

Lemme 2.2. *Concernant l'involution de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$.*

Parmi les cinq représentations possibles de la répétition de l'action de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ sur un élément de V_4 représenté dans V_4^* , seule la décomposition la plus simple de cette action non répétée, la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$, permet de définir clairement les conditions faisant de cette fonction une involution ; les voir à la fin de la remarque 2.11, point 1 :

$$\{\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})\}^2 = Id_4$$

Lorsque, en plus :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{A} \rangle_{Id_4} \in \{-i, -1, +1, +i\}, i^2 + 1 = 0$$

3 Quelques rappels succincts sur les représentations des champs électromagnétiques

Les représentations mathématiques des champs électromagnétiques ont fortement évolué au cours du siècle et demi passé.

3.1 La représentation vectorielle

Elle correspond à la représentation historique des champs. En effet l'énoncé, sous une forme mathématique, des lois décrivant le comportement observé des champs électromagnétiques résultent du fantastique travail de synthèse réalisé par J.C. Maxwell [01], [06 ; § 1.1.1, p.7]. A cette époque, le langage mathématique reste encore entièrement inspiré par la vision cartésienne de la notion de repérage [02].

Ceci tient aux divers faits suivants : (i) Morley et Michelson n'ont pas encore réalisé leurs expériences d'interférométrie [03] ; (ii) Poincaré et Lorentz [04], [06

3. Nota bene : cette conclusion serait peut-être différente dans une discussion étendue aux espaces vectoriels dont les éléments ont des composantes dans la partie anti-commutative du corps des quaternions, $\mathbb{H}$, ou dans celle du corps des octonions $\mathbb{O}$.

; § 1.3, pp.11-12], n'ont pas encore publié les transformations rendant compte de l'invariance de la vitesse de propagation de la lumière observée par deux personnes situées à l'origine de référentiels inertiels et (iii) A. Einstein n'a pas encore fait paraître son article posant les fondations de la relativité restreinte. Ce langage privilégie donc l'usage des composantes spatiales des entités physiques qu'il tente de décrire. Le temps n'a qu'un second rôle : celui d'un simple paramètre. Le travail de ce physicien écossais n'échappe pas aux habitudes en vigueur à la fin du dix-neuvième siècle.

3.2 La représentation via les formes bilinéaires covariantes

Elle s'inspire des travaux très anciens d'E. Cartan sur les formes bilinéaires covariantes associées aux expressions de Pfaff ; voir un exemple dans [05] et dans le livre [07].

3.3 Les représentations tensorielles et matricielles

Elle sont par exemple visibles dans le cours [06] et dans [08]. On note que toutes les représentations matricielles deux fois covariantes d'un champ électromagnétique ont pour formalisme générique :

$$F_{(2,0)}({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -| {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & {}_{[J]} \Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{bmatrix}$$

Tandis que toutes les représentations matricielles deux fois contravariantes d'un champ électromagnétique ont pour formalisme générique :

$$F_{(0,2)}(-{}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 0 & -\langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & {}_{[J]} \Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{bmatrix}$$

3.4 Les spécificités des représentations induites par l'action de produits de Lie déformés

Remarque 3.1. *Le questionnement.*

La théorie s'intéressant aux produits tensoriels déformés, à leurs variantes (les produits tensoriels déformés et alternés ; les produits de Lie déformés) et à leurs décompositions (sans ou avec résidu) a fait apparaître des matrices anti-symétriques de $M(4, \mathbb{C})$ à de multiples reprises ; par exemple : [d], [e] et ci-dessus.

Il est tentant de rechercher les circonstances autorisant à raisonnablement penser que certaines de ces matrices sont des représentations mathématiques réalistes des champs électromagnétiques rencontrés lors des expérimentations physiques. Comme tout ce que permettent de découvrir les mathématiques n'a pas nécessairement un correspondant dans la nature, seules quelques règles contenant les informations imposées par les expériences peuvent constituer les critères qualifiant pour passer de la réflexion généraliste à la représentation effective de la réalité.

Remarque 3.2. *Les critères de réalité.*

Concernant les champs électromagnétiques, il me semble que deux critères doivent absolument être respectés par les représentations mathématiques :

1. Elles doivent satisfaire aux lois de Maxwell dans le vide, donc et en particulier permettre le respect de la dualité électromagnétique. Ce premier critère contient implicitement l'obligation de définir l'équivalent de la notion de dérivée partielle pour rendre compte des variations des champs au cours du temps. Concernant ce point spécifique, il est sans doute utile de rappeler que les fonctions $^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots]_{\mathbf{A}}$ peuvent permettre de définir des dérivations internes.
2. Il doit être possible de passer d'une représentation à l'autre (i) soit via les transformations de Lorentz au cas où elles expriment les mesures réalisées par deux observateurs disjoints sur un même champ ; (ii) soit via une transformation spatio-temporelle au cas où elles expriment les mesures successives réalisées par un observateur pour un champ donné en évolution.

Ce document a mis en exergue deux matrices anti-symétriques pour lesquelles on pourrait être tenté de se demander si elles sont aptes à pouvoir représenter des champs électromagnétiques observés dans la nature :

4 La décomposition la plus simple lorsque le cube déformant est équivalent à un vecteur

4.1 Caractéristiques premières

La première est la représentation de la décomposition la plus simple d'un produit de Lie déformé par un cube anti-symétrique et anti-réduit :

$$\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$$

Pour celle-ci se pose par exemple la question de la recevabilité de la relation :

$$F_{(2,0)}(^{(3)}\mathbf{E}_1, ^{(3)}\mathbf{H}_1) = \left[\begin{array}{cc} 0 & \langle ^{(3)}\mathbf{E}_1 | \\ -| ^{(3)}\mathbf{E}_1 > & [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}_1) \end{array} \right] = \mathbf{A}\Phi(\mathbf{a}) ?$$

Avec les égalités (voir la remarque 2.5) :

$$^{(3)}\mathbf{E}_1 : (\Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{03})$$

$$^{(3)}\mathbf{H}_1 : (-\Phi_{23}, \Phi_{13}, -\Phi_{12})$$

$$\Phi_{01} = a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2 = E_1^1$$

$$\Phi_{02} = -(a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) = E_1^2$$

$$\Phi_{03} = a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1 = E_1^3$$

$$\Phi_{12} = a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0 = -H_1^3$$

$$\begin{aligned}\Phi_{13} &= -(a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) = H_1^2 \\ \Phi_{23} &= a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0 = -H_1^1\end{aligned}$$

Le questionnement concerne donc ici la matrice dont les entrées valent :

$$\Phi_{\chi\delta} = \phi_{\alpha\beta} \cdot (a^\alpha \cdot A^\beta - a^\beta \cdot A^\alpha)$$

Avec :

$$\alpha, \beta, \chi, \delta \in Ind_4$$

$$\alpha < \beta < \chi < \delta$$

$$(\alpha, \beta) \neq (\chi, \delta)$$

$$\phi_{\alpha\beta} = -1, \text{ si } \exists n \in \mathbb{N} : \alpha + \beta = 2 \cdot n$$

$$\phi_{\alpha\beta} = +1, \text{ si } \exists n \in \mathbb{N} : \alpha + \beta = 2 \cdot n + 1$$

4.2 Analyse

La matrice :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}\Phi(\mathbf{a}) \\ &= \\ & \begin{bmatrix} 0 & (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) & -(a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) & (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) \\ -(a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) & 0 & (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) & -(a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \\ (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) & -(a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) & 0 & (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) \\ -(a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) & (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) & -(a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

... se laisse présenter sous la forme d'une différence de deux matrices :

$$\begin{bmatrix} 0 & a^2 \cdot A^3 & a^3 \cdot A^1 & a^1 \cdot A^2 \\ a^3 \cdot A^2 & 0 & a^0 \cdot A^3 & a^2 \cdot A^0 \\ a^1 \cdot A^3 & a^3 \cdot A^0 & 0 & a^0 \cdot A^1 \\ a^2 \cdot A^1 & a^0 \cdot A^2 & a^1 \cdot A^0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a^3 \cdot A^2 & a^1 \cdot A^3 & a^2 \cdot A^1 \\ a^2 \cdot A^3 & 0 & a^3 \cdot A^0 & a^0 \cdot A^2 \\ a^3 \cdot A^1 & a^0 \cdot A^3 & 0 & a^1 \cdot A^0 \\ a^1 \cdot A^2 & a^2 \cdot A^0 & a^0 \cdot A^1 & 0 \end{bmatrix}$$

La seconde est visiblement la transposée de la première.

Question : On peut maintenant se demander s'il existe des règles de correspondance bien précises entre la position (α, β) d'une entrée et la paire (χ, δ) caractérisant le monome situé à cette position ?

Remarque 4.1. *Le principe de complémentarité des paires.*

Là encore, un principe de complémentarité apparaît rapidement. En clair, si on considère la série ordonnée croissante de nombres naturels 0, 1, 2, 3, et qu'on y pioche deux nombres différents au hasard - par exemple la paire (α, β) , alors la paire (χ, δ) est forcément constituée des deux nombres n'apparaissant pas dans la paire (α, β) .

Il reste ensuite à découvrir un principe d'ordonnancement relatif pour les arguments de ces paires. Pour tenter de le définir, on observe les correspondances suivantes :

$$\begin{bmatrix} (0, 0) \rightarrow 0 & (0, 1) \rightarrow (2, 3) & (0, 2) \rightarrow (3, 1) & (0, 3) \rightarrow (1, 2) \\ (1, 0) \rightarrow (3, 2) & (1, 1) \rightarrow 0 & (1, 2) \rightarrow (0, 3) & (1, 3) \rightarrow (2, 0) \\ (2, 0) \rightarrow (1, 3) & (2, 1) \rightarrow (3, 0) & (2, 2) \rightarrow 0 & (2, 3) \rightarrow (0, 1) \\ (3, 0) \rightarrow (2, 1) & (3, 1) \rightarrow (0, 2) & (3, 2) \rightarrow (1, 0) & (3, 3) \rightarrow 0 \end{bmatrix}$$

La diagonale est nulle.

Les entrées situées sous la diagonale se comportent exactement de manière inverse aux entrées situées au dessus de la diagonale. Il suffit donc de connaître le comportement de ces dernières pour connaître celui des premières.

Remarque 4.2. *Sur l'ordonnement des arguments à l'intérieur de chaque paire.*

En partant du principe que les arguments *devraient dans l'idéal être* ordonnés comme suit pour les paires au-dessus de la diagonale :

$$\alpha < \beta < \chi < \delta$$

On remarque alors la règle suivante :

$$\{\alpha < \beta, \exists n \in \mathbb{N} : \alpha + \beta = 2.n + 1\} \Rightarrow \{(\alpha, \beta) \rightarrow (\chi, \delta) \mid \chi < \delta\}$$

$$\{\alpha < \beta, \exists n \in \mathbb{N} : \alpha + \beta = 2.n\} \Rightarrow \{(\alpha, \beta) \rightarrow (\chi, \delta) \mid \chi > \delta\}$$

En partant du principe que les arguments *devraient dans l'idéal être* ordonnés comme suit pour les paires en dessous de la diagonale :

$$\alpha > \beta > \chi > \delta$$

On remarque alors la règle suivante :

$$\{\alpha > \beta, \exists n \in \mathbb{N} : \alpha + \beta = 2.n + 1\} \Rightarrow \{(\alpha, \beta) \rightarrow (\chi, \delta) \mid \chi > \delta\}$$

$$\{\alpha > \beta, \exists n \in \mathbb{N} : \alpha + \beta = 2.n\} \Rightarrow \{(\alpha, \beta) \rightarrow (\chi, \delta) \mid \chi < \delta\}$$

Remarque 4.3. *Résumé des règles de correspondance entre les paires d'arguments.*

La correspondance $(\alpha, \beta) \rightarrow (\chi, \delta)$ entre la paire (α, β) indiquant la position (ligne, colonne) d'une entrée de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ et la paire (χ, δ) caractérisant le monome présent à cette position se réalise de la manière suivante :

1. À une position décrite par une paire d'arguments répétés correspond toujours une entrée nulle dans la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$;
2. Au dessus de la diagonale, les arguments sont conventionnellement classés de manière croissante : $\alpha < \beta < \chi < \delta$;
3. En dessous de la diagonale, les arguments sont conventionnellement classés de manière décroissante : $\alpha > \beta > \chi > \delta$;
4. La paire (χ, δ) est la complémentaire de la paire (α, β) ;
5. Si la somme des arguments dans la paire précisant la position dans la matrice est un nombre impair, on ne change pas l'ordre des arguments de cette paire lorsqu'on écrit sa paire complémentaire. Si cette somme est un nombre pair, alors on change l'ordre des arguments de cette paire lorsqu'on écrit sa paire complémentaire.

4.3 Le chemin menant à la réalité

Ceci ayant été dit, que peut-on apprendre sur les champs EM présumablement associés avec la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$? Respectent-ils bien les lois de Maxwell ? Si oui : où et quand ?

Remarque 4.4. *Sur les champs magnétiques homogènes.*

Soit le calcul :

$$\begin{aligned}
 & {}^{(3)}\mathbf{H}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{a} \\
 &= \\
 & \begin{bmatrix} H_1^2 \cdot a^3 - H_1^3 \cdot a^2 \\ H_1^3 \cdot a^1 - H_1^1 \cdot a^3 \\ H_1^1 \cdot a^2 - H_1^2 \cdot a^1 \end{bmatrix} \\
 &= \\
 & \begin{bmatrix} -(a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \cdot a^3 + (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) \cdot a^2 \\ -(a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) \cdot a^1 + (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) \cdot a^3 \\ -(a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) \cdot a^2 + (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \cdot a^1 \end{bmatrix} \\
 &= \\
 & \begin{bmatrix} -a^0 \cdot a^3 \cdot A^2 + a^2 \cdot a^3 \cdot A^0 + a^0 \cdot a^2 \cdot A^3 - a^2 \cdot a^3 \cdot A^0 \\ -a^0 \cdot a^1 \cdot A^3 + a^1 \cdot a^3 \cdot A^0 + a^0 \cdot a^3 \cdot A^1 - a^1 \cdot a^3 \cdot A^0 \\ -a^0 \cdot a^2 \cdot A^1 + a^1 \cdot a^2 \cdot A^0 + a^0 \cdot a^1 \cdot A^2 - a^1 \cdot a^2 \cdot A^0 \end{bmatrix} \\
 &= \\
 & a^0 \cdot \begin{bmatrix} -a^3 \cdot A^2 + a^2 \cdot A^3 \\ -a^1 \cdot A^3 + a^3 \cdot A^1 \\ -a^2 \cdot A^1 + a^1 \cdot A^2 \end{bmatrix} \\
 &= \\
 & a^0 \cdot ({}^{(3)}\mathbf{a} \wedge {}^{(3)}\mathbf{A}) \\
 &= \\
 & a^0 \cdot {}^{(3)}\mathbf{E}_1
 \end{aligned}$$

Si le coeur de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ représentait un champ magnétique homogène dans le cadre d'une interprétation selon laquelle le vecteur $\mathbf{a}$ représente les coordonnées d'un événement tandis que le vecteur $\mathbf{A}$ symbolise le potentiel EM, on devrait trouver selon [08 - D ; § 19, p. 61, (19,4)] :

$${}^{(3)}\mathbf{H}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{a} = 2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{A}_{EM}$$

Ce n'est visiblement pas le cas ici puisque le calcul ci-dessus a finalement livré :

$${}^{(3)}\mathbf{H}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{a} = a^0 \cdot {}^{(3)}\mathbf{E}_1 = a^0 \cdot ({}^{(3)}\mathbf{a} \wedge {}^{(3)}\mathbf{A}) \equiv {}^{(3)}\mathbf{H}_1 = -a^0 \cdot {}^{(3)}\mathbf{A}$$

La route cherchant à démontrer que la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ peut représenter un champ EM commence donc sous de mauvais hospices, ne serait-ce déjà parce qu'une des lois de Maxwell s'écrit ici :

$${}^{(3)}\mathbf{H}_1 = \mathbf{Rot} {}^{(3)}\mathbf{A}_{EM}$$

Tous ces éléments mènent à penser que la première interprétation proposée pour le cube $\mathbf{A}$ ramené au vecteur $\mathbf{A}$ et pour le vecteur $\mathbf{a}$ de cette théorie est irrecevable. Pour assurer la cohérence physique des équations, il convient de poser :

$$a^0 \cdot {}^{(4)}\mathbf{A} = -\mathbf{Rot} {}^{(4)}\mathbf{A}_{EM} \equiv (a^0 \cdot A^0, -{}^{(3)}\mathbf{H}_1)$$

Et de ne pas considérer le vecteur $\mathbf{a}$ comme un événement spatio-temporelle mais comme une quadri-vitesse :

$${}^{(4)}\mathbf{a} = {}^{(4)}\mathbf{u}$$

Sous ces nouvelles conditions, si u^0 n'est pas nul⁴, la matrice examinée a la *signification physique* acceptable suivante :

$${}^{(4)}\mathbf{A} \Phi({}^{(4)}\mathbf{a}) = -\frac{1}{u^0} \cdot \mathbf{Rot} {}^{(4)}\mathbf{A}_{EM} \Phi({}^{(4)}\mathbf{u})$$

$$[\Phi_{\chi\delta}] = [\phi_{\alpha\beta} \cdot \left\{ \frac{u^\beta}{u^0} \cdot (\mathbf{Rot} {}^{(4)}\mathbf{A}_{EM})^\alpha - \frac{u^\alpha}{u^0} \cdot (\mathbf{Rot} {}^{(4)}\mathbf{A}_{EM})^\beta \right\}]$$

Est-elle encore parfois la représentation directe d'un champ EM ?

Si elle l'est, alors il faut :

1. en particulier continuer à pouvoir écrire :

$$\Phi_{12} = a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0 = -H_1^3$$

$$\Phi_{13} = -(a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) = H_1^2$$

$$\Phi_{23} = a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0 = -H_1^1$$

Or les relations assurant la cohérence physique des équations transforment les trois précédentes en :

$$-\Phi_{12} = H_1^3 + u^3 \cdot A^0 = H_1^3$$

$$\Phi_{13} = H_1^2 + u^2 \cdot A^0 = H_1^2$$

$$-\Phi_{23} = H_1^1 + u^1 \cdot A^0 = H_1^1$$

Ces relations ne peuvent donc être validées indépendamment des composantes spatiales de la vitesse que si :

$$A^0 = 0, \forall {}^{(3)}\mathbf{u}$$

Auquel cas la matrice $\mathbf{A} \Phi(\mathbf{a})$ prend le formalisme suivant :

$${}^{(4)}\mathbf{A} \Phi({}^{(4)}\mathbf{a})$$

=

4. C'est souvent le cas puisque dans certains référentiels, on peut poser $u^0 = c$: vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

4 LA DÉCOMPOSITION LA PLUS SIMPLE LORSQUE LE CUBE DÉFORMANT EST ÉQUIVALENT À UN VECTEUR

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{u^0} \cdot \mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM} \Phi^{(4)}(\mathbf{u}) \\
& = \\
& \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{u^0} \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) & -\frac{1}{u^0} \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) & \frac{1}{u^0} \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) \\ -\frac{1}{u^0} \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) & 0 & a^0 \cdot A^3 & -a^0 \cdot A^2 \\ \frac{1}{u^0} \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) & -a^0 \cdot A^3 & 0 & a^0 \cdot A^1 \\ -\frac{1}{u^0} \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) & a^0 \cdot A^2 & -a^0 \cdot A^1 & 0 \end{array} \right] \\
& = \\
& \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{u^0} \cdot (-u^2 \cdot H^3 + u^3 \cdot H^2) & \frac{1}{u^0} \cdot (u^1 \cdot H^3 - u^3 \cdot H^1) & \frac{1}{u^0} \cdot (-u^1 \cdot H^2 + u^2 \cdot H^1) \\ -\frac{1}{u^0} \cdot (u^2 \cdot H^3 - u^3 \cdot H^2) & 0 & -H^3 & H^2 \\ \frac{1}{u^0} \cdot (u^1 \cdot H^3 - u^3 \cdot H^1) & H^3 & 0 & -H^1 \\ -\frac{1}{u^0} \cdot (u^1 \cdot H^2 - u^2 \cdot H^1) & -H^2 & H^1 & 0 \end{array} \right] \\
& =^5 \\
& \left[\begin{array}{cccc} 0 & E_1^1 & E_1^2 & E_1^3 \\ -E_1^1 & 0 & -H_1^3 & H_1^2 \\ -E_1^2 & H_1^3 & 0 & -H_1^1 \\ -E_1^3 & -H_1^2 & H_1^1 & 0 \end{array} \right] \\
& = \\
& F_{(2,0)}({}^{(3)}\mathbf{E}_1, {}^{(3)}\mathbf{H}_1)
\end{aligned}$$

C'est bien le résultat escompté.

2. Par ailleurs, (peut-être à un signe moins près) il faut aussi pouvoir écrire les équations décrivant les variations acceptables du potentiel EM :

$$\frac{u^\alpha}{u^0} \cdot (\mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM})^\beta = \frac{\partial A_{EM}^\beta}{\partial u_\alpha}$$

Ce qui peut se condenser symboliquement en :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{A}_{EM}) = \frac{1}{u^0} \cdot T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{u}, \mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM})$$

... parce que cette égalité permet de retrouver (peut-être à un signe moins près) la preuve que la matrice étudiée peut représenter un champ EM ; en effet :

$$\begin{aligned}
& T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{A}_{EM}) - T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{A}_{EM}) \\
& = \\
& T_2(\otimes)\left(\frac{{}^{(4)}\mathbf{u}}{u^0}, \mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM}\right) - T_2^t(\otimes)\left(\frac{{}^{(4)}\mathbf{u}}{u^0}, \mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM}\right) \\
& = \\
& \frac{1}{u^0} \cdot \mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM} \Phi^{(4)}(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

5. Il faut rappeler ici que, pour une particule électrique sans accélération, la loi de Lorentz s'écrit [08 - D ; § 22. p. 67] :

$${}^{(3)}\mathbf{E} = \frac{1}{u^0} \cdot {}^{(3)}\mathbf{H} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u}$$

Théorème 4.1. *Sur les décompositions les plus simples d'une certaine famille de produits de Lie déformés.*

A la décomposition sans résidu la plus simple d'un produit de Lie du type suivant

$$[(^{(4)}\mathbf{u}, ^{(4)}\dots)]_{(0, -(^{(3)}\mathbf{H})}$$

... correspond toujours une représentation matricielle de la version deux fois covariante d'un tenseur champ électromagnétique $[F_{(2,0)}(^{(3)}\mathbf{E}, ^{(3)}\mathbf{H})]$ dont les arguments respectent la loi de Lorentz pour les particules sans accélération :

$$(^{(3)}\mathbf{E} = \frac{1}{u^0} \cdot (^{(3)}\mathbf{H} \wedge ^{(3)}\mathbf{u})$$

5 La décomposition la plus simple et sans résidu d'une action répétée

5.1 Caractéristiques premières

La seconde matrice systématiquement antisymétrique de la théorie est la représentation de l'action répétée de la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ sur un élément de V_4 (représenté dans V_4^*), c'est-à-dire en fait d'une des décompositions sans résidu de cette action répétée :

$$[\odot(\mathbf{A})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t$$

Pour celle-ci se pose la question de la recevabilité de la relation :

$$[F_{(2,0)}(^{(3)}\mathbf{X}_2, ^{(3)}\mathbf{Y}_2)] = \left[\begin{array}{cc} 0 & \langle ^{(3)}\mathbf{X}_2 | \\ -| ^{(3)}\mathbf{X}_2 \rangle & [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{Y}_2) \end{array} \right] = [\odot(\mathbf{A})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t ?$$

Avec (voir la remarque 2.11, point 2) :

$$\begin{aligned} & |^{(3)}\mathbf{X}_2 \rangle \\ & = \\ & \left\langle \begin{array}{l} -\{A^2 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^2)^2\} - a^2 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^2)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2)\} \\ A^1 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^1)^2\} - a^1 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^1)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) \\ -\{A^1 \cdot A^2 \cdot \{(a^2)^2 - (a^1)^2\} - a^1 \cdot a^2 \cdot \{(A^2)^2 - (A^1)^2\} - (a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1)\} \end{array} \right\rangle \\ & |^{(3)}\mathbf{Y}_2 \rangle \\ & = \\ & \left\langle \begin{array}{l} A^0 \cdot A^1 \cdot \{(a^1)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^1 \cdot \{(A^1)^2 - (A^0)^2\} - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) \\ A^0 \cdot A^2 \cdot \{(a^2)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^2 \cdot \{(A^2)^2 - (A^0)^2\} - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \\ A^0 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^0)^2\} - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2) \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

Il convient bien entendu de tenir compte des acquis issus de la section précédente. Ainsi, l'étude va concerner ici l'action répétée :

$$\frac{1}{u^0} \cdot [^{(4)}\mathbf{u}, [^{(4)}\mathbf{u}, ^{(4)}\dots]]_{\mathbf{Rot} (^{(4)}\mathbf{A}_{EM})} \mathbf{Rot} (^{(4)}\mathbf{A}_{EM})$$

=

$$-[\odot(\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{u})]^t \cdot |^{(4)}... >$$

La décomposition sans résidu associée avec l'action répétée de la fonction étudiée (voir en remarque 2.11), si elle peut être identifiée à la représentation d'un champ EM (l'objectif de cette section), aura pour entrées des combinaisons linéaires de termes génériques du genre :

$$H_2^\alpha \cdot H_2^\beta \cdot u^\chi \cdot u^\delta$$

Et pour le cas où le potentiel EM est colinéaire à la quadri-vitesse :

$$H_2^\alpha \cdot H_2^\beta \cdot A_{EM}^\chi \cdot A_{EM}^\delta$$

En effet, puisqu'ici aussi il faut écrire :

$$a^0 \cdot {}^{(4)}\mathbf{A} = -\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM} \equiv (0, -{}^{(3)}\mathbf{H}_2), \text{ avec : } H^0 = 0 \text{ et } a^0 \neq 0$$

Et

$${}^{(4)}\mathbf{a} = {}^{(4)}\mathbf{u}$$

... les entrées de la matrice étudiée s'écrivent :

$$\begin{aligned} & m_{\alpha\beta}^{\chi\delta} \\ & = \\ & -\epsilon_{\alpha\beta} \cdot (a^\chi \cdot A^\delta - a^\delta \cdot A^\chi) \cdot \{(a^\alpha \cdot A^\alpha + a^\beta \cdot A^\beta) - (a^\chi \cdot A^\chi + a^\delta \cdot A^\delta)\} \\ & = \\ & -\epsilon_{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{(u^0)^2} \cdot (-u^\chi \cdot H^\delta + u^\delta \cdot H^\chi) \cdot \{-(u^\alpha \cdot H^\alpha + u^\beta \cdot H^\beta) + (u^\chi \cdot H^\chi + u^\delta \cdot H^\delta)\} \end{aligned}$$

Avec (rappel) :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = +1 \text{ si } \alpha < \beta, -1 \text{ si } \alpha > \beta, 0 \text{ si } \alpha = \beta$$

Grâce aux réflexions menées dans ce document, on peut commencer à se pencher sur les liens éventuels entre la théorie des produits de Lie déformés et les champs dits de Yang et Mills. Compte tenu de la difficulté inhérente à ce type de champs, ce sera là l'objet d'explorations qui seront développées ailleurs et plus tard.

6 Conclusion

L'étude de l'involution ne constitue pas en soi une nouveauté puisqu'on en retrouve des traces dans des travaux anciens, par exemple dans [05 ; 1904] en partie consacré à explorer les systèmes différentiels involutifs. Dans l'étude qui vient d'être menée, on s'est essentiellement intéressé à l'action de produits de Lie déformés par un vecteur $\mathbf{A}$ - résultat de l'anti-symétrisation et de l'anti-réduction d'un cube $\mathbf{A}$ de $\boxplus(4, \mathbb{C})$, typiquement $[\mathbf{a}, \dots]_{\mathbf{A}}$, et on a obtenu deux résultats concernant la décomposition sans résidu la plus simple de ces produits :

1°) Elle peut servir à définir les conditions faisant de ces produits des endomorphismes involutifs ;

2°) Pour la famille des produits $[\mathbf{u}, \dots]_{\mathbf{Rot-A}_{EM}}$ caractérisés par la paire $(^{(4)}\mathbf{u}, ^{(4)}\mathbf{Rot-A}_{EM})$ représentant la quadri-vitesse d'une particule et le vecteur $(0, ^{(3)}\mathbf{H})$, elle s'identifie avec la formulation deux fois contravariante d'un tenseur champ électromagnétique lorsque les arguments $(^{(3)}\mathbf{E}, ^{(3)}\mathbf{H})$ de ce champ respectent la loi de Lorentz pour les particules ne subissant aucune accélération : $^{(3)}\mathbf{E} = (1/u^0).(^{(3)}\mathbf{H} \wedge ^{(3)}\mathbf{u})$.

On pourra considérer que c'est là un modeste résultat pour un si long exercice. Pour autant, il me semble présenter l'avantage d'établir un lien relativement simple entre une discussion mathématique incluant potentiellement la notion d'algèbre de Lie et la pierre angulaire d'une discussion physique sur les champs électromagnétiques. La répétition de l'action de ce type de produits de Lie finalement déformés par des champs magnétiques peut éventuellement fournir un outil servant à décrire l'évolution des champs électromagnétiques. De futurs travaux auront à vérifier cette présomption.

Références

7 Bibliographie

7.1 Mes contributions

- [a] Discussion sur les décompositions des produits vectoriels déformés ; viXra:2405.0054, 40 pages.
- [b] The so-called Extrinsic Method; viXra:2406.0127, 12 pages.
- [d] Decomposing the Deformed tensor Products in a Four-Dimensional Space; viXra:2505.0003, 24 pages.
- [e] The Visages of the Lorentz-Einstein Law (subtitle: speculative analysis with the extrinsic method); viXra:2506.0057, 31 pages.

7.2 Oeuvres internationales

- [01] Maxwell, J.C.: A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155: 459–512; en anglais,
- [02] Descartes, R. : Le discours de la méthode, ...
- [03] A. Michelson and E. Morley: 'On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. Originally published in "The American Journal of Science", N° 203-November, 1887 (Editors James D. and Edward S. Dana; associated editors: Prof. A. Gray, J. P. Cooke and J. Trowbridge, of Cambridge, Prof. H.A. Newton and A. E. Verrill of New Haven; Prof. G. F. Barker of Philadelphia. Third series, Vol. XXXIV.- (Whole number, CXXXIV.)

- [04] Lennuier, R., Gal, P.-Y., Perrin, D. : Mécanique des particules, champs; collection U, ©librairie Armand Colin, Paris 1970, 363 pages.
- [05] Cartan, E. : Sur la structure des groupes infinis de transformations ; Annales scientifiques de l'É.N.S. 3ème série, tome 21 (1904), pp. 153-206.
- [06] Labarthe, J. J. : Electromagnétisme ; Cours de maîtrise et de magistère de physique, M7 : Champs et fluides, Interaction lumière - matière, Université Paris-Sud Orsay, version du 26 octobre 2006, 97 pages.
- [07] Lichnerowicz, A. : Théories de la gravitation (1955), © Editions Masson and Co.
- [08] Landau und Lifschitz: Lehrbuch des theoretischen Physik, Band II: Klassische Feldtheorie, 12., ueberarbeit. Aufl. ©Akademischer Verlag, Berlin, 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.