

Les produits de Lie déformés dans les espaces de dimension quatre

Sous-titre : Un regard sur les champs isotropes

©Thierry PERIAT

31 juillet 2025

USA-GB: In [a], it has been proved that the simplest decomposition without residual part of $f = [\mathbf{u}, \dots]_{\mathbf{Rot}\mathbf{A}(\mathbf{EM})}$ can be interpreted as the representation of a $(2, 0)$ version of some EM field in $M(4, \mathbb{C})$. This document (in the French language) is precisising the conditions of validity for this interpretation. It proves: (i) that isotropic EM fields are compatible with it; (ii) again, the existence of Lie algebras; (iii) that the passage between the simplest decomposition of f and the antisymmetric decomposition of $(f \circ f)$ (both without residual part) is an EM transition involving isotropic EM fields presumably linked with natural electromagnetic oscillations in Maxwell's vacuum. Since their effective nature remains to be identified, one is pushed to introduce the products $\star f = [\mathbf{k}, \dots]_{\mathbf{A}(\mathbf{EM})}$ where $\mathbf{k}$ is a wave vector whilst the generic deforming vector $\mathbf{A}$ now represents the EM potential $\mathbf{A}(\mathbf{EM})$. The simplest decomposition without residual part of $\star f$ represents the Hodge-transformed of the $(2, 0)$ version of an EM field.

Key words: Representations of EM fields, Lie algebras, evolution.

FR : Dans [a] on a montré que la décomposition sans résidu la plus simple de l'action de la fonction $f = [\mathbf{u}, \dots]_{\mathbf{Rot}\mathbf{A}(\mathbf{EM})}$ pouvait être une représentation matricielle de la version deux fois covariante d'un champ électromagnétique. Ce document précise les conditions de validité de cette interprétation physique. Il démontre que : (i) les champs isotropes la valident ; (ii) la fonction f permet de définir des algèbres de Lie ; (iii) le passage vers la représentation matricielle de la décomposition antisymétrique sans résidu de l'action de la fonction $(f \circ f)$ représente une transition électromagnétique et (iv) cette transition semble pouvoir être reliée aux oscillations naturelles des champs électromagnétiques (EM) dans le vide de Maxwell. Sa nature effective restant incertaine on est amené à introduire un nouveau produit de Lie déformé $\star f = [\mathbf{k}, \dots]_{\mathbf{A}(\mathbf{EM})}$ dans lequel $\mathbf{k}$ désigne un vecteur d'onde pendant que le vecteur déformant $\mathbf{A}$ s'identifie au potentiel électromagnétique $\mathbf{A}(\mathbf{EM})$. La représentation matricielle de la décomposition sans résidu la plus simple de l'action de la fonction $\star f$ est alors la transposée de Hodge de la version deux fois covariante d'un champ électromagnétique.

Mots clés : représentations des champs électromagnétiques, algèbres de Lie, évolution.

©by Thierry PERIAT: Les produits de Lie déformés dans les espaces de dimension quatre - Analyse de la proposition faite dans [a] : un regard sur les champs isotropes.

Contents

1	Rappels de données élémentaires	3
1.1	Cinq informations préalables essentielles	3
1.2	Énoncé formel des conditions nécessaires à doter V_4 d'une structure d'algèbre de Lie	7
1.3	Préliminaires à la définition d'une structure d'algèbre de Lie sur V_4	10
1.4	Calcul du Jacobiateur sur V_4 pour le produit de Lie déformé . . .	15
2	Applications physiques	28
2.1	Ensemble de champs EM formant une algèbre de Lie.	28
2.2	Les matrices anti-symétriques de la théorie	29
2.3	Analyse de la cinquième représentation d'un produit de Lie déformé par un vecteur - et répété, dans le cadre de l'interprétation faite dans [a]	30
2.4	Analyse des variantes 2 et 3 de la représentation de l'action répétée du produit de Lie déformé	37
2.5	Une autre interprétation physique pour la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$	38
3	Conclusions et perspectives	42
3.1	Conclusions	42
3.2	Perspectives	42
4	Bibliographie	43
4.1	Mes contributions	43
4.2	Oeuvres internationales	43

1 Rappels de données élémentaires

1.1 Cinq informations préalables essentielles

Trop heureux d'avoir établi un premier contact entre mathématique et physique dans [a], on a peut-être omis d'approfondir les conséquences de cette première victoire intellectuelle. Elle se caractérise par les informations suivantes :

1. Correction du point 2 de [a ; remarque 4.4, p. 28]:

Pour pouvoir introduire le quadripotentiel $\mathbf{A}_{EM}$ de manière classique [05 ; §§1.14 et 1.15, p.28 ; §1.16.1, p. 32], dans la démarche entreprise, *le point 2 de [a ; remarque 4.4, p. 28] doit être corrigé*. En effet, ces potentiels doivent impérativement satisfaire aux relations [05 ; §1.16.1, p. 32, (1.127)] pour lesquelles les dérivations partielles ne s'opèrent pas par rapport aux composantes de la quadrivitesse mais par rapport à un système de coordonnées événementielles ($x^0 = \text{c.t.}$, x^1 , x^2 , x^3) propre au référentiel dans lequel la discussion est tenue. De sorte que, dans le cadre de l'interprétation physique proposée dans [a] pour la représentation matricielle la plus simple et sans partie résiduelle du produit de Lie déformé $f = [\mathbf{u}, \dots]_{\mathbf{Rot} \mathbf{A}(\mathbf{EM})}$, l'introduction du quadripotentiel exige d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{EM}^\delta}{\partial x_\chi} - \frac{\partial A_{EM}^\chi}{\partial x_\delta} \\ = \\ \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{u^0} \cdot (u^\alpha \cdot \{^{(4)}\mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM}\}^\beta - u^\beta \cdot \{^{(4)}\mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM}\}^\alpha) \end{aligned}$$

Avec (rappel - voir [a]) :

$$u^0 \neq 0, A^0 = 0 \Rightarrow H^0 \Rightarrow {}^{(3)}\mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM} = {}^{(3)}\mathbf{H}$$

Ce qui invite à proposer :

$$\frac{\partial A_{EM}^\delta}{\partial x_\chi} = \epsilon_{\alpha\beta} \cdot \frac{u^\alpha}{u^0} \cdot \{^{(4)}\mathbf{Rot}^{(4)} \mathbf{A}_{EM}\}^\beta$$

Et ce qui se décline comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{EM}^0}{\partial x_0} &= 0, \frac{\partial A_{EM}^0}{\partial x_1} = \frac{u^2}{u^0} \cdot H^3, \frac{\partial A_{EM}^0}{\partial x_2} = \frac{u^3}{u^0} \cdot H^1, \frac{\partial A_{EM}^0}{\partial x_3} = \frac{u^1}{u^0} \cdot H^2 \\ \frac{\partial A_{EM}^1}{\partial x_0} &= \frac{u^3}{u^0} \cdot H^2, \frac{\partial A_{EM}^1}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial A_{EM}^1}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial A_{EM}^1}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial A_{EM}^2}{\partial x_0} &= \frac{u^1}{u^0} \cdot H^3, \frac{\partial A_{EM}^2}{\partial x_1} = -H^3, \frac{\partial A_{EM}^2}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial A_{EM}^2}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial A_{EM}^3}{\partial x_0} &= \frac{u^2}{u^0} \cdot H^1, \frac{\partial A_{EM}^3}{\partial x_1} = H^2, \frac{\partial A_{EM}^3}{\partial x_2} = -H^1, \frac{\partial A_{EM}^3}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

Cette déclinaison vérifie la condition de Lorentz [05 ; §1.1.3, p.7, (1.12) et §1.14, p.28, (1.102)] :

$$\text{div}_{\mathbf{x}}^{(4)} \mathbf{A} = 0$$

2. **Une interprétation seulement valable pour les régions où la force de Lorentz est nulle :**

Les situations physiques décrites par la proposition formulée dans [a] ne concernent que des zones de l'espace-temps non soumises à une accélération. Les champs électromagnétiques y obéissent à la version la plus classique et la plus simple de la loi de Lorentz [05 ; §1.1.1, p.6, (1.7)] :

$${}^{(3)}\mathbf{E} = \frac{1}{u^0} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{H} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u})$$

Par ailleurs il convient de se souvenir que les calculs réalisés dans [b ; corollaire 2.3, p.12] qui concernent les cubes antisymétriques et anti-réduits imposent de limiter le domaine de validité de l'interprétation faite dans [a] aux paires $({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H})$ dont les arguments sont perpendiculaires entre eux :

$${}^{(3)}\mathbf{E} \perp {}^{(3)}\mathbf{H} \iff \langle {}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H} \rangle_{Id_3} = 0$$

Cette exigence doit être réalisée même lorsque les champs impliqués ont des composantes dans $\mathbb{C}$. Les propriétés du produit vectoriel classique permettent d'affirmer que :

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{E}_{initial} \rangle_{Id_3} = 0$$

Et :

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{E}_{initial} \rangle_{Id_3} = 0$$

Par conséquent l'exigence issue des calculs réalisés dans [b] est bien respectée en proposant l'interprétation décrite dans [a].

3. **Une interprétation pouvant s'appliquer à un schéma "champ magnétique pur" :**

L'approche menée dans [a] peut aussi être validée lorsque $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ avec $u^0 \neq 0$ et quelle que soit la valeur de A^0 . Auquel cas (non envisagé dans [a]), le champ électrique est nul (${}^{(3)}\mathbf{E} = {}^{(3)}\mathbf{0}$) et on a *a priori* à faire à un champ magnétique quelconque ($\forall {}^{(3)}\mathbf{H}$).

4. **Une interprétation donnant un visage physique à la théorie des produits de Lie déformés :**

Le résultat important du document [a] se résume certainement au fait correspondre la représentation deux fois covariante d'un champ électromagnétique $({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H})$ respectant la loi de Lorentz dans un environnement où ne s'exerce aucune accélération à la fonction $f({}^{(4)}\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)}\mathbf{u})$; précisément :

$$f({}^{(4)}\mathbf{Rot}({}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)}\mathbf{u}))({}^{(4)}\dots) = \frac{1}{u^0} \cdot [{}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\dots]({}^{(4)}\mathbf{Rot}({}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}))$$

↓

$$\frac{1}{u^0} \cdot {}^{(4)}\mathbf{Rot}({}^{(4)}\mathbf{A}_{EM})\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) = [F_{(2,0)}({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H})]$$

Cette correspondance a pour image un élément dans $M(4, \mathbb{C})$ et pour source une fonction $f({}^{(4)}\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)}\mathbf{u})$ qui, elle-même, est en réalité un endomorphisme de V_4 et, plus exactement, une application linéaire agissant sur les éléments de V_4 . En ce sens, il n'est pas vraiment étonnant qu'elle ait une représentation matricielle.

Ce constat ouvre la porte à la définition d'une structure d'algèbre de Lie [02] pour une partie des éléments de V_4 et, par voie de conséquence, à l'introduction d'une dérivation interne sur cette partie-là.

5. Une interprétation entr'ouvrant une discussion en lien avec la théorie de Hodge :

L'exploration menée dans [a] a mis en évidence l'existence d'au moins deux représentations différentes d'une décomposition sans résidu des produits de Lie déformés par un élément de V_4 :

$${}^{(4)}\mathbf{A}\Phi({}^{(4)}\mathbf{a})$$

Et :

$$[P] = \langle {}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}, {}^{(4)}\mathbf{a})$$

La traduction de cette ambiguïté dans le cadre de la correspondance physique mise en évidence dans [a] introduit deux éléments de V_4 décrivant en principe le même champ électromagnétique ; à savoir celui déjà noté au point 4 ci-dessus mais et aussi :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u^0} \cdot \{ \langle {}^{(4)}\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)}\mathbf{u} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)}\mathbf{u}) \} \\ & = \\ & \frac{1}{u^0} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{H}, {}^{(3)}\mathbf{u} \rangle_{Id_3} \cdot Id_4 - \frac{1}{u^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 & H^1 \cdot u^0 & H^2 \cdot u^0 & H^3 \cdot u^0 \\ 0 & H^1 \cdot u^1 & H^2 \cdot u^1 & H^3 \cdot u^1 \\ 0 & H^1 \cdot u^2 & H^2 \cdot u^2 & H^3 \cdot u^2 \\ 0 & H^1 \cdot u^3 & H^2 \cdot u^3 & H^3 \cdot u^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On a déjà indiqué dans [a] la difficulté à expliquer cette ambiguïté dans la représentation d'un même champ EM. Mais à bien y regarder, ces deux représentations traduisent simplement le fait qu'il existe deux manières d'agir sur un vecteur donné pour obtenir in fine le même résultat, à savoir : l'expression d'un produit de Lie déformé agissant sur ce vecteur. Il n'y a là rien de vraiment extraordinaire. On remarque au passage que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u^0} \cdot \{ \langle {}^{(4)}\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)}\mathbf{u} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)}\mathbf{u}) \}^t \\ & = \\ & \frac{1}{u^0} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{H}, {}^{(3)}\mathbf{u} \rangle_{Id_3} \cdot Id_4 - \frac{1}{u^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ H^1 \cdot u^0 & H^1 \cdot u^1 & H^1 \cdot u^2 & H^1 \cdot u^3 \\ H^2 \cdot u^0 & H^2 \cdot u^1 & H^2 \cdot u^2 & H^2 \cdot u^3 \\ H^3 \cdot u^0 & H^3 \cdot u^1 & H^3 \cdot u^2 & H^3 \cdot u^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{u^0} \cdot \{ \langle {}^{(4)} \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)} \mathbf{u} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)} \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)} \mathbf{u}) \} \\
 & - \frac{1}{u^0} \cdot \{ \langle {}^{(4)} \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)} \mathbf{u} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)} \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)} \mathbf{u}) \}^t \\
 & = \\
 & \frac{1}{u^0} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ H^1 \cdot u^0 & H^1 \cdot u^1 & H^1 \cdot u^2 & H^1 \cdot u^3 \\ H^2 \cdot u^0 & H^2 \cdot u^1 & H^2 \cdot u^2 & H^2 \cdot u^3 \\ H^3 \cdot u^0 & H^3 \cdot u^1 & H^3 \cdot u^2 & H^3 \cdot u^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & H^1 \cdot u^0 & H^2 \cdot u^0 & H^3 \cdot u^0 \\ 0 & H^1 \cdot u^1 & H^2 \cdot u^1 & H^3 \cdot u^1 \\ 0 & H^1 \cdot u^2 & H^2 \cdot u^2 & H^3 \cdot u^2 \\ 0 & H^1 \cdot u^3 & H^2 \cdot u^3 & H^3 \cdot u^3 \end{bmatrix} \right\} \\
 & = \\
 & \frac{1}{u^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -H^1 \cdot u^0 & -H^2 \cdot u^0 & -H^3 \cdot u^0 \\ H^1 \cdot u^0 & 0 & H^1 \cdot u^2 - H^2 \cdot u^1 & H^1 \cdot u^3 - H^3 \cdot u^1 \\ H^2 \cdot u^0 & H^2 \cdot u^1 - H^1 \cdot u^2 & 0 & H^2 \cdot u^3 - H^3 \cdot u^2 \\ H^3 \cdot u^0 & H^3 \cdot u^1 - H^1 \cdot u^3 & H^3 \cdot u^2 - H^2 \cdot u^3 & 0 \end{bmatrix} \\
 & =^1 \\
 & \begin{bmatrix} 0 & -H^1 & -H^2 & -H^3 \\ H^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ H^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ H^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \\
 & \begin{bmatrix} 0 & -\langle {}^{(3)} \mathbf{H} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{H} \rangle & -[J] \Phi({}^{(3)} \mathbf{E}) \end{bmatrix} \\
 & =^2 \\
 & -[\star F(2, 0)]
 \end{aligned}$$

Lemme 1.1. *Représentation alternative de la décomposition sans résidu et théorie de Hodge.*

La différence entre la représentation alternative de la décomposition sans résidu et sa transposée vaut moins une fois le transformé de Hodge (symbole $\star$ en amont de l'objet sur lequel il opère) de la représentation sans résidu la plus simple. Les propos exposés permettent de proposer le schéma logique suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 f = \frac{1}{u^0} \cdot [\mathbf{u}, \dots] \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM} & \xrightarrow{\text{decomp. simple}} & \frac{1}{u^0} \cdot {}^{(4)} \mathbf{Rot} {}^{(4)} \mathbf{A}_{EM} \Phi({}^{(4)} \mathbf{u}) \\
 \downarrow \text{autre décomposition} & & \downarrow = \\
 [P(f)] & & [F(2, 0)] \\
 \downarrow \text{antisymétrisation} & & \downarrow \star \\
 [P(f)]^t - [P(f)] & \xleftarrow{=} & [\star F(2, 0)]
 \end{array}$$

¹ A cause de l'information contenue au point 2 de la sous-section 1.2 ci-dessus.

² Preuve dans [05 ; p.29, (1.108)]

1.2 Énoncé formel des conditions nécessaires à doter V_4 d'une structure d'algèbre de Lie

Avec :

$$[P(f)] = \frac{1}{u^0} \cdot \{ <^{(4)} \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)} \mathbf{u} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)} \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM}, {}^{(4)} \mathbf{u}) \}$$

On peut donc dire que, dans cette théorie et pour ce qui concerne le vide de Maxwell, l'action de l'opérateur $\star$ de Hodge sur la décomposition sans résidu la plus simple est équivalente à une action d'anti-symétrisation de la représentation alternative à la décomposition sans résidu la plus simple.

Ces informations invitent à se demander ce qui se passe lorsque :

- l'action du produit de Lie déformé est répétée ?
- on tente d'incorporer la géométrie et ses variations dans cette construction théorique impliquant trois théories : celle de Maxwell [06], celle de Lie [02], et celle de Hodge [03] ?

1.2 Énoncé formel des conditions nécessaires à doter V_4 d'une structure d'algèbre de Lie

Arrivé à ce stade, on ne peut échapper à la recherche des conditions qui feraient de V_4 une algèbre de Lie. Pour y parvenir, il convient de rappeler une :

Définition 1.1. *Le Jacobiateur*

Ce concept apparaît indirectement dans toutes les références scientifiques rappelant les conditions définissant une algèbre de Lie. Il désigne une combinaison impliquant les éléments des sous-ensembles de cardinal trois d'un ensemble E muni d'un produit interne π ; soit $\{a, b, c\}$ un de ces sous-ensembles dans lequel un élément peut être répété, le Jacobiateur de ce sous-ensemble vaut par définition :

$$J_\pi(a, b, c) = \pi(a, \pi(b, c)) + \pi(b, \pi(c, a)) + \pi(c, \pi(a, b))$$

Exemple 1.1. *Le Jacobiateur pour les éléments de V_4 .*

L'étude des produits de Lie déformés par un cube A et agissant sur les éléments de V_4 offre une illustration immédiate de ce concept.

$$\pi = f(A, \mathbf{a}) = [\mathbf{a}, \dots]_A$$

$$J_{f(A, \mathbf{a})}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_A]_A + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_A]_A + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_A]_A$$

On remarque que le calcul d'un jacobiateur impose d'étudier la répétition de l'action du produit qu'on a sous la main.

Définition 1.2. *Algèbre de Lie sur le corps des nombres complexes, $\mathbb{C}$.*

On dira qu'une algèbre de Lie sur le corps des nombres complexes, $\mathbb{C}$, est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V muni d'une application bilinéaire interne, souvent notée $[\dots, \dots]$, telle que $V \times V \rightarrow V$:

$$\forall a \in V : [a, a] = 0_V$$

$$\forall a, b, c \in V : J_{[\dots, \dots]}(a, b, c) = 0_V$$

Exemple 1.2. *Les conditions nécessaires à faire de V_4 une algèbre de Lie.*

Pour commencer, il n'y a pas de doute sur le fait que $\mathbb{C} \otimes E(4, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension quatre bâti sur le corps des nombres complexes (Les vecteurs de cet ensemble ont quatre composantes dans $\mathbb{C}$). En l'équipant, *en plus*, d'un produit de Lie déformé par un quelconque cube A dont les noeuds sont des éléments de $\mathbb{C}$, on ne change rien à la structure de cet espace mais on le dote d'une application bilinéaire interne. Ce qui offre l'opportunité de découvrir une structure d'algèbre de Lie pour certains de ses sous-espaces vectoriels. Qu'en-est-il ?

La première condition nécessaire à définir une algèbre de Lie force l'application bilinéaire à être anti-symétrique. Il se trouve que dans la théorie étudiant les produits tensoriels déformés, tensoriels alternés déformés et de Lie déformés, ces derniers sont systématiquement des opérations bilinéaires anti-symétriques. ceci tient au fait qu'ils sont bâtis à l'aide de cubes anti-symétriques et que leur définition générique est (pour les détails, relire [a ; définition 2.2, pp. 4-5]) :

$$A \in \boxplus^-(4, \mathbb{C}), \forall {}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b} \in V_4 :$$

$$[{}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b}]_A = \sum_{\chi} \sum_{\alpha < \beta} A_{\alpha\beta}^{\chi} \cdot (a^{\alpha} \cdot b^{\beta} - a^{\beta} \cdot b^{\alpha}) \cdot \mathbf{e}_{\chi}$$

Elle implique obligatoirement :

$$A \in \boxplus^-(4, \mathbb{C}), \forall {}^{(4)}\mathbf{a} \in V_4 : [{}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{a}]_A = \mathbf{0}_{V_4}$$

Et la première condition nécessaire à faire de V_4 une algèbre de Lie est toujours vérifiée.

Concernant la seconde condition nécessaire, de longs et pénibles calculs attendent le mathématicien puisqu'il faut caractériser les conséquences résultant de la relation :

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_A]_A + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_A]_A + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_A]_A = \mathbf{0}_{V_4}$$

Les calculs menés dans [a ; §2.5, pp. 13-14] trouvent ici un intérêt certain ; particulièrement ceux s'appliquant aux cubes anti-symétriques et anti-réduits. Pour ceux-là, la seconde condition nécessaire à faire de V_4 une algèbre de Lie s'écrit :

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_A]_A + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_A]_A + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_A]_A = \mathbf{0}_{V_4}$$

Définition 1.3. *Territoire de Jacobi dans un espace vectoriel.*

Par définition, un territoire de Jacobi dans un espace vectoriel est un triplé ordonné (a, b, c) d'éléments dans cet espace dont le Jacobiateur pour un produit π donné est nul.

Remarque 1.1. Sur l'application physique des conditions nécessaires à faire de V_4 une algèbre de Lie lorsque le cube déformant est assimilable à un vecteur.

Les résultats physiques acquis dans [a] invitent à introduire le Jacobiateur :

$$\begin{aligned}
 & J_{f^{(4)}\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}, (4)\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \\
 &= \\
 & \frac{1}{u_1^0} \cdot \frac{1}{u_2^0} \cdot [\mathbf{u}_1, [\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \\
 &+ \frac{1}{u_2^0} \cdot \frac{1}{u_3^0} \cdot [\mathbf{u}_2, [\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \\
 &+ \frac{1}{u_3^0} \cdot \frac{1}{u_1^0} \cdot [\mathbf{u}_3, [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}
 \end{aligned}$$

Il lie trois quadri-vitesses dans un potentiel électromagnétique commun. On dispose dès à présent de quelques indices pour mieux le décrypter :

1. Si deux des quadri-vitesses sont égales, par exemple $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$, alors le Jacobiateur s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & J_{f^{(4)}\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}, (4)\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \\
 &= \\
 & \frac{1}{u_1^0} \cdot \frac{1}{u_2^0} \cdot [\mathbf{u}_1, \underbrace{[\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}}_{=0}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \\
 &+ \frac{1}{u_2^0} \cdot \frac{1}{u_2^0} \cdot [\mathbf{u}_2, [\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \\
 &+ \frac{1}{u_2^0} \cdot \frac{1}{u_1^0} \cdot [\mathbf{u}_2, [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \\
 &= \\
 & \frac{1}{u_2^0} \cdot \left(\frac{1}{u_2^0} - \frac{1}{u_1^0} \right) \cdot [\mathbf{u}_2, [\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}
 \end{aligned}$$

Et on remarque que ce Jacobiateur s'annule lorsque :

$$u_1^0 = u_2^0$$

Il existe donc des triplés de quadri-vitesses dont deux sont identiques qui, en présence d'un champ magnétique commun, constituent un territoire de Jacobi.

2. Si les trois quadri-vitesses ont la même composante de label *zéro* ($u_1^0 = u_2^0 = u_3^0$), alors on peut ne pas tenir compte de cette composante dans l'écriture de la seconde condition. Par ailleurs, on démontre sans difficulté que si trois quadri-vitesses ont la même composante de label *zéro* tout en formant un triangle fermé et cyclique, alors le Jacobiateur de ces trois vitesses est nul :

$$u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 \text{ et } \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$J_{f((4)\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}, (4)\mathbf{u})}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \mathbf{0}$$

Il existe donc des triplés de quadri-vitesses qui, en présence d'un champ magnétique commun, constituent un territoire de Jacobi.

On notera en passant à cet endroit que ces quelques données élémentaires invitent à se demander s'il est possible de doter un champ de vitesses d'une structure d'algèbre de Lie. Une réponse affirmative à ce questionnement ouvre la voie à diverses applications en thermodynamique, classique, relativiste ou quantique.

1.3 Préliminaires à la définition d'une structure d'algèbre de Lie sur V_4

Remarque 1.2. *Données préliminaires au calcul.*

Sur les résultats acquis dans les espaces de dimension trois

On a déjà eu l'occasion de faire ce calcul sur V_3 et d'en constater la longueur. Il a cependant été récompensé par la découverte d'informations intéressantes. La démonstration a notamment apporté la preuve de l'existence de deux types d'algèbres de Lie. L'une d'elles dépend exclusivement de conditions explicites sur les noeuds du cube déformant. L'autre implique uniquement des territoires de Jacobi constitués de vecteurs orthogonaux entre eux et isotropes au sens donné à cet adjectif par E. Cartan dans son travail introduisant les spineurs [04 ; I, §1, p.3]. On est donc curieux de savoir si cette partition existe aussi pour V_4 .

Sur la multiplicité des représentations

Le travail précédent a subrepticement introduit un terrible doute technique concernant les représentations dans $M(4, \mathbb{C})$ du calcul d'un produit de Lie déformé agissant deux fois de suite sur un élément donné de V_4 . En effet, dans le cas d'un cube A ramené à un élément $\mathbf{A}$ de V_4 , cinq visages ont pu être proposés pour représenter cette action répétée [a ; remarque 2.11] :

1.

$$\{\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})\}^2$$

2.

$$\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a}) \cdot \{< \mathbf{A}, \mathbf{a} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(\mathbf{A}, \mathbf{a})\}$$

3.

$$\{< \mathbf{A}, \mathbf{a} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(\mathbf{A}, \mathbf{a})\} \cdot \mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$$

4.

$$\{< \mathbf{A}, \mathbf{a} >_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)(\mathbf{A}, \mathbf{a})\}^2$$

5.

$$[\odot(\mathbf{A})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t$$

Ce constat ouvre un débat compliqué et pour le moment sans explication, ni réponse. Il n'empêche pas de réaliser le calcul brut à la main. Ce qui a été fait au niveau de [a ; §2.5]. Il mène à la cinquième représentation alors que les quatre autres résultent de la double représentation possible d'une action simple, non répété.

On note en passant que :

- (i) ces cinq représentations sont nulles lorsque $\mathbf{a} = \mathbf{A}$;
- (ii) la première est une matrice symétrique ;
- (iii) la cinquième est une matrice anti-symétrique, d'où l'interrogation consistant à se demander si elle peut représenter un champ électromagnétique : c'est l'objet de ce document ;
- (iv) lorsque $\mathbf{a} \perp \mathbf{A}$: la quatrième représentation est nulle et le déterminant de la première est nul [b ; exemple 2.1, pp.9-10].

Remarque 1.3. *Rappel du calcul fait dans [a ; §2.5].*

On a déjà montré que :

$$\begin{aligned}
 & \forall \epsilon \in Ind_4 \\
 & \{[\mathbf{a}, \underbrace{[\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_{(4 \times 6)[A]}}_{= \mathbf{x}_1}]_{(4 \times 6)[A]}\}^\epsilon \\
 & = \\
 & \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot (a^\chi \cdot x_1^\delta - a^\delta \cdot x_1^\chi) \\
 & = \\
 & \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot \{a^\chi \cdot \{\sum_{\alpha < \beta} A_{\alpha\beta}^\delta \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha)\} - a^\delta \cdot \{\sum_{\alpha < \beta} A_{\alpha\beta}^\chi \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha)\}\} \\
 & = \\
 & \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot \sum_{\alpha < \beta} \underbrace{(a^\chi \cdot A_{\alpha\beta}^\delta - a^\delta \cdot A_{\alpha\beta}^\chi)}_{= T_{\chi\delta\alpha\beta}} \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \\
 & = \\
 & \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot \sum_{\alpha < \beta} T_{\chi\delta\alpha\beta} \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha)
 \end{aligned}$$

Dans un espace de dimension quatre, les paires (α, β) telles que $\alpha < \beta$ sont les suivantes : $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ and $(2, 3)$. On peut évidemment les indiquer avec les éléments de l'ensemble Ind_6 :

$$\{\forall \alpha, \beta \in \text{Ind}_4 \mid \alpha < \beta\} \Rightarrow \{\exists \mu \in \text{Ind}_6 \mid \mu \equiv (\alpha, \beta)\}$$

Le calcul se poursuit donc avec :

$$\begin{aligned} & \{[\mathbf{a}, \mathbf{x}_1]_{(4 \times 6)[A]}\}^\epsilon \\ &= \\ & \sum_{\mu \in \text{Ind}_6} A_\mu^\epsilon \cdot \sum_{\alpha < \beta} T_{\mu\alpha\beta} \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \\ &= \\ & \sum_{\alpha < \beta} \sum_{\mu \in \text{Ind}_6} \underbrace{A_\mu^\epsilon \cdot T_{\mu\alpha\beta}}_{= B_{\alpha\beta}^\epsilon} \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \\ &= \\ & \sum_{\alpha < \beta} B_{\alpha\beta}^\epsilon \cdot (a^\alpha \cdot x_0^\beta - a^\beta \cdot x_0^\alpha) \\ &= \\ & \{[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\mathbf{x}_0)]_{B((4 \times 6)[A], ^{(4)}\mathbf{a})}\}^\epsilon \end{aligned}$$

La répétition de l'action de la fonction qu'on a sous la main est encore un produit de Lie mais il est cette fois-ci déformé par un cube B défini par :

$$B_{\alpha\beta}^\epsilon((4 \times 6)[A], ^{(4)}\mathbf{a}) = \sum_{\chi < \delta} A_{\chi\delta}^\epsilon \cdot (a^\chi \cdot A_{\alpha\beta}^\delta - a^\delta \cdot A_{\alpha\beta}^\chi)$$

L'antisymétrie du cube déformant A se répercute sur ce cube B (preuve évidente). Il résulte de ces considérations que le cube B est aussi un élément de $\boxplus^-(4, \mathbb{C})$ et qu'il se laisse représenter par un élément [B] de $M(4 \times 6, \mathbb{C})$. On peut donc légitimement écrire :

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_{(4 \times 6)[A]}]_{(4 \times 6)[A]} = [\mathbf{a}, \mathbf{x}_0]_{(4 \times 6)[B]}$$

Il résulte de la confrontation entre ce calcul et :

1. le point 1 de la remarque 1.1 faite ci-dessus que les triplés $(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{x}_0)$ sont des territoires de Jacobi.
2. les propos tenus dans [a] sur l'involution que le vecteur $\mathbf{a}$ se comporte comme un neutre à gauche pour le vecteur $\mathbf{x}_0$ dans $V_4([B]) = \{\mathbb{C} \otimes E(4, \mathbb{R}), B \in \boxplus^-(\mathbb{C})\}$ lorsque la fonction $[(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\dots)]_{\mathbf{A}}$ est involutive dans $V_4([A]) = \{\mathbb{C} \otimes E(4, \mathbb{R}), A \in \boxplus^-(\mathbb{C})\}$.

Remarque 1.4. *Traduction physique de l'involution.*

Il n'y a là rien de nouveau pour un mathématicien. Le physicien cherchant à traduire ces propos dans la théorie de l'électromagnétisme va devoir calculer le carré d'une matrice représentant un champ EM puisque l'involution se traduit ici par :

$$\left\{ \frac{1}{u^0} \cdot {}^{(4)}\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM} \Phi^{(4)}(\mathbf{u}) \right\}^2 = \{[F_{(2,0)}({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H})]\}^2 = Id_4$$

Or la règle de multiplication des matrices s'écrit (rappel) :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & \langle \mathbf{N}_1 | \\ | \mathbf{O}_1 \rangle & [C_1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_2 & \langle \mathbf{N}_2 | \\ | \mathbf{O}_2 \rangle & [C_2] \end{bmatrix} \\ &= \\ & \begin{bmatrix} m_1 \cdot m_2 + \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{O}_2 \rangle_{Id_3} & m_1 \cdot \langle \mathbf{N}_2 | + \langle \mathbf{N}_1 | \cdot [C_2] \\ m_2 \cdot | \mathbf{O}_1 \rangle + [C_1] \cdot | \mathbf{O}_2 \rangle & T_2(\otimes)(\mathbf{O}_1, \mathbf{N}_2) + [C_1] \cdot [C_2] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant :

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 0 \\ \mathbf{N}_1 &= \mathbf{N}_2 = \mathbf{E} \\ \mathbf{O}_1 &= \mathbf{O}_2 = -\mathbf{E} \\ [C_1] &= [C_2] = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{H}) \end{aligned}$$

On constate que :

$$\begin{aligned} & \{[F_{(2,0)}({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H})]\}^2 \\ &= \\ & \begin{bmatrix} -\langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle_{Id_3} & \langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} | \\ | \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \rangle & \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle_{Id_3} \cdot Id_3 - \{T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{E}) + T_2(\otimes)(\mathbf{H}, \mathbf{H})\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Parce que (explications du résultat précédent) :

$$\begin{aligned} & {}_{[J]}\Phi(\mathbf{H}) \cdot | \mathbf{E} \rangle \\ &= \\ & \begin{bmatrix} 0 & -H^3 & H^2 \\ H^3 & 0 & -H^1 \\ -H^2 & H^1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{bmatrix} \\ &= \\ & \begin{bmatrix} H^2 \cdot E^3 - H^3 \cdot E^2 \\ H^3 \cdot E^1 - H^1 \cdot E^3 \\ H^1 \cdot E^2 - H^2 \cdot E^1 \end{bmatrix} \\ &= \\ & | \mathbf{H} \wedge \mathbf{E} \rangle \end{aligned}$$

De manière similaire mais à un signe moins près à cause de la transposition :

$$\langle \mathbf{E} | \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{H}) = \langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} |$$

Et :

$$\begin{aligned} \{[_J]\Phi(\mathbf{H})\}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -H^3 & H^2 \\ H^3 & 0 & -H^1 \\ -H^2 & H^1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -H^3 & H^2 \\ H^3 & 0 & -H^1 \\ -H^2 & H^1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \\ &< \mathbf{H}, \mathbf{H} >_{Id_3} \cdot Id_3 - T_2(\otimes)(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \end{aligned}$$

On constate d'abord que le carré de la matrice représentant le champ électromagnétique fait apparaître (i) le vecteur de Poynting [01 ; § 31, p. 90, (31,2)], (ii) le tenseur des tensions électromagnétiques de Maxwell [01 ; § 33, p.97, (33,3)] et (iii) des scalaires qui pourraient être les représentations normalisées de l'énergie électromagnétique (par unité de volume) lorsque la portion électrique est égale à la portion magnétique [01 ; § 31, p. 90, (31,5)]. Ce carré matriciel a donc une très grande proximité avec une représentation du tenseur impulsion-énergie associé avec le champ électromagnétique étudié [01 ; § 32].

Immédiatement après ces observations on comprend que l'involution mathématique ne pourra se réaliser que lorsque :

$$\mathbf{E} = i \cdot \mathbf{H}, i^2 + 1 = 0$$

$$< \mathbf{H}, \mathbf{H} >_{Id_3} = 1$$

En effet, dans ce cas :

$$\begin{aligned} &\{[F_{(2,0)}({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H})]\}^2 \\ &= \\ &\left[\begin{array}{cc} -\underbrace{\langle i \cdot \mathbf{H}, i \cdot \mathbf{H} \rangle_{Id_3}}_{=-1} & \underbrace{\langle i \cdot \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \rangle}_{=0} \\ |i \cdot \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \rangle & \underbrace{\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle_{Id_3}}_{=1} \cdot Id_3 - \underbrace{\{T_2(\otimes)(i \cdot \mathbf{H}, i \cdot \mathbf{H}) + T_2(\otimes)(\mathbf{H}, \mathbf{H})\}}_{=[0]} \end{array} \right] \\ &= \\ &Id_3 \end{aligned}$$

Autrement dit, le champ électrique doit valoir i fois le champ magnétique. La réalisation de cette condition implique :

$$< \mathbf{E}, \mathbf{E} >_{Id_3} + < \mathbf{H}, \mathbf{H} >_{Id_3} = 0$$

Elle est donc une des situations traitées dans [10 ; §10, p.21, b)] ; ce qui suggère que l'involution mathématique ne concerne que des phénomènes physiques dont l'énergie électromagnétique par unité de volume est nulle. On se demande alors ce qui peut bien expliquer leur propagation dans les régions vides de l'univers ? On pense d'abord aux champs de gravitation mais le point 2 du § 1.1 en début de document suggère immédiatement que cette intuition est trompeuse. Néanmoins, pour en avoir le coeur net, on va se poser la question :

Remarque 1.5. *Y-a-t-il un lien entre la répétition de l'action de la fonction ... et l'existence d'une courbure ?*

La répétition de l'action de la fonction f fait apparaître un objet mathématique dont on peut intuitivement se demander s'il représente un tenseur de courbure (Riemann-Christoffel par exemple) ?

Cette question vise ici précisément la matrice $[T]$; voir sa définition dans [a ; remarque 2.9]. Elle contient 36 entrées lorsque le cube A est seulement anti-symétrique ; elle n'en contient plus que $\{(2 \times 12) + 6\} = 30$ lorsque le cube est (anti-symétrique et anti-réduit, donc) ramené à un vecteur A de V_4 [a ; exemple 2.2]. Dans ces deux cas, le nombre d'entrées est plus grand que 20, le nombre de composantes d'un tenseur de courbure de Riemann-Christoffel dans un espace de dimension quatre.

Quelles propriétés aurait l'hypercube T dont la matrice $[T]$ serait une représentation condensée ? Cet hypercube aurait pour hyper-noeuds les :

$$T_{\chi\delta\alpha\beta} = a^\chi \cdot A_{\alpha\beta}^\delta - a^\delta \cdot A_{\alpha\beta}^\chi$$

Avec un cube A dont les indices seraient seulement assujettis à appartenir à Ind_4 :

$$\forall \chi, \delta, \alpha, \beta \in Ind_4$$

Autrement dit, les relations d'ordre imposées aux paires d'indices n'auraient plus cours. Dans ce contexte, l'hypercube aurait a priori $4^4 = 256$ hyper-noeuds. Par contre, au cas où le cube A serait anti-symétrique, on constaterait que les hyper-noeuds de cet hyper-cube auraient les propriétés suivantes :

$$T_{\chi\delta\beta\alpha} = a^\chi \cdot A_{\beta\alpha}^\delta - a^\delta \cdot A_{\beta\alpha}^\chi = a^\delta \cdot A_{\alpha\beta}^\chi - a^\chi \cdot A_{\alpha\beta}^\delta = -T_{\chi\delta\alpha\beta}$$

$$T_{\chi\delta\alpha\alpha} = T_{\chi\chi\beta\alpha} = 0_{\mathbb{C}}$$

$$T_{\delta\chi\alpha\beta} = a^\delta \cdot A_{\alpha\beta}^\chi - a^\chi \cdot A_{\alpha\beta}^\delta = -T_{\chi\delta\alpha\beta}$$

Elles sont communes avec quelques-unes des propriétés des composantes d'un tenseur de courbure de Riemann-Christoffel [01 ; §92, p. 312, (92,2)]. Mais les similitudes s'arrêtent là.

1.4 Calcul du Jacobiateur sur V_4 pour le produit de Lie déformé

Remarque 1.6. *Les calculs proprement dits.*

Muni de toutes ces informations préalables, on comprend qu'il n'est pas possible d'échapper au calcul long et difficile des produits de Lie déformés répétés. Au détail technique important près que la matrice $[A]$ est ici un élément de $M(4 \times 6, \mathbb{C})$ et non pas de $M(4, \mathbb{C})$, il commence comme dans les espaces de dimension trois avec :

$$[a, [b, c]_{[A]}]_{[A]}$$

=

$$[\mathbf{a}, A_{jk}^n \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) \cdot \mathbf{e}_n]_{[A]}$$

=

$$A_{mn}^i \cdot (a^m \cdot A_{jk}^n \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) - a^n \cdot A_{jk}^m \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j)) \cdot \mathbf{e}_i$$

Avec l'aide de permutations cycliques on obtient de manière similaire :

$$[\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]} = A_{mn}^i \cdot (b^m \cdot A_{jk}^n \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) - b^n \cdot A_{jk}^m \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j)) \cdot \mathbf{e}_i$$

$$[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]} = A_{mn}^i \cdot (c^m \cdot A_{jk}^n \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j) - c^n \cdot A_{jk}^m \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)) \cdot \mathbf{e}_i$$

Et on peut écrire une première mouture du Jacobiateur :

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_{[A]}]_{[A]} + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]} + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]}$$

=

$$\begin{aligned} & \{A_{mn}^i \cdot A_{jk}^n \cdot a^m \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) - A_{mn}^i \cdot A_{jk}^m \cdot a^n \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \\ & + \{A_{mn}^i \cdot A_{jk}^n \cdot b^m \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) - A_{mn}^i \cdot A_{jk}^m \cdot b^n \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \\ & + \{A_{mn}^i \cdot A_{jk}^n \cdot c^m \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j) - A_{mn}^i \cdot A_{jk}^m \cdot c^n \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

=

$$\begin{aligned} & A_{mn}^i \cdot A_{jk}^n \cdot \{a^m \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) + b^m \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) + c^m \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \\ & - A_{mn}^i \cdot A_{jk}^m \cdot \{a^n \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) + b^n \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) + c^n \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

C'est l'endroit où, en théorie, on peut choisir entre deux chemins :

- (i) le calcul in extenso ou
- (ii) la mise en évidence d'un schéma.

Pour rappel, le calcul du Jacobiateur dans un espace de dimension trois s'est opéré selon la variante (i) et elle semble malheureusement être la seule permettant de calculer le Jacobiateur. On va tout de même chercher à la perfectionner un peu en repérant toutes les combinaisons (m, j, k) et (n, j, k) s'annulant d'elles-mêmes lorsque m et n prennent les valeurs 0, 1, 2, 3 pendant que les paires (j, k) avec j < k prennent les valeurs (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3).

Précisément pour m = 0 :

$$\begin{aligned} & a^0 \cdot (b^0 \cdot c^1 - b^1 \cdot c^0) + b^0 \cdot (c^0 \cdot a^1 - c^1 \cdot a^0) + c^0 \cdot (a^0 \cdot b^1 - a^1 \cdot b^0) = 0 \\ & a^0 \cdot (b^0 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^0) + b^0 \cdot (c^0 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^0) + c^0 \cdot (a^0 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^0) = 0 \\ & a^0 \cdot (b^0 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^0) + b^0 \cdot (c^0 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^0) + c^0 \cdot (a^0 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^0) = 0 \\ & a^0 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^0 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^0 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) \\ & a^0 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^0 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^0 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ & a^0 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^0 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^0 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire symboliquement :

$$\begin{aligned}
 A_{0n}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^n \cdot \{a^0 \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) + b^0 \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) + c^0 \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \\
 = \\
 A_{0n}^i \cdot \{A_{12}^n \cdot (0, 1, 2) + A_{23}^n \cdot (0, 2, 3) + A_{13}^n \cdot (0, 1, 3)\}
 \end{aligned}$$

Pour $m = 1$:

$$\begin{aligned}
 a^1 \cdot (b^0 \cdot c^1 - b^1 \cdot c^0) + b^1 \cdot (c^0 \cdot a^1 - c^1 \cdot a^0) + c^1 \cdot (a^0 \cdot b^1 - a^1 \cdot b^0) &= 0 \\
 a^1 \cdot (b^0 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^0) + b^1 \cdot (c^0 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^0) + c^1 \cdot (a^0 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^0) \\
 a^1 \cdot (b^0 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^0) + b^1 \cdot (c^0 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^0) + c^1 \cdot (a^0 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^0) \\
 a^1 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^1 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) &= 0 \\
 a^1 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^1 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\
 a^1 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^1 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) &= 0
 \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire symboliquement :

$$\begin{aligned}
 A_{1n}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^n \cdot \{a^1 \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) + b^1 \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) + c^1 \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \\
 = \\
 A_{1n}^i \cdot \{A_{02}^n \cdot (1, 0, 2) + A_{03}^n \cdot (1, 0, 3) + A_{23}^n \cdot (1, 2, 3)\} \\
 = \\
 A_{1n}^i \cdot \{-A_{02}^n \cdot (0, 1, 2) - A_{03}^n \cdot (0, 1, 3) + A_{23}^n \cdot (1, 2, 3)\}
 \end{aligned}$$

Pour $m = 2$:

$$\begin{aligned}
 a^2 \cdot (b^0 \cdot c^1 - b^1 \cdot c^0) + b^2 \cdot (c^0 \cdot a^1 - c^1 \cdot a^0) + c^2 \cdot (a^0 \cdot b^1 - a^1 \cdot b^0) \\
 a^2 \cdot (b^0 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^0) + b^2 \cdot (c^0 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^0) + c^2 \cdot (a^0 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^0) &= 0 \\
 a^2 \cdot (b^0 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^0) + b^2 \cdot (c^0 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^0) + c^2 \cdot (a^0 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^0) \\
 a^2 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^2 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) &= 0 \\
 a^2 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^2 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) &= 0 \\
 a^2 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^2 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1)
 \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire symboliquement :

$$\begin{aligned}
 A_{2n}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^n \cdot \{a^2 \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) + b^2 \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) + c^2 \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \\
 = \\
 A_{2n}^i \cdot \{A_{01}^n \cdot (2, 0, 1) + A_{03}^n \cdot (2, 0, 3) + A_{13}^n \cdot (2, 1, 3)\} \\
 =
 \end{aligned}$$

$$A_{2n}^i \cdot \{A_{01}^n \cdot (0, 1, 2) - A_{03}^n \cdot (0, 2, 3) - A_{13}^n \cdot (1, 2, 3)\}$$

Pour $m = 3$:

$$\begin{aligned} & a^3 \cdot (b^0 \cdot c^1 - b^1 \cdot c^0) + b^3 \cdot (c^0 \cdot a^1 - c^1 \cdot a^0) + c^3 \cdot (a^0 \cdot b^1 - a^1 \cdot b^0) \\ & a^3 \cdot (b^0 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^0) + b^3 \cdot (c^0 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^0) + c^3 \cdot (a^0 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^0) \\ & a^3 \cdot (b^0 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^0) + b^3 \cdot (c^0 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^0) + c^3 \cdot (a^0 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^0) = 0 \\ & a^3 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^3 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) \\ & a^3 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^3 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) = 0 \\ & a^3 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^3 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) = 0 \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire symboliquement :

$$\begin{aligned} & A_{3n}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^n \cdot \{a^3 \cdot (b^j \cdot c^k - b^k \cdot c^j) + b^3 \cdot (c^j \cdot a^k - c^k \cdot a^j) + c^3 \cdot (a^j \cdot b^k - a^k \cdot b^j)\} \\ & = \\ & A_{3n}^i \cdot \{A_{01}^n \cdot (3, 0, 1) + A_{02}^n \cdot (3, 0, 2) + A_{12}^n \cdot (3, 1, 2)\} \\ & = \\ & A_{3n}^i \cdot \{A_{01}^n \cdot (0, 1, 3) + A_{02}^n \cdot (0, 2, 3) + A_{12}^n \cdot (1, 2, 3)\} \end{aligned}$$

On remarque que :

- Un triplé (m, j, k) dont deux des arguments sont égaux annule le terme auquel il est associé. Il en résulte que tous les arguments d'un triplé sont tous différents et que la moitié des combinaisons à envisager disparaît.
- L'ordre dans lequel les trois arguments d'un triplé donné sont répartis peut varier mais on peut toujours relier chacune des variantes à l'expression ordonnée de manière croissante : (i) en changeant le signe s'il y a inversion de la position et (ii) sans changer le signe s'il y a seulement permutation cyclique ; exemples : $(2, 0, 1) = (0, 1, 2)$ mais $(2, 1, 3) = -(1, 2, 3)$.
- Il en est de même pour les triplés (n, j, k) au détail technique important près que $m < n$. Ainsi seules les six paires $(m, n) = (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)$ et $(2, 3)$ sont à envisager.

On va maintenant considérer les :

$$A_{mn}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^n \cdot (m, j, k) - A_{mn}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^m \cdot (n, j, k)$$

Pour $m = 0$ et $n = 1$, il s'agit de :

$$\begin{aligned} & A_{01}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^1 \cdot (0, j, k) - A_{01}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^0 \cdot (1, j, k) \\ & = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{01}^i \cdot \{A_{12}^1 \cdot (0, 1, 2) + A_{23}^1 \cdot (0, 2, 3) + A_{13}^1 \cdot (0, 1, 3)\} \\
& - A_{01}^i \cdot \{A_{02}^0 \cdot (1, 0, 2) + A_{23}^0 \cdot (1, 2, 3) + A_{03}^0 \cdot (1, 0, 3)\} \\
& = \\
& A_{01}^i \cdot \{A_{12}^1 \cdot (0, 1, 2) + A_{23}^1 \cdot (0, 2, 3) + A_{13}^1 \cdot (0, 1, 3)\} \\
& - A_{01}^i \cdot \{-A_{02}^0 \cdot (0, 1, 2) + A_{23}^0 \cdot (1, 2, 3) - A_{03}^0 \cdot (0, 1, 3)\}
\end{aligned}$$

Pour $m = 0$ et $n = 2$ il s'agit de :

$$\begin{aligned}
& A_{02}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^2 \cdot (0, j, k) - A_{02}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^0 \cdot (2, j, k) \\
& = \\
& A_{02}^i \cdot \{A_{12}^2 \cdot (0, 1, 2) + A_{13}^2 \cdot (0, 1, 3) + A_{23}^2 \cdot (0, 2, 3)\} \\
& - A_{02}^i \cdot \{A_{01}^0 \cdot (2, 0, 1) + A_{03}^0 \cdot (2, 0, 3) + A_{13}^0 \cdot (2, 1, 3)\} \\
& = \\
& A_{02}^i \cdot \{A_{12}^2 \cdot (0, 1, 2) + A_{13}^2 \cdot (0, 1, 3) + A_{23}^2 \cdot (0, 2, 3)\} \\
& - A_{02}^i \cdot \{A_{01}^0 \cdot (0, 1, 2) - A_{03}^0 \cdot (0, 2, 3) - A_{13}^0 \cdot (1, 2, 3)\}
\end{aligned}$$

Pour $m = 0$ et $n = 3$ il s'agit de :

$$\begin{aligned}
& A_{03}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^3 \cdot (0, j, k) - A_{03}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^0 \cdot (3, j, k) \\
& = \\
& A_{03}^i \cdot \{A_{12}^3 \cdot (0, 1, 2) + A_{23}^3 \cdot (0, 2, 3) + A_{13}^3 \cdot (0, 1, 3)\} \\
& - A_{03}^i \cdot \{A_{01}^0 \cdot (0, 1, 3) + A_{02}^0 \cdot (0, 2, 3) + A_{12}^0 \cdot (1, 2, 3)\}
\end{aligned}$$

Pour $m = 1$ et $n = 2$ il s'agit de :

$$\begin{aligned}
& A_{12}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^2 \cdot (1, j, k) - A_{12}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^1 \cdot (2, j, k) \\
& = \\
& A_{12}^i \cdot \{-A_{02}^2 \cdot (0, 1, 2) - A_{03}^2 \cdot (0, 1, 3) + A_{23}^2 \cdot (1, 2, 3)\} \\
& - A_{12}^i \cdot \{A_{01}^1 \cdot (0, 1, 2) - A_{03}^1 \cdot (0, 2, 3) - A_{13}^1 \cdot (1, 2, 3)\}
\end{aligned}$$

Pour $m = 1$ et $n = 3$:

$$\begin{aligned}
& A_{13}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^3 \cdot (1, j, k) - A_{13}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^1 \cdot (3, j, k) \\
& = \\
& A_{13}^i \cdot \{A_{02}^3 \cdot (1, 0, 2) + A_{03}^3 \cdot (1, 0, 3) + A_{23}^3 \cdot (1, 2, 3)\} \\
& - A_{13}^i \cdot \{A_{01}^1 \cdot (0, 1, 3) + A_{02}^1 \cdot (0, 2, 3) + A_{12}^1 \cdot (1, 2, 3)\} \\
& =
\end{aligned}$$

$$A_{13}^i \cdot \{-A_{02}^3 \cdot (0, 1, 2) - A_{03}^3 \cdot (0, 1, 3) + A_{23}^3 \cdot (1, 2, 3)\} \\ - A_{13}^i \cdot \{A_{01}^1 \cdot (0, 1, 3) + A_{02}^1 \cdot (0, 2, 3) + A_{12}^1 \cdot (1, 2, 3)\}$$

Pour $m = 2$ et $n = 3$:

$$A_{23}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^3 \cdot (2, j, k) - A_{23}^i \cdot \sum_{j < k} A_{jk}^2 \cdot (3, j, k) \\ = \\ A_{23}^i \cdot \{A_{01}^3 \cdot (0, 1, 2) - A_{03}^3 \cdot (0, 2, 3) - A_{13}^3 \cdot (1, 2, 3)\} \\ - A_{23}^i \cdot \{A_{01}^2 \cdot (0, 1, 3) + A_{02}^2 \cdot (0, 2, 3) + A_{12}^2 \cdot (1, 2, 3)\}$$

On constate que chaque composante i ($i = 0, 1, 2, 3$) du Jacobiateur est une somme de 36 termes. Ils peuvent être regroupés autour des quatre triplés dont les arguments sont ordonnés de manière croissante :

(0, 1, 2) :

$$(A_{01}^i \cdot A_{02}^0 - A_{02}^i \cdot A_{01}^0) + (A_{01}^i \cdot A_{12}^1 - A_{12}^i \cdot A_{01}^1) + (A_{02}^i \cdot A_{12}^2 - A_{12}^i \cdot A_{02}^2) \\ + A_{03}^i \cdot A_{12}^3 - A_{13}^i \cdot A_{02}^3 + A_{23}^i \cdot A_{01}^3$$

(0, 1, 3) :

$$(A_{01}^i \cdot A_{03}^0 - A_{03}^i \cdot A_{01}^0) + (A_{01}^i \cdot A_{13}^1 - A_{13}^i \cdot A_{01}^1) + (A_{03}^i \cdot A_{13}^3 - A_{13}^i \cdot A_{03}^3) \\ + A_{02}^i \cdot A_{13}^2 - A_{12}^i \cdot A_{03}^2 - A_{23}^i \cdot A_{01}^2$$

(0, 2, 3) :

$$(A_{02}^i \cdot A_{03}^0 - A_{03}^i \cdot A_{02}^0) + (A_{02}^i \cdot A_{23}^2 - A_{23}^i \cdot A_{02}^2) + (A_{03}^i \cdot A_{23}^3 - A_{23}^i \cdot A_{03}^3) \\ + A_{01}^i \cdot A_{23}^1 + A_{12}^i \cdot A_{03}^1 - A_{13}^i \cdot A_{02}^1$$

(1, 2, 3) :

$$(A_{12}^i \cdot A_{13}^1 - A_{13}^i \cdot A_{12}^1) + (A_{12}^i \cdot A_{23}^2 - A_{23}^i \cdot A_{12}^2) + (A_{13}^i \cdot A_{23}^3 - A_{23}^i \cdot A_{13}^3) \\ - A_{01}^i \cdot A_{23}^0 + A_{02}^i \cdot A_{13}^0 - A_{03}^i \cdot A_{12}^0$$

Y-a-t-il une logique permettant de comprendre la répartition des divers termes à prendre en compte ? Sont-ils des sous-déterminants de la matrice $[A]$ ou de sa transposée $[A]^t$?

Soit $(4 \times 6)[A]$ la matrice déformante représentant un cube déformant anti-symétrique de $\boxplus^-(4, \mathbb{C})$:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{02}^0 & A_{03}^0 & A_{12}^0 & A_{13}^0 & A_{23}^0 \\ A_{01}^1 & A_{02}^1 & A_{03}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & A_{23}^1 \\ A_{01}^2 & A_{02}^2 & A_{03}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & A_{23}^2 \\ A_{01}^3 & A_{02}^3 & A_{03}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

Soit la matrice transposée et soit le triplé ordonné $(0, 1, 2)$; lorsque i prend les valeurs successives 0, 1, 2, 3, il est le coefficient multiplicateur d'une somme de sous-déterminants impliquant les lignes indiquées ci-dessous :

$$[A]^t = \begin{bmatrix} \overbrace{A_{01}^0} & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ \overbrace{A_{02}^0} & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ A_{23}^0 & A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} \overbrace{A_{01}^0} & \overbrace{A_{01}^1} & \overbrace{A_{01}^2} & \overbrace{A_{01}^3} \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ \overbrace{A_{12}^0} & \overbrace{A_{12}^1} & \overbrace{A_{12}^2} & \overbrace{A_{12}^3} \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ A_{23}^0 & A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & \overbrace{A_{01}^2} & \overbrace{A_{01}^3} \\ \overbrace{A_{02}^0} & \overbrace{A_{02}^1} & \overbrace{A_{02}^2} & \overbrace{A_{02}^3} \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ \overbrace{A_{12}^0} & \overbrace{A_{12}^1} & \overbrace{A_{12}^2} & \overbrace{A_{12}^3} \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ A_{23}^0 & A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

Et les combinaisons linéaires impliquant les entrées suivantes :

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & \overbrace{A_{01}^3} \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & \overbrace{A_{02}^3} \\ \overbrace{A_{03}^0} & \overbrace{A_{03}^1} & \overbrace{A_{03}^2} & \overbrace{A_{03}^3} \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & \overbrace{A_{12}^3} \\ \overbrace{A_{13}^0} & \overbrace{A_{13}^1} & \overbrace{A_{13}^2} & \overbrace{A_{13}^3} \\ \overbrace{A_{23}^0} & \overbrace{A_{23}^1} & \overbrace{A_{23}^2} & \overbrace{A_{23}^3} \end{bmatrix}$$

S'il devient évident que le Jacobiateur est bien en partie une somme pondérée par les différents triplés de sous-déterminants de type (2-2), il est également clair qu'il ne s'y résume pas puisqu'il faut lui adjoindre toutes les combinaisons linéaires évoquées au travers de l'exemple pédagogique du triplé $(0, 1, 2)$.

Pour tenter de dégager un schéma de tous ces calculs, on peut avoir envie de regrouper les termes concernant chaque composante du Jacobiateur... en prenant garde de ne pas oublier de les pondérer par les quatre triplés.

Ainsi, pour la composante $i = 0$, il faut réaliser la somme suivante et espérer en tirer au moins une information intéressante :

$$\begin{aligned}
 (0, 1, 2) \cdot \{ \underbrace{(A_{01}^0 \cdot A_{02}^0 - A_{02}^0 \cdot A_{01}^0)}_{=0} &+ (A_{01}^0 \cdot A_{12}^1 - A_{12}^0 \cdot A_{01}^1) + (A_{02}^0 \cdot A_{12}^2 - A_{12}^0 \cdot A_{02}^2) \} \\
 &+ (0, 1, 2) \cdot \{ A_{03}^0 \cdot A_{12}^3 - A_{13}^0 \cdot A_{02}^3 + A_{23}^0 \cdot A_{01}^3 \} \\
 + (0, 1, 3) \cdot \{ \underbrace{(A_{01}^0 \cdot A_{03}^0 - A_{03}^0 \cdot A_{01}^0)}_{=0} &+ (A_{01}^0 \cdot A_{13}^1 - A_{13}^0 \cdot A_{01}^1) + (A_{03}^0 \cdot A_{13}^3 - A_{13}^0 \cdot A_{03}^3) \} \\
 &+ (0, 1, 3) \cdot \{ A_{02}^0 \cdot A_{13}^2 - A_{12}^0 \cdot A_{03}^2 - A_{23}^0 \cdot A_{01}^2 \} \\
 + (0, 2, 3) \cdot \{ \underbrace{(A_{02}^0 \cdot A_{03}^0 - A_{03}^0 \cdot A_{02}^0)}_{=0} &+ (A_{02}^0 \cdot A_{23}^2 - A_{23}^0 \cdot A_{02}^2) + (A_{03}^0 \cdot A_{23}^3 - A_{23}^0 \cdot A_{03}^3) \} \\
 &+ (0, 2, 3) \cdot \{ A_{01}^0 \cdot A_{23}^1 + A_{12}^0 \cdot A_{03}^1 - A_{13}^0 \cdot A_{02}^1 \} \\
 + (1, 2, 3) \cdot \{ (A_{12}^0 \cdot A_{13}^1 - A_{13}^0 \cdot A_{12}^1) &+ (A_{12}^0 \cdot A_{23}^2 - A_{23}^0 \cdot A_{12}^2) + (A_{13}^0 \cdot A_{23}^3 - A_{23}^0 \cdot A_{13}^3) \} \\
 &+ (1, 2, 3) \cdot \{ -A_{01}^0 \cdot A_{23}^0 + A_{02}^0 \cdot A_{13}^0 - A_{03}^0 \cdot A_{12}^0 \}
 \end{aligned}$$

Dans cette quête héroïque d'un schéma directeur, on peut aller jusqu'à se demander ce que devient cette composante lorsque le cube anti-symétrique est également réduit ? On constate dans ce cas là que la composante $i = 0$ vaut :

$$\begin{aligned}
 (0, 1, 2) \cdot (-A_{13}^0 \cdot A_{02}^3 + A_{23}^0 \cdot A_{01}^3) \\
 + (0, 1, 3) \cdot (-A_{12}^0 \cdot A_{03}^2 - A_{23}^0 \cdot A_{01}^2) \\
 + (0, 2, 3) \cdot (A_{12}^0 \cdot A_{03}^1 - A_{13}^0 \cdot A_{02}^1) \\
 = [a; \S 2.4, \text{bas de } p.8] \\
 (0, 1, 2) \cdot (-A^2 \cdot A^1 + A^1 \cdot A^2) \\
 + (0, 1, 3) \cdot (-A^3 \cdot A^1 + A^1 \cdot A^3) \\
 + (0, 2, 3) \cdot (A^3 \cdot A^2 - A^2 \cdot A^3) \\
 = \\
 0
 \end{aligned}$$

On obtient ici l'espoir de définir une condition assurant la nullité du Jacobiateur. En effet, pour la composante $i = 1$:

$$\begin{aligned}
 (0, 1, 2) \cdot (A_{03}^1 \cdot A_{12}^3 + A_{23}^1 \cdot A_{01}^3) \\
 + (0, 1, 3) \cdot (A_{02}^1 \cdot A_{13}^2 - A_{23}^1 \cdot A_{01}^2) \\
 + (1, 2, 3) \cdot (A_{02}^1 \cdot A_{13}^0 - A_{03}^1 \cdot A_{12}^0) \\
 = \\
 (0, 1, 2) \cdot (-A^2 \cdot A^0 + A^0 \cdot A^2) \\
 (0, 1, 3) \cdot (-A^3 \cdot A^0 + A^0 \cdot A^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (1, 2, 3) \cdot (A^3 \cdot A^2 - A^2 \cdot A^3) \\
 &= \\
 &0
 \end{aligned}$$

On laisse aux lecteurs le soin de vérifier que les sommes s'annulent aussi pour les composantes $i = 2$ et $i = 3$. On en déduit un résultat intermédiaire :

Lemme 1.2. *Condition suffisante à doter V_4 d'une structure d'algèbre de Lie.*

Une condition suffisante à annuler le Jacobiateur pour la fonction $f([A], \mathbf{a})$ est d'anti-réduire le cube anti-symétrique A représenté par la matrice $[A]$. Autrement dit le produit de Lie déformé par un vecteur $\mathbf{A}$ de V_4 , par exemple $[(4)-, (4)..\mathbf{A}]$, dote cet ensemble d'une structure d'algèbre de Lie. Autrement dit, il est certain que :

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{a} \in V_4 : [\mathbf{a}, \mathbf{a}]_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$$

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_4 : [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$$

nota bene : Il reste cependant à poursuivre les calculs lorsque le cube A est seulement anti-symétrique. Il semble pertinent d'analyser visuellement la somme des termes constituant la composante $i = 0$. Elle fait d'abord apparaître neuf sous-déterminants de type (2-2) pondérés par les divers triplés :

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ A_{23}^0 & A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ A_{23}^0 & A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ A_{23}^0 & A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ A_{23}^0 & A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ \textcolor{blue}{A_{12}^0} & A_{12}^1 & \textcolor{blue}{A_{12}^2} & A_{12}^3 \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ \textcolor{blue}{A_{23}^0} & A_{23}^1 & \textcolor{blue}{A_{23}^2} & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ \textcolor{blue}{A_{02}^0} & A_{02}^1 & \textcolor{blue}{A_{02}^2} & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ \textcolor{blue}{A_{23}^0} & A_{23}^1 & \textcolor{blue}{A_{23}^2} & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ \textcolor{green}{A_{03}^0} & A_{03}^1 & A_{03}^2 & \textcolor{green}{A_{03}^3} \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ \textcolor{green}{A_{13}^0} & A_{13}^1 & A_{13}^2 & \textcolor{green}{A_{13}^3} \\ A_{23}^0 & A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ \textcolor{green}{A_{03}^0} & A_{03}^1 & A_{03}^2 & \textcolor{green}{A_{03}^3} \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{13}^0 & A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \\ \textcolor{green}{A_{23}^0} & A_{23}^1 & A_{23}^2 & \textcolor{green}{A_{23}^3} \end{bmatrix}$$

$$[A]^t = \begin{bmatrix} A_{01}^0 & A_{01}^1 & A_{01}^2 & A_{01}^3 \\ A_{02}^0 & A_{02}^1 & A_{02}^2 & A_{02}^3 \\ A_{03}^0 & A_{03}^1 & A_{03}^2 & A_{03}^3 \\ A_{12}^0 & A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ \textcolor{green}{A_{13}^0} & A_{13}^1 & A_{13}^2 & \textcolor{green}{A_{13}^3} \\ \textcolor{green}{A_{23}^0} & A_{23}^1 & A_{23}^2 & \textcolor{green}{A_{23}^3} \end{bmatrix}$$

Puis une somme de 12 termes difficiles à ordonner et dont le *rôle* n'est peut être révélé qu'en considérant la somme des composantes. Quand on considère non plus une composante isolément mais la somme pondérées par les quatre triplés des quatre composantes, la somme de ces termes supplémentaires s'écrit :

$$\begin{aligned} & (1, 2, 3) \cdot \{ -\textcolor{blue}{A_{01}^i} \cdot A_{23}^0 + A_{02}^i \cdot A_{13}^0 - A_{03}^i \cdot A_{12}^0 \} \\ & + (0, 2, 3) \cdot \{ +\textcolor{red}{A_{01}^i} \cdot A_{23}^1 + \textcolor{red}{A_{12}^i} \cdot A_{03}^1 - A_{13}^i \cdot A_{02}^1 \} \\ & + (0, 1, 3) \cdot \{ +\textcolor{blue}{A_{02}^i} \cdot A_{13}^2 - \textcolor{blue}{A_{12}^i} \cdot A_{03}^2 - A_{23}^i \cdot A_{01}^2 \} \\ & + (0, 1, 2) \cdot \{ +\textcolor{green}{A_{03}^i} \cdot A_{12}^3 - A_{13}^i \cdot A_{02}^3 + A_{23}^i \cdot A_{01}^3 \} \end{aligned}$$

Définition 1.4. Les ombres d'un triplé de vecteurs qui sont des éléments de V_4 .

Dans un espace de dimension quatre, les vecteurs ont bien évidemment quatre composantes. Dans le calcul d'un Jacobiateur, trois vecteurs $^{(4)}\mathbf{a}$, $^{(4)}\mathbf{b}$ et $^{(4)}\mathbf{c}$ sont impliqués. Ayant quelques considérations physiques en tête, on peut avoir envie d'en considérer les parties spatiales $^{(3)}\mathbf{a}$, $^{(3)}\mathbf{b}$ et $^{(3)}\mathbf{c}$ et de former un nouveau vecteur de dimension trois à partir de leurs composantes a^0 , b^0 et c^0 . Soit $^{(3)}\mathbf{t}_0$ ce vecteur. On peut aussi former trois nouveaux vecteurs de dimension trois à partir des composantes spatiales des vecteurs $^{(3)}\mathbf{a}$, $^{(3)}\mathbf{b}$ et $^{(3)}\mathbf{c}$. Soit $^{(3)}\mathbf{t}_1$ (a^1, b^1, c^1), $^{(3)}\mathbf{t}_2$ (a^2, b^2, c^2) et $^{(3)}\mathbf{t}_3$ (a^3, b^3, c^3) ces trois nouveaux vecteurs. Par convention on les appellera respectivement l'ombre temporelle, l'ombre des abscisses, l'ombre des ordonnées et l'ombre des hauteurs du triplé $^{(4)}\mathbf{a}$, $^{(4)}\mathbf{b}$ et $^{(4)}\mathbf{c}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & ^{(3)}\mathbf{t}_0 & ^{(3)}\mathbf{t}_1 & ^{(3)}\mathbf{t}_2 & ^{(3)}\mathbf{t}_3 \\ ^{(4)}\mathbf{a} & a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ ^{(4)}\mathbf{b} & b^0 & b^1 & b^2 & b^3 \\ ^{(4)}\mathbf{c} & c^0 & c^1 & c^2 & c^3 \end{bmatrix}$$

Remarque 1.7. Représentations géométriques des triplés pondérateurs.

Ceci ayant été dit, on constate assez aisément que :

$$\begin{aligned} & (0, 1, 2) \\ & = \\ & a^0 \cdot (b^1 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^1) + b^0 \cdot (c^1 \cdot a^2 - c^2 \cdot a^1) + c^0 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) \\ & = \\ & \langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_2 \rangle_{Id_3} \\ & (0, 1, 3) \\ & = \\ & a^0 \cdot (b^1 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^1) + b^0 \cdot (c^1 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^1) + c^0 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) \\ & = \\ & \langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_3 \rangle_{Id_3} \\ & (0, 2, 3) \\ & = \\ & a^0 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^0 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^0 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ & = \\ & \langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_2 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_3 \rangle_{Id_3} \\ & (1, 2, 3) \\ & = \\ & a^1 \cdot (b^2 \cdot c^3 - b^3 \cdot c^2) + b^1 \cdot (c^2 \cdot a^3 - c^3 \cdot a^2) + c^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ & = \\ & \langle ^{(3)}\mathbf{t}_1, ^{(3)}\mathbf{t}_2 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_3 \rangle_{Id_3} \end{aligned}$$

Lemme 1.3. *Des ombres.*

Le Jacobiateur associé à un triplé $(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\mathbf{b}, ^{(4)}\mathbf{c})$ de vecteurs dans V_4 pour la fonction ... est pondéré par quatre produits scalaires euclidiens formés à partir des ombres de ces vecteurs (définition 1.4). Comme il ne peut être formé que quatre triplés (α, β, χ) d'arguments croissants ($\alpha < \beta < \chi$) choisis dans Ind_4 , il est possible de les noter synthétiquement comme suit :

$$\forall \alpha, \beta, \chi \in \text{Ind}_4, \alpha < \beta < \chi : (\alpha, \beta, \chi) = \langle ^{(3)}\mathbf{t}_\alpha, ^{(3)}\mathbf{t}_\beta \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_\chi \rangle_{Id_3} \in \mathbb{C}$$

Théorème 1.1. *Formalisme générique du Jacobiateur pour un produit de Lie déformé.*

Le Jacobiateur associé à un triplé $(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\mathbf{b}, ^{(4)}\mathbf{c})$ de vecteurs dans V_4 pour le produit de Lie déformé est un élément de V_4 . Compte tenu des informations obtenues jusque-là, chacune de ses quatre composantes est une somme pondérée par les ombres du triplé. Cette somme contient deux parties. La première est constituée de neuf sous-déterminants de type (2-2) et la seconde de douze termes supplémentaires pour le moment inclassifiables.

Remarque 1.8. *Premières conditions d'annulation des termes supplémentaires.*

Considérant les termes supplémentaires d'une composante indicée "i", on observe que certaines entrées apparaissent deux fois. Ce constat ouvre la voie à l'existence de situations annulant les douze termes supplémentaires pour chaque valeur de i. Il suffit pour cela que les entrées de la matrice déformante vérifient les six relations de pondération suivantes :

$$(1, 2, 3) \cdot A_{23}^0 = (0, 2, 3) \cdot A_{23}^1$$

$$(1, 2, 3) \cdot A_{13}^0 = -(0, 1, 3) \cdot A_{13}^2$$

$$(1, 2, 3) \cdot A_{12}^0 = (0, 1, 2) \cdot A_{12}^3$$

$$(0, 2, 3) \cdot A_{03}^1 = (0, 1, 3) \cdot A_{03}^2$$

$$(0, 2, 3) \cdot A_{02}^1 = -(0, 1, 2) \cdot A_{02}^3$$

$$(0, 1, 3) \cdot A_{01}^2 = (0, 1, 2) \cdot A_{01}^3$$

Soit alors les trois dernières relations écrites en tenant compte de la remarque 1.7 :

$$\langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_2 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_3 \rangle_{Id_3} \cdot A_{03}^1 = \langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_3 \rangle_{Id_3} \cdot A_{03}^2$$

$$\langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_2 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_3 \rangle_{Id_3} \cdot A_{02}^1 = - \langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_2 \rangle_{Id_3} \cdot A_{02}^3$$

$$\langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_3 \rangle_{Id_3} \cdot A_{01}^2 = \langle ^{(3)}\mathbf{t}_0, ^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge ^{(3)}\mathbf{t}_2 \rangle_{Id_3} \cdot A_{01}^3$$

Les propriétés habituelles du produit scalaire et du produit vectoriel permettent d'envisager des circonstances validant ces trois relations indépendamment de l'ombre temporelle du triplé $(^{(4)}\mathbf{a}, ^{(4)}\mathbf{b}, ^{(4)}\mathbf{c})$. En effet, pour les valider il suffit d'abord de poser :

$$\forall ^{(3)}\mathbf{t}_0 :$$

$$\begin{aligned} A_{03}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 \wedge {}^{(3)}\mathbf{t}_3 &= A_{03}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{t}_3 \\ A_{02}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 \wedge {}^{(3)}\mathbf{t}_3 &= A_{02}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 \wedge {}^{(3)}\mathbf{t}_1 \\ A_{01}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{t}_3 &= A_{01}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{t}_2 \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \forall {}^{(3)}\mathbf{t}_0, {}^{(3)}\mathbf{t}_1, {}^{(3)}\mathbf{t}_2, {}^{(3)}\mathbf{t}_3 &\equiv \forall ({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b}, {}^{(4)}\mathbf{c}) \\ A_{03}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 &= A_{03}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1 \\ A_{02}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1 &= A_{02}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 \\ A_{01}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 &= A_{01}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 \end{aligned}$$

Par conséquent :

Corollaire 1.1. *Premier corollaire du théorème 1.1.*

Il suffit que les ombres spatiales (in extenso : des abscisses, des ordonnées et des hauteurs) du triplé $({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b}, {}^{(4)}\mathbf{c})$ soient colinéaires entre elles et liées par les relations :

$$\begin{aligned} A_{03}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 &= A_{03}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1 \\ A_{02}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1 &= A_{02}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 \\ A_{01}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 &= A_{01}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 \end{aligned}$$

... pour que, **quelle que soit l'ombre temporelle de ce triplé**, tous les coefficients pondérateurs du Jacobiateur associé à ce triplé pour le produit de Lie déformé par le cube anti-symétrique A qu'on a sous la main soient nuls et que ce Jacobiateur s'annule. Dans ces conditions, le triplé $({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b}, {}^{(4)}\mathbf{c})$ est un territoire de Jacobi.

Remarque 1.9. *Secondes conditions d'annulation des termes supplémentaires.*

On peut aussi se demander s'il est possible d'annuler les termes supplémentaires sans que les ombres spatiales soient alignées ? Si on repart de :

$$\forall {}^{(3)}\mathbf{t}_0 :$$

$$\begin{aligned} (A_{03}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 - A_{03}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1) \wedge {}^{(3)}\mathbf{t}_3 &= 0 \\ {}^{(3)}\mathbf{t}_2 \wedge (A_{02}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 - A_{02}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1) &= 0 \\ {}^{(3)}\mathbf{t}_1 \wedge (A_{01}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 - A_{01}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2) &= 0 \end{aligned}$$

On peut poser :

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\mathbf{t}_3 &= k_3 \cdot (A_{03}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2 - A_{03}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1) \\ {}^{(3)}\mathbf{t}_2 &= k_2 \cdot (A_{02}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 - A_{02}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1) \\ {}^{(3)}\mathbf{t}_1 &= k_1 \cdot (A_{01}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 - A_{01}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_2) \end{aligned}$$

Et on obtient par réinjection de l'expression $\mathbf{t}_2$ dans celle de $\mathbf{t}_1$ et de $\mathbf{t}_3$:

$${}^{(3)}\mathbf{t}_3 = k_3 \cdot (A_{03}^1 \cdot k_2 \cdot (A_{02}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 - A_{02}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1) - A_{03}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1)$$

$${}^{(3)}\mathbf{t}_1 = k_1 \cdot (A_{01}^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 - A_{01}^3 \cdot k_2 \cdot (A_{02}^1 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 - A_{02}^3 \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1))$$

Par regroupement il vient :

$$(1 - k_2 \cdot k_3 \cdot A_{02}^1 \cdot A_{03}^1) \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3 = -k_3 \cdot (A_{03}^1 \cdot k_2 \cdot A_{02}^3 + A_{03}^2) \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1$$

$$(1 + k_1 \cdot A_{02}^3) \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_1 = k_1 \cdot (A_{01}^2 - A_{01}^3 \cdot k_2 \cdot A_{02}^1) \cdot {}^{(3)}\mathbf{t}_3$$

Soit on considère que les ombres spatiales sont alignées et on se ramène au cas précédemment envisagé. Soit on n'impose rien aux ombres spatiales mais on définit une contrainte sur les entrées de la matrice déformante $[A]$. Elle s'écrit :

$$(1 + k_1 \cdot A_{02}^3) \cdot (1 - k_2 \cdot k_3 \cdot A_{02}^1 \cdot A_{03}^1)$$

$$=$$

$$-k_1 \cdot k_3 \cdot (A_{03}^1 \cdot k_2 \cdot A_{02}^3 + A_{03}^2) \cdot (A_{01}^2 - A_{01}^3 \cdot k_2 \cdot A_{02}^1)$$

A ce stade de la discussion, on ne sait malheureusement pas encore traduire cette condition en termes de grandeurs physiques observables puisque le travail effectué dans [a] ne concerne que les cubes anti-symétriques et anti-réduits. Ils sont reliés aux rotationnels de potentiels EM et ces derniers sont le reflet de champs magnétiques. En revanche, la matrice déformante $[A]$ n'a pas encore de représentant physiquement interprétable.

2 Applications physiques

Grâce aux réflexions menées dans [a] et dans le présent document, on espère pouvoir commencer à approfondir les liens éventuels entre la théorie des produits de Lie déformés et les champs électromagnétiques.

2.1 Ensemble de champs EM formant une algèbre de Lie.

Corollaire 2.1. *Première conséquence physique du lemme 1.2.*

Dans le cadre de l'interprétation physique qui a été faite dans [a] de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$, la remarque 1.1 et le lemme 1.2 permettent de démontrer que :

$$\begin{aligned} & J_{f((4)\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}, (4)\mathbf{u})}({}^{(4)}\mathbf{u}_1, {}^{(4)}\mathbf{u}_2, {}^{(4)}\mathbf{u}_3) \\ &= \\ & \frac{1}{u_1^0} \cdot \frac{1}{u_2^0} \cdot [{}^{(4)}\mathbf{u}_1, [{}^{(4)}\mathbf{u}_2, {}^{(4)}\mathbf{u}_3]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \\ & + \frac{1}{u_2^0} \cdot \frac{1}{u_3^0} \cdot [{}^{(4)}\mathbf{u}_2, [{}^{(4)}\mathbf{u}_3, {}^{(4)}\mathbf{u}_1]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \\ & + \frac{1}{u_3^0} \cdot \frac{1}{u_1^0} \cdot [{}^{(4)}\mathbf{u}_3, [{}^{(4)}\mathbf{u}_1, {}^{(4)}\mathbf{u}_2]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \\ &= \\ & \mathbf{0}_{V_4} \end{aligned}$$

Par conséquent, dans le vide de Maxwell, tous les triplés de quadri-vitesses en présence d'un champ magnétique commun constituent un territoire de Jacobi, même quand la somme des vitesses n'est pas nulle. Ce résultat étend le constat fait en remarque 1.1, point 2.

Corollaire 2.2. *Première conséquence physique du corollaire 1.1.*

Dans le vide de Maxwell, trois quadri-vitesses dont la composante "zéro" est quelconque mais dont les ombres spatiales sont alignées en respectant les relations de la remarque 1.8 forment un territoire de Jacobi.

2.2 Les matrices anti-symétriques de la théorie

Le document [a] a fait apparaître deux matrices systématiquement anti-symétriques. La première est la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$. La seconde est ce qu'on appellera désormais par commodité *la cinquième représentation de l'action répétée de la fonction* $[(4)\mathbf{a}, (4)\dots]_{\mathbf{A}}$ sur un quelconque élément ... de V_4 (représenté dans V_4^*). Il s'agit de l'une des décompositions sans résidu de cette action répétée et, plus précisément, de la matrice :

$$[\odot(\mathbf{A})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t \in M(4, \mathbb{C})$$

Ses entrées s'écrivent de manière concise [a ; remarque 2.11, point 2] :

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta}^{\chi\delta} \\ = \\ -\epsilon_{\alpha\beta} \cdot (a^\chi \cdot A^\delta - a^\delta \cdot A^\chi) \cdot \{(a^\alpha \cdot A^\alpha + a^\beta \cdot A^\beta) - (a^\chi \cdot A^\chi + a^\delta \cdot A^\delta)\} \\ = \end{aligned}$$

Avec (rappel) :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = +1 \text{ si } \alpha < \beta, \epsilon_{\alpha\beta} = -1 \text{ si } \alpha > \beta, \epsilon_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha = \beta$$

Son anti-symétrie naturelle permet de l'écrire :

$$[\odot(\mathbf{A})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t = \begin{bmatrix} 0 & \langle^{(3)}\mathbf{X}| \\ -|^{(3)}\mathbf{X} > & {}_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{Y}) \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} & |^{(3)}\mathbf{X} > \\ = \\ & \left| \begin{array}{l} \{(a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) \\ \{(a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) - (a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) \\ \{(a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & |^{(3)}\mathbf{Y} > \\ = \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \{(a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) \\ \{(a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \\ \{(a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) \end{array} \right\rangle$$

Elle justifie de se demander si cette matrice peut aussi représenter un champ électromagnétique ? Avant de répondre à cette question, on va d'abord l'analyser dans le cadre fixé au niveau de [a ; §4.3, remarque 4.4].

2.3 Analyse de la cinquième représentation d'un produit de Lie déformé par un vecteur - et répété, dans le cadre de l'interprétation faite dans [a]

Interpréter la cinquième représentation d'un produit de Lie déformé par un vecteur - et répété, dans le cadre de l'interprétation faite dans [a ; §4.3, remarque 4.4], cela veut dire concrètement avoir posé :

$${}^{(4)}\mathbf{a} = {}^{(4)}\mathbf{u}$$

Et :

$$a^0 \cdot {}^{(4)}\mathbf{A} = -\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM} \equiv u^0 \cdot (A^0, A^1, A^2, A^3) = -(\{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}\}^0, {}^{(3)}\mathbf{H})$$

Avec, pour cohérence :

$$A^0 = 0, u^0 \neq 0$$

Ainsi, cette sous-section veut étudier :

$$\begin{aligned} & -[\odot(\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{u})]^t \cdot |^{(4)}\dots > \\ & = \\ & \frac{1}{u^0} \cdot [{}^{(4)}\mathbf{u}, [{}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\dots]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}^{(4)}\mathbf{A}_{EM}} \end{aligned}$$

Comment s'y prendre pour y parvenir ? Le schéma logique exposé au lemme 1.1 ne peut pas servir directement car cette représentation est déjà et toujours anti-symétrique. Autrement dit : elle n'a pas besoin d'être anti-symétrisée.

Pour autant et tout simplement, l'interprétation faite dans [a ; §4.3, remarque 4.4] suffit à démontrer que l'action répétée est une modification du champ électrique et du champ magnétique associés avec l'action initiale ; en effet :

$$\begin{aligned} & |^{(3)}\mathbf{X} > \\ & = \\ & \left| \begin{array}{l} \{(a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) \\ \{(a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) - (a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) \\ \{(a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) \end{array} \right\rangle \\ & = \\ & \left| \begin{array}{l} \frac{1}{(u^0)^2} \cdot \{u^1 \cdot H^1 - (u^2 \cdot H^2 + u^3 \cdot H^3)\} \cdot (u^2 \cdot H^3 - u^3 \cdot H^2) \\ \frac{1}{(u^0)^2} \cdot \{(u^1 \cdot H^1 + u^3 \cdot H^3) - u^2 \cdot H^2\} \cdot (u^1 \cdot H^3 - u^3 \cdot H^1) \\ \frac{1}{(u^0)^2} \cdot \{u^3 \cdot H^3 - (u^1 \cdot H^1 + u^2 \cdot H^2)\} \cdot (u^1 \cdot H^2 - u^2 \cdot H^1) \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

2.3 Analyse de la cinquième représentation d'un produit de Lie déformé par un vecteur - et répété, dans le cadre de l'interprétation faite dans [a]

On se rappelle ici que l'interprétation faite dans [a ; §4.3, remarque 4.4] est indissociable du respect de la loi de Lorentz exprimée dans une région vide sans accélération ; de sorte qu'on peut continuer avec :

$$\begin{aligned} & |^{(3)}\mathbf{X} > \\ & = \\ & \frac{1}{u^0} \cdot \left| \begin{array}{l} \{(u^2 \cdot H^2 + u^3 \cdot H^3) - u^1 \cdot H^1\} \cdot E^1 \\ \{(u^1 \cdot H^1 + u^3 \cdot H^3) - u^2 \cdot H^2\} \cdot E^2 \\ \{(u^1 \cdot H^1 + u^2 \cdot H^2) - u^3 \cdot H^3\} \cdot E^3 \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

La répétition de l'action du produit de Lie déformé par un vecteur induit donc une évolution sur le champ électrique initial.

Une discussion similaire peut être conduite concernant le vecteur :

$$\begin{aligned} & |^{(3)}\mathbf{Y} > \\ & = \\ & \left| \begin{array}{l} A^0 \cdot A^1 \cdot \{(a^1)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^1 \cdot \{(A^1)^2 - (A^0)^2\} - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) \\ A^0 \cdot A^2 \cdot \{(a^2)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^2 \cdot \{(A^2)^2 - (A^0)^2\} - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3) \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \\ A^0 \cdot A^3 \cdot \{(a^3)^2 - (a^0)^2\} - a^0 \cdot a^3 \cdot \{(A^3)^2 - (A^0)^2\} - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2) \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) \end{array} \right\rangle \\ & = \\ & \left| \begin{array}{l} \{(a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) \\ \{(a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \\ \{(a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) \end{array} \right\rangle \\ & = \text{Rappel : } A^0 = 0 \\ & \left| \begin{array}{l} \{a^1 \cdot A^1 - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^0 \cdot A^1) \\ \{a^2 \cdot A^2 - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^0 \cdot A^2) \\ \{a^3 \cdot A^3 - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^0 \cdot A^3) \end{array} \right\rangle \\ & = \\ & \frac{1}{u^0} \cdot \left| \begin{array}{l} \{u^1 \cdot H^1 - (u^2 \cdot H^2 + u^3 \cdot H^3)\} \cdot H^1 \\ \{u^2 \cdot H^2 - (u^1 \cdot H^1 + u^3 \cdot H^3)\} \cdot H^2 \\ \{u^3 \cdot H^3 - (u^1 \cdot H^1 + u^2 \cdot H^2)\} \cdot H^3 \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

On voit que le vecteur $\mathbf{Y}$ est une modification du champ magnétique initial et que cette modification s'opère de même manière que sur le champ électrique initial, à un signe moins près.

Remarque 2.1. *Résumé de l'action d'un produit de Lie déformé et de sa répétition.*

Lorsqu'on interprète la décomposition sans résidu la plus simple d'un produit de Lie déformé comme un champ électromagnétique agissant dans un *vide de Maxwell sans accélération* ($\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a}) = [\mathbf{F}_{(2,0)}]$ dans les conditions indiquées dans [a ; §4.3, remarque 4.4] et rappelées au début du §2.3) et qu'on réitère l'action de ce produit de Lie, il existe une représentation matricielle de cette réitération (la cinquième) qu'on peut schématiquement décrire comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 f = \frac{1}{u^0} \cdot [^{(4)}\mathbf{u}, \dots] \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM} & \longrightarrow & [F_{(2,0)}(^{(3)}\mathbf{E}_1, ^{(3)}\mathbf{H}_1)] \\
 \downarrow o & & \\
 f \circ f = \frac{1}{(u^0)^2} \cdot [^{(4)}\mathbf{u}, [^{(4)}\mathbf{u}, \dots] \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM}] \mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM} & \longrightarrow & \frac{1}{u^0} \cdot [\odot(\mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{u})]^t
 \end{array}$$

Avec :

$$[F_{(2,0)}(^{(3)}\mathbf{E}_1, ^{(3)}\mathbf{H}_1)] = \begin{bmatrix} 0 & <^{(3)}\mathbf{E}_1| \\ -|^{(3)}\mathbf{E}_1 > & [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{u^0} \cdot {}^{(4)}\mathbf{Rot} {}^{(4)}\mathbf{A}_{EM} \Phi(^{(4)}\mathbf{u})$$

Arrivé à ce stade, il y a nécessité à faire une

Remarque 2.2. *Sur les questions auxquelles il faut répondre.*

Il est recommandé de chercher à savoir :

- Comment cette théorie rend-elle compte de la notion de temps ?
- Les caractéristiques du champ $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ permettent-elles de l'interpréter comme un champ électromagnétique ?

$$\exists (^{(3)}\mathbf{E}_{final}, ^{(3)}\mathbf{H}_{final}) ?$$

Tel que :

$$\frac{1}{u_{initial}^0} \cdot [\odot(\mathbf{Rot} \mathbf{A}_{EM})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{u}_{initial})]^t = \begin{bmatrix} 0 & <^{(3)}\mathbf{E}_{final}| \\ -|^{(3)}\mathbf{E}_{final} > & [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}_{final}) \end{bmatrix}$$

- Que se passe-t-il si on continue à répéter l'action du produit de Lie déformé qu'on a sous la main ?

Remarque 2.3. *Sur la notion de temps.*

Si on part du principe implicite que le passage de la représentation $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ à la représentation $[\odot(\mathbf{A})] \cdot [T] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t$ rend compte de l'évolution d'un champ électromagnétique lorsque la paire $(\mathbf{A}, \mathbf{a})$ est interprétée comme dans [a ; §4.3, remarque 4.4], alors certains résultats classiques doivent s'appliquer. Et s'ils s'appliquent, cela signifie que la répétition de l'action de la fonction $f = [\mathbf{a}, \dots]_{\mathbf{A}}$ sur elle-même (in extenso la réalisation effective de $f \circ f$) équivaut à un intervalle de temps.

Remarque 2.4. *Est-il raisonnable d'interpréter la cinquième représentation comme un champ EM ?*

Un premier réflexe guidé par la démarche entreprise dans [a ; §4.3, remarque 4.4] invite à interpréter la cinquième représentation de la répétition de l'action d'un produit de Lie déformé par un vecteur $\mathbf{A}$ comme étant celle d'un champ EM. Il a été baptisé *final* parce qu'on est intuitivement parti du principe que cette représentation résultait d'un *état initial* représenté par l'interprétation

2.3 Analyse de la cinquième représentation d'un produit de Lie déformé par un vecteur - et répété, dans le cadre de l'interprétation faite dans [a]

physique de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$. On est donc en train d'analyser la cohérence de l'intuition consistant finalement à écrire :

$$\begin{aligned}
 & |^{(3)}\mathbf{E}_{final} > \\
 & = \\
 & \left| \begin{aligned} & \{(a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^2 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^2) \\ & \{(a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^1 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^1) \\ & \{(a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^1 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^1) \end{aligned} \right\rangle \\
 & = \\
 & \frac{1}{u^0} \cdot \left| \begin{aligned} & \{(u^2 \cdot H^2 + u^3 \cdot H^3) - u^1 \cdot H^1\} \cdot E^1 \\ & \{(u^1 \cdot H^1 + u^3 \cdot H^3) - u^2 \cdot H^2\} \cdot E^2 \\ & \{(u^1 \cdot H^1 + u^2 \cdot H^2) - u^3 \cdot H^3\} \cdot E^3 \end{aligned} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 & |^{(3)}\mathbf{H}_{final} > \\
 & = \\
 & \left| \begin{aligned} & \{(a^0 \cdot A^0 + a^1 \cdot A^1) - (a^2 \cdot A^2 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^0 \cdot A^1 - a^1 \cdot A^0) \\ & \{(a^0 \cdot A^0 + a^2 \cdot A^2) - (a^1 \cdot A^1 + a^3 \cdot A^3)\} \cdot (a^0 \cdot A^2 - a^2 \cdot A^0) \\ & \{(a^0 \cdot A^0 + a^3 \cdot A^3) - (a^1 \cdot A^1 + a^2 \cdot A^2)\} \cdot (a^0 \cdot A^3 - a^3 \cdot A^0) \end{aligned} \right\rangle \\
 & = \\
 & \frac{1}{u^0} \cdot \left| \begin{aligned} & \{u^1 \cdot H^1 - (u^2 \cdot H^2 + u^3 \cdot H^3)\} \cdot H^1 \\ & \{u^2 \cdot H^2 - (u^1 \cdot H^1 + u^3 \cdot H^3)\} \cdot H^2 \\ & \{u^3 \cdot H^3 - (u^1 \cdot H^1 + u^2 \cdot H^2)\} \cdot H^3 \end{aligned} \right\rangle
 \end{aligned}$$

En supposant que le champ EM initial n'est pas nul (équivalent : que la décomposition sans résidu la plus simple n'est pas nulle) :

$$^{(4)}\mathbf{a} \wedge ^{(4)}\mathbf{A} \neq ^{(4)}\mathbf{0}$$

Il est clair qu'on se retrouve avec les relations :

$$u^1 \cdot H^1 - (u^2 \cdot H^2 + u^3 \cdot H^3) = -\frac{E_{final}^1}{E_{initial}^1} = \frac{H_{final}^1}{H_{initial}^1}$$

Et :

$$u^2 \cdot H^2 - (u^1 \cdot H^1 + u^3 \cdot H^3) = -\frac{E_{final}^2}{E_{initial}^2} = \frac{H_{final}^2}{H_{initial}^2}$$

Et :

$$u^3 \cdot H^3 - (u^1 \cdot H^1 + u^2 \cdot H^2) = -\frac{E_{final}^3}{E_{initial}^3} = \frac{H_{final}^3}{H_{initial}^3}$$

Autrement dit, l'idée intuitive examinée dans ces lignes, si elle était recevable, fournirait automatiquement un champ magnétique final proportionnel au champ électrique final.

C'est l'endroit exact de cette exploration où il convient de rappeler que la discussion englobe des champs électriques et magnétiques ayant des composantes dans le corps commutatif des nombres complexes, $\mathbb{C}$. Ce rappel anodin prend une importance cruciale quand il s'agit de répondre aux questions suivantes :

"Quel est l'angle entre les porteuses de ces champs ? Comment évolue cet angle au cours d'une transition entre deux états de ces champs ?"

Si la discussion se confinait au corps commutatif des nombres réels, $\mathbb{R}$, le résultat précédent serait en quelque sorte éliminatoire parce qu'il signifierait la colinéarité systématique du champ électrique final et du champ magnétique final. Cette éventualité ne correspond à aucun moment à une évolution physique systématique et naturelle. Elle ne peut éventuellement exister que grâce à un appareillage électro-mécanique ad hoc dont ces équations rendraient compte par hasard.

En effet, que ce soit dans le mouvement cyclotronique de l'électron (par exemple dans un accélérateur) ou dans celui d'une onde monochromatique plane, le champ électrique forme un plan commun avec le champ magnétique et la vitesse de propagation de l'électron tout comme celle de l'onde est perpendiculaire à ce plan électromagnétique. Il peut certes arriver que le champ magnétique ne soit pas exactement perpendiculaire au champ électrique lorsque l'onde est polarisée mais il est rare que les deux champs soient naturellement et spontanément colinéaires. On découvre ainsi ici la nécessité (i) de rediscuter la notion de perpendicularité.

L'hypothèse de travail consistant à croire que le passage de la représentation de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ dont les arguments - la paire $(\mathbf{A}, \mathbf{a})$ - sont interprétés dans le cadre fixé dans [a ; §4.3, remarque 4.4] vers la cinquième représentation, $[\odot(\mathbf{A})] \cdot [\mathbf{T}] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t$, correspond à une évolution naturelle d'un champ électromagnétique nécessite de vérifier si la manière dont le passage d'un état à l'autre (initial $\rightarrow$ final) se fait est cohérent avec les connaissances actuelles sur le comportement de ces champs et si elle préserve bien les lois de Maxwell.

Remarque 2.5. *Sur les directrices des champs initiaux.*

Initialement, on a vu que la loi de Lorentz prend le formalisme suivant :

$$\frac{1}{u_{initial}^0} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{H}_{initial} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial}) = {}^{(3)}\mathbf{E}_{initial}$$

Le champ magnétique initial et la vitesse spatiale initiale sont réputés perpendiculaires au champ électrique initial. Par contre, l'angle entre la directrice du champ magnétique et la directrice de la vitesse initiale est quelconque.

Si ces relations de perpendicularité subsistent lorsque la discussion englobe des champs électriques et magnétiques ayant des composantes dans le corps commutatif des nombres complexes, $\mathbb{C}$, alors elles acceptent des solutions inhabituelles dans le monde des nombres réels. Par exemple :

$${}^{(3)}\mathbf{H}_{initial} = i \cdot {}^{(3)}\mathbf{E}_{initial} \equiv {}^{(3)}\mathbf{E}_{initial} = -i \cdot {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}$$

... qui peut signifier l'orthogonalité souhaitée quand on traduit le nombre imaginaire i à l'aide de sa représentation trigonométrique [07 ; chapitre 3] :

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{i \cdot \pi}{2}}$$

2.3 Analyse de la cinquième représentation d'un produit de Lie déformé par un vecteur - et répété, dans le cadre de l'interprétation faite dans [a]

... mais implique au passage qu'on :

- discute dès le départ (dans [a]) de champs électriques et magnétiques isotropiques au sens donné à cet adjectif par Cartan dans [04] :

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{E}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{E}_{initial} \rangle_{Id_3} = 0$$

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial} \rangle_{Id_3} = 0$$

- puisse mathématiquement justifier l'existence d'une reformulation de la loi de Lorentz prenant la forme insolite suivante :

$$\frac{1}{u_{initial}^0} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{H}_{initial} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial}) = -i \cdot {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}$$

Ou, équivalamment :

$$\frac{1}{u_{initial}^0} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{u}_{initial} \wedge {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}) = i \cdot {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}$$

... laissant sous-entendre que le nombre complexe i est une représentation (syn. : valeur propre) de la matrice :

$$\frac{1}{u_{initial}^0} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -u_{initial}^3 & u_{initial}^2 \\ u_{initial}^3 & 0 & -u_{initial}^1 \\ -u_{initial}^2 & u_{initial}^1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{u_{initial}^0} \cdot [J] \Phi({}^{(3)}\mathbf{u}_{initial})$$

Il convient donc de calculer les racines de :

$$|\frac{1}{u_{initial}^0} \cdot [J] \Phi({}^{(3)}\mathbf{u}_{initial}) - \lambda \cdot Id_3| = 0$$

Ou, comme le montre un petit calcul, de :

$$\lambda \cdot \{\lambda^2 + \frac{1}{(u_{initial}^0)^2} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial} \rangle_{Id_3}\} = 0$$

Il n'a que trois solutions possibles :

$$\lambda = 0$$

$$(u_{initial}^0)^2 \cdot \lambda^2 + \langle {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial} \rangle_{Id_3} = 0$$

Il devient alors aisé de constater que la solution $\lambda = 0$ ne correspond pas à l'attente mais que les solutions $\lambda = \pm i$ coïncide avec une onde électromagnétique dont la vitesse respecte la formule bien connue :

$$(u_{initial}^0)^2 - \langle {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{u}_{initial} \rangle_{Id_3} = 0$$

L'interprétation formulée dans [a ; §4.3, remarque 4.4] peut donc concerner des champs électriques isotropiques associés à des ondes EM monochromatiques planes non-polarisées circulant à une vitesse u^0 spécifique de la région qu'elles

traversent et, dans ce contexte physique-là, l'hypothèse examinée fournit les relations :

$$u_{initial}^1 \cdot H_{initial}^1 - (u_{initial}^2 \cdot H_{initial}^2 + u_{initial}^3 \cdot H_{initial}^3) = -\frac{E_{final}^1}{i \cdot H_{initial}^1} = \frac{H_{final}^1}{H_{initial}^1}$$

D'où on déduit :

$$E_{final}^1 = -i \cdot H_{final}^1$$

On en déduirait une relation similaire pour les autres composantes et finalement que :

$${}^{(3)}\mathbf{E}_{final} = -i \cdot {}^{(3)}\mathbf{H}_{final}$$

D'où le :

Lemme 2.1. *Des champs EM isotropiques.*

Les matrices $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ et $[\odot(\mathbf{A})] \cdot [\mathbf{T}] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t$ se laissent interpréter physiquement dans le cadre présenté au niveau de [a ; §4.3, remarque 4.4]. Ce cadre permet :

1. de travailler avec des champs EM dont :
 - (a) les composantes sont des nombres complexes,
 - (b) les branches (l'électrique et la magnétique) sont isotropiques et perpendiculaires entre elles.
2. de mieux comprendre ce que représente le passage de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ à la matrice $[\odot(\mathbf{A})] \cdot [\mathbf{T}] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t$:
 - (a) Il correspond à la répétition de l'action de la fonction $f = [\mathbf{a}, \dots]_{\mathbf{A}}$, donc à $f \circ f$.
 - (b) Il correspond à une transition électromagnétique préservant les directions relatives des champs :

$$(-i \cdot {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}) \rightarrow (-i \cdot {}^{(3)}\mathbf{H}_{final}, {}^{(3)}\mathbf{H}_{final})$$

Cette évolution se laisse décrire par le schéma :

$$\begin{array}{ccc} f = \frac{1}{u^0} \cdot [{}^{(4)}\mathbf{u}, \dots]_{\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}} & \xrightarrow{\text{interpretation}} & [F_{(2,0)}(-i \cdot {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial}, {}^{(3)}\mathbf{H}_{initial})] \\ \downarrow o & & \downarrow \text{transition} \\ f \circ f = \frac{1}{(u^0)^2} \cdot [{}^{(4)}\mathbf{u}, [{}^{(4)}\mathbf{u}, \dots]_{\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}}]_{\mathbf{Rot}\mathbf{A}_{EM}} & \longrightarrow & [F_{(2,0)}(-i \cdot {}^{(3)}\mathbf{H}_{final}, {}^{(3)}\mathbf{H}_{final})] \end{array}$$

... dans des situations caractérisées par le fait que les deux invariants du champ électromagnétique (voir les définitions dans [10 ; §8, p.17, (8-5) et (8-6)] ou/et [01 ; §25, (25,3) et (23, 4)]) qu'on a sous la main sont nuls car les relations :

$${}^{(3)}\mathbf{H}_{initial} = -i \cdot {}^{(3)}\mathbf{E}_{initial}$$

$$\begin{aligned} <^{(3)} \mathbf{E}_{initial}, ^{(3)} \mathbf{E}_{initial} >_{Id_3} = 0 \\ <^{(3)} \mathbf{H}_{initial}, ^{(3)} \mathbf{H}_{initial} >_{Id_3} = 0 \end{aligned}$$

... impliquent forcément :

$$Inv_1 = <^{(3)} \mathbf{H}_{initial}, ^{(3)} \mathbf{H}_{initial} >_{Id_3} - <^{(3)} \mathbf{E}_{initial}, ^{(3)} \mathbf{E}_{initial} >_{Id_3} = 0$$

Et :

$$Inv_2 = <^{(3)} \mathbf{E}_{initial}, ^{(3)} \mathbf{H}_{initial} >_{Id_3} = i . <^{(3)} \mathbf{E}_{initial}, ^{(3)} \mathbf{E}_{initial} >_{Id_3} = 0$$

Au cours de cette évolution, le champ électrique et le champ magnétique ont la même norme euclidienne nulle et leur orientation relative est préservée. Le tout se déroule dans le vide de Maxwell. Ce fait induit l'idée que le passage $f \rightarrow f$ ou $f \rightarrow f$ équivalant à une oscillation naturelle dans ce vide [01 ; §52]. Mais quelle en est la véritable nature : énergétique, géométrique, autre ?

On peut remarquer que la première représentation de la répétition de l'action vaut ici (voir la formule permettant ce calcul en remarque 1.4) :

$$\{[F_{(2,0)}(^{(3)} \mathbf{E}_{initial}, ^{(3)} \mathbf{H}_{initial})]\}^2 = ^{(4)}[0]$$

Ce qui semble indiquer que cette transition n'est pas de nature énergétique puisque la matrice représentant l'équivalent du tenseur énergie-impulsion à laquelle elle est naturellement associée est nulle ! Les pensées s'orientent donc spontanément vers la notion de courants de spineurs.

2.4 Analyse des variantes 2 et 3 de la représentation de l'action répétée du produit de Lie déformé

Tout en restant encore délibérément dans le cadre fixé par l'interprétation faite dans [a] avec une version initiale de la Loi de Lorentz dépourvue d'un terme relatant l'existence d'une accélération, on va maintenant se pencher sur les possibilités d'identifier les variantes 2 et 3 de la représentation de l'action répétée du produit de Lie déformé avec un champ EM. Notamment lorsque le champ magnétique et la vitesse spatiale sont perpendiculaires.

Il s'agit donc d'abord de savoir quand les représentations suivantes ont la possibilité d'être des matrices anti-symétriques :

$$_{\mathbf{A}} \Phi(\mathbf{a}) . T_2(\otimes)(\mathbf{A}, \mathbf{a})$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{A}, \mathbf{a}) . _{\mathbf{A}} \Phi(\mathbf{a})$$

Comme la décomposition sans résidu la plus simple est forcément anti-symétrique, il suffit de découvrir les situations pour lesquelles la table de Pythagore est symétrique. Or on a vu dans [a] lors de l'étude de l'involution éventuelle du produit de Lie déformé que la symétrie de cette table exigeait la proportionnalité de ses arguments mais que cette proportionnalité annulait la décomposition sans résidu la plus simple. Par conséquent :

Lemme 2.2. *Sur les matrices anti-symétriques de la théorie des produits tensoriels déformés.*

Lorsque les arguments de la paire $(\mathbf{A}, \mathbf{a})$ sont orthogonaux, quelle que soit l'interprétation qui en est faite en physique, aucune des quatre premières représentations de la répétition de l'action du produit de Lie déformé ne peut être une matrice anti-symétrique. La cinquième variante de cette représentation est systématiquement anti-symétrique et donc potentiellement apte à symboliser un champ électromagnétique.

Pour autant, au sein de la théorie des produits tensoriels déformés, il existe une autre famille de matrices systématiquement anti-symétriques. Ce sont les décompositions sans résidu résultant de l'anti-réduction d'un cube déformant. Elles ont été présentées et en partie étudiées dans [d ; §2.2 et suivants].

$$\forall A \in \boxplus^{\downarrow}(4, \mathbb{C}) : {}_A\Phi(\mathbf{a})$$

Un produit tensoriel déformé par un cube anti-réduit n'est pas un produit de Lie déformé. Il ne le devient que si ce cube anti-réduit est ensuite anti-symétrisé. Auquel cas la discussion retombe sur les propos tenus dans [a ; §2.4].

2.5 Une autre interprétation physique pour la matrice ${}_A\Phi(\mathbf{a})$

Inspiré par les faits suivants :

1. Il existe plusieurs représentations possibles des champs électromagnétiques. Chacune dépend de la version qu'on choisit de manipuler : la deux fois covariante, la deux fois contravariante et les transformées de Hodge respectives des précédentes. On en trouve les formulations détaillées dans [05 ; p.29].
2. Le travail exposé ici emmène la discussion vers la notion d'oscillations naturelles d'un champ électromagnétique [01 ; §52].
3. Les oscillations naturelles d'un champ électromagnétiques sont reliées à la décomposition spectrale des potentiels [05 ; §5.4], [01 ; §52].

... on acquiert la conviction qu'il doit exister au moins une autre interprétation que celle formulée dans [a ; §4.3, remarque 4.4] pour la matrice ${}_A\Phi(\mathbf{a})$. En effet, on était parvenu aux relations [a ; remarque 2.5] :

$$\begin{aligned}\Phi_{01} &= A^3 \cdot a^2 - A^2 \cdot a^3 \\ \Phi_{02} &= -A^3 \cdot a^1 + A^1 \cdot a^3 \\ \Phi_{03} &= A^2 \cdot a^1 - A^1 \cdot a^2 \\ \Phi_{12} &= A^3 \cdot a^0 - A^0 \cdot a^3 \\ \Phi_{13} &= -A^2 \cdot a^0 + A^0 \cdot a^2 \\ \Phi_{23} &= A^1 \cdot a^0 - A^0 \cdot a^1\end{aligned}$$

Avec :

$$\mathbf{A}\Phi^{(4)}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_{01} & \Phi_{02} & \Phi_{03} \\ -\Phi_{01} & 0 & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ -\Phi_{02} & -\Phi_{12} & 0 & \Phi_{23} \\ -\Phi_{03} & -\Phi_{13} & -\Phi_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Suite à un choix spontané mais totalement arbitraire on avait décidé d'explorer l'hypothèse :

$$\mathbf{A}\Phi^{(4)}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & \langle^{(3)} \mathbf{E} | \\ -|^{(3)} \mathbf{E} \rangle & {}_{[J]} \Phi^{(3)}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} = [F(2, 0)(^{(3)} \mathbf{E}, ^{(3)} \mathbf{H})]$$

Si on considère maintenant les équations résultant de l'analyse spectrale des potentiels électromagnétiques [05 ; §5.4.2, p.90, (5.64) pour le champ électrique et (5.65) pour le champ magnétique], [01 ; §52, p.150, (52,7)] :

$$^{(3)} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \sum_{\mathbf{k}} \frac{d\mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{dt} \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}}$$

$$^{(3)} \mathbf{H} = i \cdot \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \wedge \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}}$$

... le regard est attiré par la présence de produits vectoriels dans la définition du champ magnétique. Une observation de la définition des entrées Φ_{01} , Φ_{02} et Φ_{03} joint à un coup d'oeil sur le formalisme de la transposée de Hodge de la version deux fois covariante [05 ; §1.15, p.29, (1.108)] :

$$[\star F(2, 0)(^{(3)} \mathbf{E}, ^{(3)} \mathbf{H})] = \begin{bmatrix} 0 & \langle^{(3)} \mathbf{H} | \\ -|^{(3)} \mathbf{H} \rangle & -\frac{1}{c} \cdot {}_{[J]} \Phi^{(3)}(\mathbf{E}) \end{bmatrix}$$

... suggère d'examiner l'hypothèse de travail alternative consistant à introduire une décomposition simple et sans résidu par vecteur d'onde $^{(3)} \mathbf{k}$ de telle sorte que celle-ci apparaisse comme la représentation du produit de Lie $[^{(4)} \mathbf{k}, ^{(4)} \dots]_{\mathbf{A}(\mathbf{EM}-\mathbf{k})}$ déformé par le potentiel rapporté à ce vecteur d'onde. Cette idée se traduit au niveau mathématique par :

$$\begin{aligned} \Phi_{01\mathbf{k}} &= a_{\mathbf{k}}^2 \cdot A_{\mathbf{k}}^3 - A_{\mathbf{k}}^2 \cdot a_{\mathbf{k}}^3 \\ \Phi_{02\mathbf{k}} &= a_{\mathbf{k}}^3 \cdot A_{\mathbf{k}}^1 - a_{\mathbf{k}}^1 \cdot A_{\mathbf{k}}^3 \\ \Phi_{03\mathbf{k}} &= a_{\mathbf{k}}^1 \cdot A_{\mathbf{k}}^2 - a_{\mathbf{k}}^2 \cdot A_{\mathbf{k}}^1 \end{aligned}$$

Et du point de vue de la physique par les identifications :

$$\begin{aligned} ^{(4)} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(math) &= ^{(4)} \mathbf{k} : (a_{\mathbf{k}}^0, ^{(3)} \mathbf{k}) \\ ^{(4)} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(math) &= ^{(4)} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(EM) \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} : (A_{\mathbf{k}}^0, ^{(3)} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(EM)) \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \end{aligned}$$

Elle ne peut être finalisée dans son principe qu'en imposant :

$$\begin{aligned} &\Phi_{12\mathbf{k}} \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A_{\mathbf{k}}^3(EM) \cdot \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c} - \frac{\phi_{\mathbf{k}}}{c} \cdot k^3) \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \\
 & = \\
 & -\frac{1}{c} \cdot \frac{dA_{\mathbf{k}}^3(EM)}{dt} \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \\
 & = \\
 & \frac{1}{c} \cdot E_{\mathbf{k}}^3
 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{13\mathbf{k}} \\
 & = \\
 & (-A_{\mathbf{k}}^2(EM) \cdot \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c} + \frac{\phi_{\mathbf{k}}}{c} \cdot k^2) \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \\
 & = \\
 & -\frac{1}{c} \cdot \frac{dA_{\mathbf{k}}^2(EM)}{dt} \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \\
 & = \\
 & -\frac{1}{c} \cdot E_{\mathbf{k}}^2
 \end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{23\mathbf{k}} \\
 & = \\
 & (A_{\mathbf{k}}^1(EM) \cdot \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c} - \frac{\phi_{\mathbf{k}}}{c} \cdot k^1) \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \\
 & = \\
 & -\frac{1}{c} \cdot \frac{dA_{\mathbf{k}}^1(EM)}{dt} \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \\
 & = \\
 & \frac{1}{c} \cdot E_{\mathbf{k}}^1
 \end{aligned}$$

Pour la cohérence avec la théorie classique des champs on a posé $A_{\mathbf{k}}^0 = \phi_{\mathbf{k}}/c$, ce qui correspond à la définition rappelée dans [05 ; §1.14, p.28, (1.100)] et $a_{\mathbf{k}}^0 = k^0 = \omega_{\mathbf{k}}/c$ faisant apparaître une pulsation ω_k ; c est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

Avec cette nouvelle interprétation physique de l'objet mathématique générique apparu au sein de la théorie étudiant les produits de Lie déformés et leurs décompositions, on doit :

- ... introduire autant de matrices

$$e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \cdot \mathbf{A}_{(EM)\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{k})$$

... que de vecteurs d'onde permis par la décomposition spectrale de la paire $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$. De sorte que cette paire est décrite par la somme :

$$[\star F(2, 0)(\mathbf{E}, \mathbf{H})] = \sum_{\mathbf{k}} [\star F(2, 0)(\mathbf{E}_{\mathbf{k}}, \mathbf{H}_{\mathbf{k}})] = \sum_{\mathbf{k}} e^{i \cdot \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \cdot \mathbf{A}_{(EM)\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{k})$$

- ... tout comme cela a été rappelé au §1.1 point 2 ci-dessus pour l'interprétation proposée dans [a], se souvenir du fait que les calculs réalisés dans [b ; corollaire 2.3, p.12] limitent le domaine de validité de cette nouvelle interprétation aux paires $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ dont les arguments sont perpendiculaires entre eux :

$${}^{(3)}\mathbf{E} \perp {}^{(3)}\mathbf{H} \iff \langle {}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H} \rangle_{Id_3} = 0$$

- ... pour s'inscrire dans la théorie classique des champs, se rappeler la relation bien connue [01 ; §52, p.149, (52.3)] :

$$\forall \mathbf{k} : \langle {}^{(4)}\mathbf{A}(EM)_{\mathbf{k}}, {}^{(4)}\mathbf{k} \rangle_{Id_3} = 0$$

... qui, chaque fois qu'elle s'applique effectivement, a une conséquence directe sur le formalisme alternatif de la décomposition sans résidu de la fonction $\star f$; à savoir :

$$\begin{aligned} & [P(\star f)] \\ & = \\ & e^{i \cdot \langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \cdot \underbrace{\{ \langle {}^{(4)}\mathbf{A}(EM)_{\mathbf{k}}, {}^{(4)}\mathbf{k} \rangle_{Id_4} \cdot Id_4 - T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}(EM)_{\mathbf{k}}, {}^{(4)}\mathbf{k}) \}}_{=0} \\ & = \\ & -e^{i \cdot \langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \cdot T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}(EM)_{\mathbf{k}}, {}^{(4)}\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Autrement dit, l'autre décomposition sans résidu se ramène à une table de Pythagore bâtie sur le produit tensoriel classique et sur la paire des arguments de la fonction $\star f$. La différence entre cette table et sa transposée représente, peut-être au signe moins près, le produit extérieur de ces arguments.

Cette nouvelle interprétation induit l'esquisse suivante :

$$\begin{array}{ccc} \star f_{\mathbf{k}} = [\mathbf{k}, \dots]_{\mathbf{A}(\mathbf{EM})_{\mathbf{k}}} \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} & \xrightarrow{\text{decomp. simple}} & [\star F(2, 0)_{\mathbf{k}}] \\ \downarrow \text{autre décomposition} & & \downarrow \\ [P_{\mathbf{k}}(\star f)] = -T_2(\otimes)({}^{(4)}\mathbf{A}(\mathbf{EM})_{\mathbf{k}} \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle_{Id_3}}, {}^{(4)}\mathbf{k}) & & \downarrow \\ \downarrow \text{antisymétrisation} & & \downarrow \\ [P_{\mathbf{k}}(\star f)]^t - [P_{\mathbf{k}}(\star f)] & \xrightarrow{\equiv} & \mathbf{A}(\mathbf{EM})_{\mathbf{k}} \cdot e^{i \cdot \langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle_{Id_3}} \wedge \mathbf{k} \end{array}$$

Bien qu'on doive encore préciser cette esquisse, elle a l'avantage de commencer à mettre en évidence les correspondances entre les divers acteurs prenant part à cette discussion. On note au passage mais avec beaucoup d'intérêt que ce schéma peut être relié à celui présenté ci-dessus au niveau du lemme 1.1.

3 Conclusions et perspectives

3.1 Conclusions

L'interprétation physique proposée dans [a ; §4.3, remarque 4.4] pour la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ permet d'envisager l'existence de champs électromagnétiques collectivement dotés d'une structure d'algèbre de Lie. L'introduction d'algèbres pour décrire les courants remonte à au moins une soixantaine d'années comme on peut s'en rendre compte dans [08]. Par conséquent, l'exploration menée ici parvient à un résultat théorique dont l'essence ne surprend pas complètement. Ces algèbres ont trouvé de nombreux débouchés pratiques au sein de la physique des particules et joué un rôle non-négligeable dans l'apparition des quarks [09 ; voir chapitre 3, pp. 97-120 et chapitre 4, pp. 130-132].

La spécificité de l'étude menée dans ce document tient au fait qu'il permet également de comprendre que le passage de la matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ à la matrice $[\odot(\mathbf{A})] \cdot [\mathbf{T}] \cdot [\odot(\mathbf{a})]^t$ correspond non seulement à la répétition de l'action de la fonction $f = [\mathbf{a}, \dots]_{\mathbf{A}}$ mais aussi à la description de l'évolution de champs électromagnétiques isotropes dans des régions de l'espace dépourvues d'un champ d'accélération. Ce constat pousse à se demander à quel type de courant correspondent ces transitions se déroulant apparemment dans le vide ? On pense bien entendu aux oscillations spontanées des champs électromagnétiques [01 ; §52] et les circonstances invitent à penser qu'il s'agit de courants de spineurs mais ce point reste à approfondir.

3.2 Perspectives

Pour la complétude de cette exploration, il convient :

1. de rechercher encore d'autres scénarios mathématiques pour rendre compte de la réalité physique au sein de la théorie des produits tensoriels déformés. Dans cette optique, il devient raisonnable de ne plus focaliser le regard sur les seuls produits de Lie déformés. Par exemple, on peut peut-être commencer à envisager des évolutions entre une matrice $\mathbf{A}\Phi(\mathbf{a})$ et sa variante ${}_A\Phi(\mathbf{a})$ lorsque le cube perd son anti-symétrisation. Il reste donc énormément de travail à accomplir.
2. d'avoir la modestie de constater que la prise de conscience de l'existence d'un lien entre les équations de l'électromagnétisme et la théorie des spineurs d'E. Cartan n'est pas récente. Les travaux de Dirac en 1928 constituent à n'en pas douter une étape importante de cette découverte. La référence [10 ; §10, p.21, b)] traite le cas particulier de champs EM dont les deux quantités invariantes (par ailleurs définies au niveau de [10 ; §8, p.17, (8-5) et (8-6)]) sont nulles. Ces situations englobent sans les nommer les champs isotropes. A peu près à la même époque que la référence précédente, on peut noter à titre pédagogique l'article [11] dans lequel il est clairement question de vecteurs et de bi-plans isotropes. La nature et les propriétés de ces liens ont bien entendu été largement étudiés, expliqués et approfondis au cours des soixante dernières années et on en

trouve maintenant les traces dans de nombreux cours dispensés au sein des universités.

References

4 Bibliographie

4.1 Mes contributions

- [a] Les produits de Lie involutifs dans les espaces de dimension quatre - premiers liens avec les champs électromagnétiques ; viXra:2507.0119, 32 pages.
- [b] Decomposing the Deformed Lie Products in a four-dimensional space - first part: the initial theorem and its consequences; viXra:2505.0003, 24 pages.
- [c] Discussion sur les décompositions des produits vectoriels déformés ; viXra:2405.0054, 40 pages.
- [d] Decomposing the Deformed tensor Products in a Four-Dimensional Space; viXra:2505.0003, 24 pages.

4.2 Oeuvres internationales

- [01] Landau und Lifschitz: Lehrbuch des theoretischen Physik, Band II: Klassische Feldtheorie, 12., überarbeit. Aufl. ©Akademischer Verlag, Berlin, 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.
- [02] Chamber-Loir, A. : Introduction aux groupes et algèbres de Lie ; cours de Master 2, Université de Rennes I, (2004-2005).
- [03] Alibert, D. : Théorie de Hodge classique ; Astérisque, tome 17 (1974), p.27-50, ©Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.
- [04] Cartan, E. The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966; translation of the “Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)” ; Hermann, 1937; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1, 151 pages.
- [05] Labarthe, J. J. : Electromagnétisme ; Cours de maîtrise et de magistère de physique, M7 : Champs et fluides, Interaction lumière - matière, Université Paris-Sud Orsay, version du 26 octobre 2006, 97 pages.
- [06] Maxwell, J.C.: A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155: 459–512; en anglais.
- [07] Gautier, C., Girard, G., Gerll, D., Thiercé, E. et Warusfel, A. : Nombres réels, calcul numérique, nombres complexes, cours de Terminales CDE ; Collection Aleph0, Algèbre, Classiques Hachette, Librairie Hachette, Paris, ©1971, 198 pages.

- [08] Bouchiat, C. et Meyer, Ph. : L'algèbre des courants ; Colloque C 4, supplément au numéro 11-12, Tome 27, Nov.-Déc. 1966 dans le Journal de Physique, 7 pages.
- [09] Les particules élémentaires (Le coeur de la matière) ; Collection "Voyage dans le cosmos" (adaptation française de l'oeuvre espagnole originale parainée par H. Reeves), Graficas Estella S.A., Estella, Espagne ©2017, ISBN 978-2-8237-0432-7, 170 pages.
- [10] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, © Editions Masson and Co, Paris, 1955, 289 p.
- [11] Une forme spinorielle des équations de l'électromagnétisme ; Journal de physique et le radium, tome 18, mars 1957, numéro 3, pp. 169-172.