

ПУТЬ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть 1. Модифицированная классическая теория

Г. К. Артимович

E-mail: cfs137@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Современная квантовая теория родилась в 1925 году – ровно 100 лет назад – в работах В.Гейзенберга, П.Йордана и М.Борна, однако одна из её главных проблем – проблема т.н. ультрафиолетовых расходимостей – до сих пор не решена. Цель данной статьи – разработка модифицированной квантовой теории, которая решает (по крайней мере – частично) эту проблему.

Статья состоит из трёх частей. В первой части, которая здесь представлена, излагается модифицированная теория неквантованных полей. Определена истинная калибровочная группа электродинамики. Предложен модифицированный лагранжиан электромагнитного взаимодействия. Высказана гипотеза относительно природы т.н. тёмной энергии.

TOWARDS A SOLUTION TO THE PROBLEM OF ULTRAVIOLET DIVERGENCES IN QUANTUM ELECTRODYNAMICS

Part 1. A Modified Classical Theory

G. K. Artimovich

E-mail: cfs137@gmail.com

ABSTRACT

Modern quantum theory was born in 1925 – exactly 100 years ago – in the works of W. Heisenberg, P. Jordan, and M. Born. However, one of its main problems – the problem of so-called ultraviolet divergences – remains unsolved to this day. The purpose of this article is to develop a modified quantum theory that (at least partially) solves the problem.

The article consists of three parts. The first part, presented here, outlines a modified theory of non-quantized fields. The true gauge group of electrodynamics is determined. A modified Lagrangian of electromagnetic interaction is proposed. A hypothesis regarding the nature of so-called dark energy is put forward.

1. Море Дирака и море Эйнштейна.

Рассмотрим распределение Ферми-Дирака для идеального ферми-газа:

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} + 1} \quad (1.1)$$

где $n(\varepsilon)$ – среднее число заполнения состояний с энергией ε , μ – химический потенциал, T – температура. Применительно к вакууму естественно положить $T = 0$. Кроме того, общее число частиц, необходимых для построения вакуума – неизвестная величина. Иными словами, вакуум – система с переменным числом частиц, которое определяется из условий термодинамического равновесия. Для таких систем $\mu = 0$ (условие минимума свободной энергии при заданных температуре и объёме). Таким образом, для вакуума получается следующее распределение:

$$n(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon \geq m \\ 1, & \text{если } \varepsilon \leq -m \end{cases} \quad (1.2)$$

где m - масса частиц (область $|\varepsilon| < m$ является запрещённой для реальных частиц, поэтому её не рассматриваем).

Любопытно, что для распределения фермионов в вакууме получился результат, аналогичный корпускулярной картине, придуманной П. Дираком для объяснения устойчивости фермионного вакуума. Согласно Дираку, в вакууме состояния верхнего континуума ($\varepsilon \geq m$) пусты, а состояния нижнего ($\varepsilon \leq -m$) заполнены (т. н. море Дирака). Фермион, появившийся в верхнем континууме, не может провалиться в море Дирака, т.к. такой переход запрещён принципом Паули. Незанятые состояния нижнего континуума (т.н. дырки), будучи окружёнными морем частиц с отрицательной энергией, ведут себя как частицы с положительной энергией, но с зарядом, противоположным заряду рассматриваемых частиц. Именно, исходя из этих соображений, Дирак предсказал существование античастиц.

В настоящее время считается, что нет необходимости отождествлять античастицы с дырками, а трактовку Дирака принято рассматривать как исторический курьёз. Между тем, эвристический потенциал этой идеи далеко не исчерпан. Во всяком случае, корпускулярную картину Дирака в модифицированном виде можно использовать для объяснения устойчивости бозонного вакуума.

Рассмотрим распределение Бозе-Эйнштейна для идеального бозе-газа:

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} \quad (1.3)$$

Полагая $T = 0$, $\mu = 0$, получим для вакуума следующее распределение:

$$n(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon \geq m \\ -1, & \text{если } \varepsilon \leq -m \end{cases} \quad (1.4)$$

Итак, в вакууме все состояния нижнего континуума должны быть "антизаполненными". Совокупность этих "дырок в пустоте" по аналогии с морем Дирака назовём *морем Эйнштейна*. Амплитуда вероятности перехода бозона в состояние с числом заполнения $n \geq 0$ пропорциональна $\sqrt{n+1}$. Экстраполируя это выражение в область отрицательных n , получим при $n = -1$ ноль. Таким образом, имеем модифицированный принцип Паули, который впервые сформулировал В.И. Ритус в беседе с автором: переходы бозонов в состояние с числом заполнения -1 запрещены. Отсюда следует, что бозоны из верхнего континуума не могут проваливаться в море Эйнштейна – это и обеспечивает устойчивость бозонного вакуума.

Дальнейшее углубление "дырок в пустоте" следует интерпретировать как рождение античастиц: числу заполнения $n = -2$ отвечает одна античастица и т. д., т.е. в общем случае числу заполнения $n \leq -1$ отвечает $-n - 1$ античастица.

Итак, вырисовывается единая корпускулярная картина для заряженных фермионов и бозонов. Суть её в том, что носителями заряда являются частицы, а античастиц как бы не существует – они представляют собой дырки в море частиц с отрицательной энергией. Вакууму соответствует распределение (1.2) для фермионов и (1.4) для бозонов, а отклонение от этих распределений означает наличие частиц (верхний континуум) или античастиц (дырки в нижнем континууме). Эта картина сталкивается как минимум с тремя трудностями. Во-первых, море частиц нижнего континуума создаёт бесконечную плотность заряда, которая в реальности не наблюдается. Во-вторых, налицо "дискриминация" античастиц: частицы являются основой, античастицы же играют вспомогательную роль. И, наконец, в-третьих – самый главный вопрос: как быть с истинно нейтральными частицами? Действительно, до сих пор в наших построениях никак не использовалось наличие у частиц заряда, так что все выводы справедливы и для истинно нейтральных частиц. А это означает, что любая истинно нейтральная частица имеет двойника в виде дырки в нижнем континууме. Эти две ипостаси одной и той же частицы должны быть неотличимы друг от друга. Тем не менее, их нельзя отождествлять и приходится рассматривать одновременно.

Вернёмся теперь к заряжённым частицам. При построении корпускулярной картины можно взять за основу античастицы вместо частиц. В этом случае античастицы будут "настоящими", а частицы – дырками в море античастиц нижнего континуума, т.е. таким способом мы получим двойники частиц и античастиц. Следующий шаг напрашивается сам собой: нужно распространить двойственность, изначально присущую истинно нейтральным частицам, на заряженные частицы. А именно, нужно включить в рассмотрение наряду с частицами и античастицами их двойники – в результате все три трудности, указанные в предыдущем абзаце, автоматически разрешаются. Действительно, заряд морей Дирака или Эйнштейна, построенных на основе

античастиц, равен по абсолютной величине и противоположен по знаку заряду этих морей, построенных на основе частиц. Как результат суммарный заряд вакуума оказывается равным нулю. При этом устанавливается полная симметрия между частицами и античастицами, а двойственность истинно нейтральных частиц из казуса переходит в разряд универсального свойства всех без исключения фундаментальных частиц.

Итак, в попытке построить непротиворечивую корпускулярную картину, единую для фермионов и бозонов, мы приходим к весьма любопытному результату: у каждой фундаментальной частицы должен быть физически неотличимый от неё двойник. Иными словами, каждая фундаментальная частица имеет дополнительную внутреннюю степень свободы, принимающую два значения. Будем называть эту степень свободы *зеркальностью* и обозначать греческой буквой κ (*καθρέπτης* (греч.) – зеркало). Для определённости будем считать, что $\kappa = \pm 1$ (в дальнейшем мы покажем целесообразность такого выбора значений зеркальности). Две частицы, отличающиеся друг от друга только своей зеркальностью, должны быть физически идентичны. При этом зеркальность подобно цвету кварков не является физической величиной, которую можно измерить. Это означает, что реальные частицы, фиксируемые в различных экспериментах, должны представлять собой суперпозиции частиц различной зеркальности, которым нельзя приписать никакой определённой зеркальности. Вопрос этот достаточно сложный, поэтому отложим его рассмотрение до второй части статьи.

У любой фундаментальной частицы имеется своё "индивидуальное" море Дирака или море Эйнштейна – в зависимости от её спина. Энергия каждого такого моря бесконечна, причём энергия моря Эйнштейна положительна, а энергия моря Дирака отрицательна. В теории гравитации считается, что любая энергия создаёт гравитационное поле, поэтому её нельзя определять с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Иными словами, существует "абсолютный нуль" энергии. Требуется ответ на принципиальный вопрос: порождает ли энергия морей нижнего континуума гравитационное поле? Осмелимся ответить на этот вопрос утвердительно и выдвинуть гипотезу, что т.н. тёмная энергия (по другой терминологии – тёмная материя или скрытая масса) есть не что иное, как суммарная энергия морей Эйнштейна и Дирака всех фундаментальных частиц. Гравитационное взаимодействие обеспечивает конечность этой энергии (так же, как оно обеспечивает конечность массы и объёма Вселенной). Эта энергия должна быть положительной, откуда с необходимостью следует ограничение на количества фундаментальных бозонов и фермионов, существующих в природе.

Предположим, что нам известны все фундаментальные бозоны и фермионы. Пронумеруем их по отдельности, обозначив порядковые номера соответственно n_b и n_f . Отметим, что частицы и античастицы, кварки различных цветов и т.д. должны иметь разные номера. Тогда положительность тёмной энергии требует выполнения неравенства

$$\sum_{n_b} g(n_b) > \sum_{n_f} g(n_f) \quad (1.5)$$

где $g(n_{b,f})$ – статистический вес (т.е. число поляризационных степеней свободы) частицы с номером $n_{b,f}$.

Заметим, что приведённые выше соображения не стоит рассматривать как строгие теоретические построения. Они играют в действительности только роль "строительных лесов" для того, чтобы ввести в физику понятие зеркальности. Числа заполнения бозонов для состояний нижнего континуума получились отрицательными, что, на первый взгляд, лишено здравого смысла. Однако не следует воспринимать эти отрицательные числа буквально, это всего лишь удобная и наглядная математическая конструкция, отражающая тот факт, что в реальности "абсолютный нуль" энергии недостижим.

В заключение этого вводного раздела сделаем краткий обзор обозначений, которые будут использоваться в данной статье.

Для четырёхмерных тензорных индексов будем использовать буквы из середины греческого алфавита: μ, ν, \dots ; для четырёхмерных биспинорных индексов – начальные буквы греческого алфавита: α, β, \dots ; для трёхмерных пространственных индексов – буквы из середины латинского алфавита: m, n, \dots ; для мультиплетных индексов – буквы латинского алфавита, расположенные ближе к его концу: r, s, \dots .

Матрицы Дирака γ_μ определяются соотношением $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$, где $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Матрицы $\gamma_n (n = 1, 2, 3)$ эрмитовы, а γ^0 – антиэрмитова. Кроме того, будем использовать следующие матрицы: $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\alpha_n = \gamma_n\gamma^0$, $\Sigma_n = \gamma_5\gamma^0\gamma_n$.

Точка над любой величиной A обозначает её производную по времени: $\dot{A} \equiv \partial_0 A$. Обозначение для оператора Лапласа: $\Delta = \partial_n \partial_n$. Комплексное сопряжение, транспонирование и эрмитово сопряжение величины A обозначаются соответственно A^* , A^T и $A^+ = (A^*)^T$. След матрицы A обозначается $\text{tr} A$. Черта над биспинором u означает его дираковское сопряжение: $\bar{u} = iu^+\gamma^0$.

Для коммутатора и антикоммутатора двух величин A и B будем использовать следующие обозначения:

$$[A, B]_- \equiv [A, B] = AB - BA, \quad [A, B]_+ \equiv \{A, B\} = AB + BA.$$

2. Зеркальная симметрия.

Знак перед массой в уравнении Дирака не является существенным, поэтому запишем это уравнение в виде

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + \kappa t)\psi(x, \kappa) = 0, \quad \kappa = \pm 1 \quad (2.1)$$

Рассмотрим решение уравнения (2.1) в виде плоских волн:

$$\psi_{\pm\mathbf{p}}^{(\pm)}(x, \kappa) = e^{\pm i p x} u^{(\pm)}(\pm\mathbf{p}, \kappa) \quad (2.2)$$

где $u^{(\pm)}(\pm\mathbf{p}, \kappa)$ – биспиноры, удовлетворяющие уравнению

$$(\pm i \gamma p + \kappa m) u^{(\pm)}(\pm\mathbf{p}, \kappa) = 0 \quad (2.3)$$

В (2.2) и (2.3) предполагается, что $p^2 = -m^2$. Нетрудно видеть, что биспиноры $u^{(+)}(\mathbf{p}, -\kappa)$ и $u^{(-)}(-\mathbf{p}, \kappa)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению – здесь и в дальнейшем будем записывать это следующим образом:

$$u^{(+)}(\mathbf{p}, -\kappa) \sim u^{(-)}(-\mathbf{p}, \kappa) \quad (2.4)$$

Согласно дырочной теории, которая обсуждалась в предыдущем разделе, биспинор $u^{(+)}(\mathbf{p}, \kappa)$ описывает частицу, а биспинор $u^{(-)}(-\mathbf{p}, \kappa)$ – дырку в нижнем энергетическом континууме, т.е. античастицу. Это справедливо независимо от выбора κ , однако – и это существенно в традиционной теории – необходимо выбрать одно из значений κ , а другое значение отбросить. Положим для определённости $\kappa = 1$. Тогда биспинор $u^{(+)}(\mathbf{p}, -1)$ по-прежнему будет описывать частицу, а биспинор $u^{(-)}(-\mathbf{p}, -1)$ – античастицу, однако значение $\kappa = -1$ "неправильное", его необходимо "исправить" с помощью соотношения (2.4). Но тогда роли биспиноров в корпускулярной картине поменяются: $u^{(+)}(\mathbf{p}, -1) \sim u^{(-)}(-\mathbf{p}, 1)$ будет описывать дырку в нижнем энергетическом континууме, а $u^{(-)}(-\mathbf{p}, -1) \sim u^{(+)}(\mathbf{p}, 1)$ – античастицу, которая теперь становится основным носителем заряда. Итак, изменение знака κ можно интерпретировать как смену носителей заряда. Но это означает, что величина κ есть не что иное, как зеркальность, введённая в предыдущем разделе.

Вернёмся теперь к уравнению (2.1). Очевидно, что для его решений справедливо соотношение

$$\psi(-x, -\kappa) \sim \psi(x, \kappa) \quad (2.5)$$

Инвариантность (2.5) можно интерпретировать как СРТ-инвариантность, "вывернутую наизнанку". Действительно, преобразование СРТ включает пассивную 4-инверсию, при которой реальные координаты не меняются – поворачиваются только координатные орты, и реальный обмен частиц и античастиц. Напротив, инвариантность (2.5), которую впредь будем называть *зеркальной*, имеет место при одновременном осуществлении активной 4-инверсии (т.е. реальной замены координат) и поворота "зарядового орта" (т.е. смены носителей заряда, при которой реального обмена частиц и античастиц не происходит). Эта аналогия "наоборот" наводит на мысль, что зеркальная инвариантность – такой же универсальный закон природы, как и СРТ-инвариантность.

Функции $\psi(1)$ и $\psi(-1)$ описывают одну и ту же частицу, но с различной зеркальностью. Обе эти функции должны учитываться при построении теории. Таким образом, лагранжиан спинорного поля должен иметь вид:

$$\mathcal{L} = - \sum_{\kappa=\pm 1} \bar{\psi}(\kappa)(\gamma^\mu \partial_\mu + \kappa m)\psi(\kappa) \quad (2.6)$$

Лагранжиан (2.6) приводит к уравнениям (2.1), причём уравнения для $\psi(1)$ и $\psi(-1)$ различаются. Покажем, что это различие непринципиальное и его можно устранить. Для этой цели введём матрицу K , осуществляющую транспонирование γ -матриц:

$$K^{-1}\gamma_\mu K = \gamma_\mu^T \quad (2.7)$$

и рассмотрим преобразование

$$\psi^K = K\bar{\psi}^T \quad (2.8)$$

которое назовём *зеркальным сопряжением* функции ψ . Нетрудно видеть, что

$$\psi^K(x, \kappa) \sim \psi(x, -\kappa) \quad (2.9)$$

т.е. преобразование (2.8) приводит к изменению знака κ в уравнении (2.1).

Повторное преобразование (2.8) приводит к следующему результату:

$$(\psi^K)^K = -KK^+\psi \quad (2.10)$$

Равенство $KK^+ = -1$ невозможно, поэтому повторное применение преобразования (2.8) не может привести к исходному результату. Естественно потребовать, чтобы преобразование (2.8) не меняло нормировку функции ψ - это возможно, если выбрать матрицу K унитарной. Итак, имеем окончательно:

$$KK^+ = 1, \quad (\psi^K)^K = -\psi \quad (2.11)$$

Преобразование (2.8) оставляет неизменным уравнение (2.3), однако меняет поляризацию биспиноров. Действительно, пусть s_μ - вектор поляризации биспиноров $u^{(\pm)}$, т.е.

$$i\gamma_5\gamma s u^{(\pm)} = u^{(\pm)} \quad (2.12)$$

Тогда, как несложно показать, биспинор $u^{(\pm)K}$ будет удовлетворять тому же уравнению (2.12), но с вектором поляризации $s_\mu^K = -s_\mu$. Иными словами, преобразование (2.8) поворачивает вектор поляризации на угол 180° . Отметим, что в спинорном и стандартном представлениях матрица K с точностью до фазового множителя совпадает с $\Sigma_2 = i\gamma_1\gamma_3$. Можно также показать, что в любом представлении матрица зеркального сопряжения (как и матрица зарядового сопряжения) кососимметрична: $K^T = -K$.

Итак, функция ψ^K ничем не хуже ψ - обе они с одинаковым успехом могут использоваться для описания спинорных частиц. При этом, несмотря на соотношение (2.9), неправильно считать, что преобразование (2.8) меняет

зеркальность частиц: зеркальность суть внутренняя степень свободы, которую никаким математическим преобразованием нельзя изменить.

Для дальнейшего развития теории удобнее иметь дело с функциями, которые подчиняются одному и тому же уравнению, поэтому целесообразно перейти от $\psi(-1)$ к $\psi'(-1) = \psi^K(-1)$. Осуществив эту замену в лагранжиане (2.6), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\bar{\psi}(1)\gamma^\mu \frac{\partial\psi(1)}{\partial x^\mu} - m\bar{\psi}(1)\psi(1) - \\ & - \frac{\partial\bar{\psi}'(-1)}{\partial x^\mu} \gamma^\mu \psi'(-1) + m\bar{\psi}'(-1)\psi'(-1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Добавим теперь к выражению (2.13) 4-дивергенцию $\partial_\mu(\bar{\psi}'(-1)\gamma^\mu\psi'(-1))$ и, отпуская штрихи, получим окончательно

$$\mathcal{L} = - \sum_{\kappa=\pm 1} \kappa \bar{\psi}(\kappa)(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(\kappa) \quad (2.14)$$

Функции $\psi(1)$ и $\psi(-1)$, фигурирующие в лагранжиане (2.14), подчиняются одному и тому же уравнению и описывают одну и ту же частицу, т.е. эти функции образуют янг-миллсовский дублет. Однако формализм Янга-Миллса требует некоторой модификации, т. к. члены лагранжиана (2.14), отвечающие различным зеркальностям, входят в него с противоположными знаками. Рассмотрим эту проблему в общем виде.

Предположим, что у фундаментальной спинорной частицы имеется внутренняя степень свободы, принимающая k значений. Классический пример такой частицы – кварк с $k = 3$. Помимо этого любая фундаментальная частица имеет ещё одну степень свободы – зеркальность. Таким образом, мы имеем мультиплет из $2k$ полей материи: $\psi_l(\kappa)$, где $l = 1, \dots, k$, $\kappa = \pm 1$. Введём единую нумерацию этих полей следующим образом:

$$\psi_1 \equiv \psi_1(1), \dots, \psi_k \equiv \psi_k(1), \psi_{k+1} \equiv \psi_1(-1), \dots, \psi_{2k} \equiv \psi_k(-1)$$

Итак, мы получаем многокомпонентную полевую функцию $\psi_r (r = 1, \dots, 2k)$, которую удобно представлять как вектор-столбец, опуская при этом мультиплетный индекс r .

Лагранжиан свободных полей материи должен иметь вид

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\tau(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \quad (2.15)$$

где

$$\tau = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ раз}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{k \text{ раз}}) \quad (2.16)$$

Для получения лагранжиана взаимодействующих полей нужно в (2.15) сделать замену

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igB_\mu \quad (2.17)$$

где B_μ – мультипотенциал поля Янга-Миллса, g – константа взаимодействия. Вещественность лагранжиана требует выполнения условия

$$B_\mu^+ = \tau B_\mu \tau \quad (2.18)$$

В дальнейшем матрицы, удовлетворяющие условию (2.18), будем называть *квазиэрмитовыми*. Полный лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\tau(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi + \mathcal{L}_f \quad (2.19)$$

где \mathcal{L}_f – лагранжиан полей Янга-Миллса. Формализм Янга-Миллса позволяет определить вид лагранжиана взаимодействия, однако он не даёт рецепта для построения \mathcal{L}_f . Наиболее естественно использовать для этих целей мультитензор напряжённости

$$G_{\mu\nu} = D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - ig[B_\mu, B_\nu] \quad (2.20)$$

Из квазиэрмитовости B_μ следует, что тензор $G_{\mu\nu}$ также квазиэрмитов. А это означает, что помимо $G_{\mu\nu}$ имеется ещё один тензор $G_{\mu\nu}^+ \neq G_{\mu\nu}$, который можно использовать для построения лагранжиана \mathcal{L}_f . Итак, для \mathcal{L}_f , построенного на основе $G_{\mu\nu}$, имеются два варианта:

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{d} \text{tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \quad (2.21)$$

и

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{d} \text{tr} G_{\mu\nu}^+ G^{\mu\nu} \quad (2.22)$$

Здесь $d > 0$ – числовой коэффициент, который фиксирует единицы измерения полей и константы взаимодействия. Нетрудно видеть, что оба эти лагранжиана вещественны, поэтому нет никаких оснований отдать предпочтение одному из вариантов. Таким образом, теоретически возможны поля Янга-Миллса трёх типов. Поля с лагранжианом (2.21) будем называть полями *первого типа* или *зеркально вещественными*, а поля с лагранжианом (2.22) – полями *второго типа* или *зеркально комплексными*. Наконец, поля с лагранжианом, не совпадающим ни с (2.21), ни с (2.22), назовём полями *третьего типа* или *экзотическими*. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением полей первых двух типов. Основная наша задача – построение теории электромагнитных взаимодействий – успешно решается в рамках этого ограничения. Разумеется, нельзя исключать возможность того, что электромагнитное поле является экзотическим. Вопрос этот достаточно сложный, однако, по-видимому, малоперспективный, так что мы выносим его за пределы этой статьи.

Пусть мультиплет ψ преобразуется по некоторому представлению калибровочной группы:

$$\psi' = U\psi \quad (2.23)$$

Для инвариантности лагранжиана необходимо, чтобы матрица U удовлетворяла условию

$$U\tau U^+\tau = 1 \quad (2.24)$$

т.е. калибровочная группа должна быть подгруппой группы $U(k, k)$. Матрицы из группы $U(k, l)$ называют псевдоунитарными, однако этот термин иногда используют и в других целях. Во избежание терминологической путаницы примем специальное название этих матриц для случая $k = l$: будем называть их *квазиунитарными*. Нетрудно видеть, что локальная калибровочная инвариантность обеспечивается, если закон преобразования мультивектора B_μ имеет вид:

$$B'_\mu = UB_\mu\tau U^+\tau - \frac{i}{g} \frac{\partial U}{\partial x^\mu} \tau U^+\tau \quad (2.25)$$

Действительно, произведя расчёты аналогично тому, как это делается в традиционной теории Янга–Миллса (т.е. без матрицы τ в лагранжиане), получим:

$$(D_\mu\psi)' = UD_\mu\psi, \quad G'_{\mu\nu} = UG_{\mu\nu}\tau U^+\tau \quad (2.26)$$

Заметим, что в модифицированном формализме матрица U^+ везде заменяется на $\tau U^+\tau$. Из (2.26) следует, что полный лагранжиан полей 1-го типа инвариантен относительно любых калибровочных преобразований из группы $U(k, k)$. Что касается полей 2-го типа, то для них имеем:

$$\mathcal{L}'_f = -\frac{1}{d} \text{tr} G_{\mu\nu}^+ U^+ U G^{\mu\nu} \tau U^+ U \tau \quad (2.27)$$

Таким образом, для инвариантности лагранжиана (2.22) недостаточно квазиунитарности матрицы U , поэтому группу $U(k, k)$ необходимо сузить. Например, можно потребовать, чтобы U была не только квазиунитарна, но и унитарна. Это возможно только если U является блочно-диагональной с двумя унитарными матрицами размером $k \times k$ по диагонали.

Для наших дальнейших целей интереснее другой вариант: инвариантность лагранжиана (2.22) имеет место, если калибровочная группа является абелевой подгруппой группы $U(k, k)$. Действительно, в этом случае матрицы U и $G_{\mu\nu}$ коммутируют, то же самое справедливо для матриц U^+ и $G_{\mu\nu}^+$ (но не для U и $G_{\mu\nu}^+$ или U^+ и $G_{\mu\nu}$!). Нетрудно видеть, что, переставляя матрицы в выражении (2.27) и используя соотношение (2.24), получим искомый результат. По-видимому, этими двумя вариантами исчерпываются все возможности для полей 2-го типа.

Любую калибровочную группу можно без ограничения общности считать связной. Действительно, в формализме Янга-Миллса существенна структура группы в малой окрестности единичного элемента. Таким образом, нет смысла рассматривать несвязную группу целиком, достаточно ограничиться связной компонентой единицы группы. Согласно известной теореме теории групп любая связная абелева A -параметрическая группа Ли

изоморфна прямому произведению $T^a \times \mathbb{R}^b$, где a и b – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a + b = A$, T^a – группа a -мерного тора:

$$T^a = \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{a \text{ раз}}$$

Предположим, что калибровочной группой является $2A$ -параметрическая подгруппа группы $U(k, k)$ и рассмотрим её $2k$ -мерные представления. Обозначим через $\tau\lambda^{(a)}$ ($a = 1, \dots, 2A$) генераторы группы. Они должны быть квазиэрмитовыми матрицами, матрица τ выделена для удобства – так, чтобы матрицы $\lambda^{(a)}$ были эрмитовыми. Поскольку у каждой частицы – кванта поля – есть зеркальный двойник, число генераторов должно быть чётным. Мультивектор B_μ и мультитензор $G_{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$B_\mu = \sum_a \tau\lambda^{(a)} A_\mu^{(a)}, \quad G_{\mu\nu} = \sum_a \tau\lambda^{(a)} G_{\mu\nu}^{(a)} \quad (2.28)$$

где $A_\mu^{(a)}$ – вещественные поля Янга – Миллса,

$$G_{\mu\nu}^{(a)} = F_{\mu\nu}^{(a)} + g \sum_{b,c} f_{bca} A_\mu^{(b)} A_\nu^{(c)} \quad (2.29)$$

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)} \quad (2.30)$$

а f_{abc} – вещественные структурные константы алгебры Ли, определяемые соотношением

$$[\tau\lambda^{(a)}, \tau\lambda^{(b)}] = i \sum_c f_{abc} \tau\lambda^{(c)} \quad (2.31)$$

В пределе нулевой константы связи лагранжиан полей должен переходить в сумму лагранжианов, зависящих только от одного поля. Иными словами, при $g = 0$ лагранжиан полей должен иметь вид

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^{(a)} F^{(a)\mu\nu}$$

откуда следует, что генераторы калибровочной группы должны удовлетворять условиям

$$\text{tr } \tau\lambda^{(a)} \tau\lambda^{(b)} = \frac{d}{4} \delta_{ab} \quad (2.32)$$

для полей 1-го типа и

$$\text{tr } \lambda^{(a)} \lambda^{(b)} = \frac{d}{4} \delta_{ab} \quad (2.33)$$

для полей 2-го типа.

Для \mathcal{L}_f в обоих случаях получается следующее выражение:

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4} \sum_a G_{\mu\nu}^{(a)} G^{(a)\mu\nu} \quad (2.34)$$

Из инвариантности \mathcal{L}_f относительно инфинитезимальных преобразований калибровочной группы – так же, как и в случае унитарных калибровочных групп – с необходимостью следует, что структурные константы антисимметричны по любой паре индексов. Из (2.32) полная антисимметричность структурных констант следует автоматически. Если же имеет место соотношение (2.33), то для структурных констант получим

$$f_{abc} = -\frac{4i}{d} \text{tr} (\lambda^{(a)} \tau \lambda^{(b)} \lambda^{(c)} - \lambda^{(b)} \tau \lambda^{(a)} \lambda^{(c)}) \quad (2.35)$$

Полагая $f_{cba} = -f_{abc}$, получим из (2.35), что при любых a , b и c должно выполняться условие:

$$\text{tr}([\tau, \lambda^{(a)}] \{\lambda^{(b)}, \lambda^{(c)}\}) = 0 \quad (2.36)$$

Условие (2.36) выполняется либо если группа абелева, либо если $[\tau, \lambda^{(a)}] = 0$ для всех a . Имеются ли другие варианты – открытый вопрос. Во всяком случае для двумерных представлений других вариантов нет.

Итак, полный лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} \tau (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi - \frac{1}{4} \sum_a G_{\mu\nu}^{(a)} G^{(a)\mu\nu} + g \sum_a j_\mu^{(a)} A^{(a)\mu} \quad (2.37)$$

где

$$j_\mu^{(a)} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \lambda^{(a)} \psi \quad (2.38)$$

Из лагранжиана (2.37) получаются следующие уравнения движения:

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = ig \sum_a A_\mu^{(a)} \gamma^\mu \tau \lambda^{(a)} \psi \quad (2.39)$$

$$\partial^\nu G_{\mu\nu}^{(a)} - g \sum_{b,c} f_{abc} G_{\mu\nu}^{(b)} A^{(c)\nu} = g j_\mu^{(a)} \quad (2.40)$$

Уравнения (2.39) и (2.40) должны обладать зеркальной инвариантностью, о которой шла речь в начале этого раздела, и это требование накладывает определённые ограничения на элементы матриц $\lambda^{(a)}$. Вспомним, что для перехода от лагранжиана (2.6) к лагранжиану (2.14) была сделана замена $\psi(-1) \rightarrow \psi^K(-1)$. В лагранжиане (2.15) также фигурируют зеркально сопряжённые функции ψ_r при $r > k$. Теперь же для изучения зеркальной

инвариантности необходимо вернуться к исходным функциям, которые обозначим φ_r :

$$\psi_{r+k} = \varphi_{r+k}^K \quad (r = 1, \dots, k) \quad (2.41)$$

Введём по аналогии с зарядовым сопряжением понятие *квиззарядового сопряжения*. Суть этого преобразования состоит в замене носителей заряда, т.е. замене всех заряжённых частиц на их зеркальных двойников. При этом истинно нейтральные частицы не нужно менять на зеркальных двойников, т.к. они не являются носителями заряда. Таким образом, калибровочные поля при повороте "зарядового орта" могут лишь поменять знак, что приводит нас к понятию *квиззарядовой чётности*. Итак, преобразования квиззарядового сопряжения имеют вид

$$\psi_r \leftrightarrow \varphi_{r+k} \quad (r = 1, \dots, k), \quad A_\mu^{(a)} \rightarrow v_a A_\mu^{(a)} \quad (a = 1, \dots, 2A) \quad (2.42)$$

где $v_a = \pm 1$ - квиззарядовая чётность поля $A_\mu^{(a)}$. Зеркальная инвариантность означает следующее: если в уравнениях движения осуществить активную 4-инверсию координат и квиззарядовое сопряжение, то в результате мы опять получим правильные уравнения движения.

Сравним уравнения движения для функций $\psi_r(x)$ и $\varphi_{r+k}(-x)$:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi_r(x) = ig\gamma^\mu \sum_a A_\mu^{(a)}(x) \sum_{s=1}^k ((\tau\lambda^{(a)})_{rs}) \psi_s(x) + \\ + (\tau\lambda^{(a)})_{r,s+k} \varphi_{r+k}^K(x) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \partial_\mu + m)\varphi_{r+k}(-x) = ig\gamma^\mu \sum_a A_\mu^{(a)}(-x) \sum_{s=1}^k ((\lambda^{(a)}\tau)_{s+k,r+k}) \varphi_{s+k}(-x) - \\ - (\lambda^{(a)}\tau)_{s,r+k} \psi_s^K(-x) \end{aligned} \quad (2.44)$$

При замене $\psi_r(\pm x) \leftrightarrow \varphi_{r+k}(\mp x)$, $A_\mu^{(a)}(\pm x) \leftrightarrow v_a A_\mu^{(a)}(\mp x)$ уравнения (2.43) и (2.44) должны переходить друг в друга. Это имеет место, если выполняются следующие равенства:

$$(\tau\lambda^{(a)})_{rs} = v_a (\lambda^{(a)}\tau)_{s+k,r+k}, \quad (\tau\lambda^{(a)})_{r,s+k} = -v_a (\lambda^{(a)}\tau)_{s,r+k}$$

Из этих равенств с учётом определения матрицы τ получаем чрезвычайно важный результат:

$$\lambda_{rs}^{(a)} = -v_a \lambda_{s+k,r+k}^{(a)}, \quad \lambda_{r,s+k}^{(a)} = v_a \lambda_{s,r+k}^{(a)}, \quad (r, s = 1, \dots, k; a = 1, \dots, 2A) \quad (2.45)$$

Соотношения (2.45) должны быть инвариантны относительно инфинитезимального калибровочного преобразования матриц $\lambda^{(a)}$:

$$\lambda^{(a)'} = \lambda^{(a)} + \sum_{b,c} \varepsilon_b f_{abc} \lambda^{(c)} \quad (2.46)$$

Нетрудно показать, что для этого необходимо, чтобы для любых a, b и c выполнялось равенство

$$(v_a - v_c)f_{abc} = 0 \quad (2.47)$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.40). Непосредственно убедиться в его зеркальной инвариантности не получится, т.к. строго говоря зеркальная инвариантность (как и СРТ–инвариантность!) справедлива только для квантованных полей. В уравнении (2.40) в отличие от (2.39) есть произведения функций, которые при квантовании становятся антикоммутирующими операторами. В связи с этим выражения типа $\psi_r^T \gamma_\mu^T \bar{\psi}_s^T \equiv \bar{\psi}_s \gamma_\mu \psi_r$ нужно брать со знаком «минус». С учётом этого нюанса требование зеркальной инвариантности опять приводит к результату (2.45). Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение (2.40) в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} \partial^\nu F_{\mu\nu}^{(a)} + g \sum_{b,c} f_{abc} \left((A_\mu^{(b)} \partial_\nu + A_\nu^{(b)} \partial_\mu) A^{(c)\nu} - 2A_\nu^{(b)} \partial^\nu A_\mu^{(c)} \right) + \\ + g^2 \sum_{b,c,d,h} f_{abh} f_{cdh} A_\nu^{(b)} A_\mu^{(c)} A^{(d)\nu} = g j_\mu^{(a)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

где

$$\begin{aligned} j_\mu^{(a)} = i \sum_{r,s=1}^k (\bar{\psi}_r \gamma_\mu \lambda_{rs}^{(a)} \psi_s + \overline{\varphi}_{r+k}^K \gamma_\mu \lambda_{r+k,s+k}^{(a)} \varphi_{s+k}^K + \\ + \bar{\psi}_r \gamma_\mu \lambda_{r,s+k}^{(a)} \varphi_{s+k}^K + \overline{\varphi}_{r+k}^K \gamma_\mu \lambda_{r+k,s}^{(a)} \psi_s) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Осуществим в выражении (2.49) замену $\psi_r \leftrightarrow \varphi_{r+k}$. В результате после несложных преобразований (с учётом дополнительного "квантового" знака «минус»!) получим

$$\begin{aligned} j_\mu^{(a)} \rightarrow \tilde{j}_\mu^{(a)} = i \sum_{r,s=1}^k (-\bar{\psi}_r \gamma_\mu \lambda_{r+k,s+k}^{(a)} \psi_s - \overline{\varphi}_{r+k}^K \gamma_\mu \lambda_{rs}^{(a)} \varphi_{s+k}^K + \\ + \bar{\psi}_r \gamma_\mu \lambda_{s,r+k}^{(a)} \varphi_{s+k}^K + \overline{\varphi}_{r+k}^K \gamma_\mu \lambda_{s+k,r}^{(a)} \psi_s) \end{aligned} \quad (2.50)$$

При преобразовании $A_\mu^{(a)}(x) \rightarrow v_a A_\mu^{(a)}(-x)$ член $\partial^\nu F_{\mu\nu}^{(a)}(x)$ переходит в $v_a \partial^\nu F_{\mu\nu}^{(a)}(-x)$. Для того, чтобы уравнение (2.48) было зеркально инвариантным, необходимо выполнение равенства

$$\tilde{j}_\mu^{(a)}(-x) = v_a j_\mu^{(a)}(-x) \quad (2.51)$$

Сравнивая выражения (2.49) и (2.50), нетрудно видеть, что необходимым условием для этого как раз и являются соотношения (2.45). Помимо (2.51) для

зеркальной инвариантности уравнения (2.48) необходимо выполнение следующих условий:

$$v_a v_b v_c f_{abc} = -f_{abc} \quad (2.52)$$

$$v_a v_b v_c v_d \sum_h f_{abh} f_{cdh} = \sum_h f_{abh} f_{cdh} \quad (2.53)$$

Отметим, что знак «минус» в правой части (2.52) возникает из-за того, что при 4-инверсии координат член с первыми производными в уравнении (2.48) меняет знак. Из (2.47) следует равенство $f_{abc} = v_b v_c f_{abc}$, используя которое, можно преобразовать (2.52) следующим образом:

$$f_{abc} = -v_a f_{abc} \quad (2.54)$$

Из (2.54) следует, что квазизарядово чётные поля с необходимостью являются абелевыми. Очевидно, что этот факт также обеспечивает автоматическое выполнение равенств (2.47) и (2.53).

Пронумеруем калибровочные поля таким образом, что поля с номерами $a = 1, \dots, A$ имеют зеркальность $\kappa = 1$, а поля с номерами $a = A + 1, \dots, 2A$ – зеркальность $\kappa = -1$, причём поля с номерами a и $a + A$ составляют зеркальную пару. Разбиение набора калибровочных полей на пары зеркальных двойников в каждом конкретном случае представляет собой проблему, решение которой выходит за рамки этой статьи, однако из соображений зеркальной симметрии можно сделать некоторые выводы. Рассмотрим произвольную систему частиц с одинаковой зеркальностью и заменим все частицы этой системы их зеркальными двойниками. Обе системы с физической точки зрения идентичны, поэтому все масштабные параметры этих систем должны быть одинаковы. Это означает, что диагональные матричные элементы $\lambda_{rr}^{(a)}$ и $\lambda_{r+k, r+k}^{(a+A)}$ могут отличаться только знаком. То же самое справедливо и для матричных элементов $\lambda_{rr}^{(a+A)}$ и $\lambda_{r+k, r+k}^{(a)}$, поскольку зеркальности калибровочных полей и полей материи никак не соотносятся друг с другом. Итак, мы имеем ещё одно условие, которому должны удовлетворять матрицы $\lambda^{(a)}$:

$$\left| \lambda_{rr}^{(a)} \right| = \left| \lambda_{r+k, r+k}^{(a+A)} \right|, \left| \lambda_{rr}^{(a+A)} \right| = \left| \lambda_{r+k, r+k}^{(a)} \right| \quad (r = 1, \dots, k; a = 1, \dots, A) \quad (2.55)$$

Соотношения (2.55) не инвариантны относительно калибровочных преобразований (2.46), поэтому их следует считать справедливыми только для абелевых полей. Как будут выглядеть эти соотношения в неабелевом случае – открытый вопрос.

В завершение этого раздела сделаем ещё одно утверждение относительно квазизарядовой чётности калибровочных полей. Зеркальные двойники этих полей в зеркальной паре идентичны (как и все прочие зеркальные двойники) и должны обладать одинаковыми физическими

свойствами. Поэтому естественно считать, что их квазизарядовые чётности совпадают:

$$v_a = v_{a+A} \quad (a = 1, \dots, A) \quad (2.56)$$

3. Лагранжиан электромагнитного взаимодействия.

Исходным объектом для построения электродинамики является зеркальный дублет

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(1) \\ \psi(-1) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

В дальнейшем мы будем обозначать компоненты дублета (3.1), исходя из соображений удобства, одним из двух эквивалентных обозначений: либо ψ_r , либо $\psi(x)$. Итак, калибровочной группой электродинамики является какая-то подгруппа группы $U(1,1)$. Группа $U(1,1)$ 4-параметрическая, и её элементы имеют вид

$$U = e^{i\chi} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1 ch\theta} & e^{i\varphi_2 sh\theta} \\ e^{-i\varphi_2 sh\theta} & e^{-i\varphi_1 ch\theta} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

где $\chi, \theta, \varphi_1, \varphi_2$ – вещественные параметры.

Предположим, что электромагнитное поле является полем 1-го типа, и пусть $\tau\lambda^{(a)}$ и $\tau\lambda^{(b)}$ – зеркальная пара генераторов калибровочной группы.

В качестве базиса в пространстве матриц 2×2 выберем матрицы $\sigma^0, \sigma_n (n = 1, 2, 3)$, где σ^0 – единичная матрица, σ_n – матрицы Паули. Матрицы $\lambda^{(a)}$ и $\lambda^{(b)}$ должны быть эрмитовыми, поэтому их можно представить в виде

$$\lambda^{(a)} = a_\mu \sigma^\mu, \quad \lambda^{(b)} = b_\mu \sigma^\mu \quad (3.3)$$

где a_μ и b_μ – вещественные "4-векторы". Для полей 1-го типа должно выполняться соотношение (2.32), откуда получим следующие уравнения:

$$a_0^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 = b_0^2 + b_3^2 - b_1^2 - b_2^2 = \frac{d}{8} \quad (3.4)$$

$$a_0 b_0 + a_3 b_3 - a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0 \quad (3.5)$$

Общее решение уравнений (3.4) имеет вид:

$$a_0 = \sqrt{\frac{d}{8}} ch\chi_1 \cos \xi_1, \quad a_3 = \sqrt{\frac{d}{8}} ch\chi_1 \sin \xi_1,$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{\frac{d}{8}} sh\chi_1 \cos \eta_1, & a_2 &= \sqrt{\frac{d}{8}} sh\chi_1 \sin \eta_1, \\
b_0 &= \sqrt{\frac{d}{8}} ch\chi_2 \cos \xi_2, & b_3 &= \sqrt{\frac{d}{8}} ch\chi_2 \sin \xi_2, \\
b_1 &= \sqrt{\frac{d}{8}} sh\chi_2 \cos \eta_2, & b_2 &= \sqrt{\frac{d}{8}} sh\chi_2 \sin \eta_2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подстановка (3.6) в (3.5) приводит к уравнению

$$ch\chi_1 ch\chi_2 \cos(\xi_1 - \xi_2) - sh\chi_1 sh\chi_2 \cos(\eta_1 - \eta_2) = 0 \tag{3.7}$$

В (3.6) и (3.7) χ_i , ξ_i и η_i ($i = 1, 2$) – произвольные вещественные параметры.

Условия (2.45) применительно к рассматриваемому случаю имеют вид $\lambda_{11}^{(a)} = -v_a \lambda_{22}^{(a)}$, $\lambda_{11}^{(b)} = -v_b \lambda_{22}^{(b)}$, а условия (2.56) сводятся к равенству $v_a = v_b$.

Отсюда получаются уравнения $a_0 + a_3 = \pm(a_0 - a_3)$, $b_0 + b_3 = \pm(b_0 - b_3)$, которые имеют два варианта решения: $a_0 = b_0 = 0$ или $a_3 = b_3 = 0$. Из (3.7) следует, что оба эти варианта приводят к невыполнимому условию $ch\chi_1 ch\chi_2 = sh\chi_1 sh\chi_2 |\cos(\eta_1 - \eta_2)|$. Таким образом, электромагнитное поле не может быть полем 1-го типа. Отметим, что если отбросить условия (2.56) и считать, что $v_a = -v_b$, то условия (2.45) приводят к равенствам $a_0 = b_3 = 0$ или $a_3 = b_0 = 0$, которые совместны с уравнением (3.7).

Итак, электромагнитное поле является полем 2-го типа. Предположим, что оно неабелево. Это означает, что алгебра Ли калибровочной группы 4-мерна. Действительно, число генераторов группы должно быть чётным, так что 3-мерный случай нам не подходит. В двумерном же случае структурные константы в силу своей полной антисимметричности должны обращаться в ноль, поэтому калибровочная группа с необходимостью оказывается абелевой.

Пусть $\tau\lambda^{(a)}$, $\tau\lambda^{(b)}$, $\tau\lambda^{(c)}$ и $\tau\lambda^{(d)}$ – четыре генератора группы. Представим их в виде (3.3), а соответствующие "4-векторы" обозначим a_μ , b_μ , c_μ и d_μ . Для генераторов полей 2-го типа должно выполняться условие (2.36). Это условие для каждой тройки индексов даёт три уравнения, но лишь два из них независимы. Всего таких троек четыре, так что из (2.36) мы получим восемь уравнений:

$$\begin{aligned}
c_0 u + b_0 v &= c_0 u - a_0 w = d_0 u + b_0 u' = d_0 u - a_0 v' = \\
&= c_0 u' + a_0 w' = d_0 v - a_0 w' = c_0 v' + b_0 w' = d_0 w - b_0 w' = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1, & \mathbf{v} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c})_3, & \mathbf{w} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_3, \\ \mathbf{u}' &= (\mathbf{a} \times \mathbf{d})_3, & \mathbf{v}' &= (\mathbf{b} \times \mathbf{d})_3, & \mathbf{w}' &= (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для линейной независимости генераторов необходимо, чтобы определитель матрицы, столбцы которой совпадают с вектор-столбцами a_μ , b_μ , c_μ и d_μ , был отличен от нуля. Этот определитель равен

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (c_0 d_3 - c_3 d_0) \mathbf{u} - (b_0 d_3 - b_3 d_0) \mathbf{v} + (a_0 d_3 - a_3 d_0) \mathbf{w} + \\ &+ (b_0 c_3 - b_3 c_0) \mathbf{u}' - (a_0 c_3 - a_3 c_0) \mathbf{v}' + (a_0 b_3 - a_3 b_0) \mathbf{w}' \end{aligned} \quad (3.10)$$

Предположим вначале, что $a_0 b_0 c_0 d_0 \neq 0$. Тогда из уравнений (3.8) получим:

$$\mathbf{v} = -\frac{c_0}{b_0} \mathbf{u}, \quad \mathbf{w} = \frac{c_0}{a_0} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}' = -\frac{d_0}{b_0} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d_0}{a_0} \mathbf{u} \quad (3.11)$$

Далее из (3.8) с использованием (3.11) имеем

$$\mathbf{w}' = \frac{c_0 d_0}{a_0 b_0} \mathbf{u} = -\frac{c_0 d_0}{a_0 b_0} \mathbf{u}$$

откуда следует, что $\mathbf{w}' = 0$, а значит $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{u}' = \mathbf{v}' = 0$ и как результат получим $\mathcal{D} = 0$.

Предположим теперь, что $a_0 b_0 c_0 \neq 0$, $d_0 = 0$. Задача полностью симметрична относительно перестановки a_μ , b_μ , c_μ и d_μ , поэтому выбор именно d_0 равным нулю никак не ограничивает общности. В этом случае из уравнений (3.8) получим

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' = \mathbf{w}' = 0, \quad \mathbf{u} = \frac{a_0}{c_0} \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} = -\frac{a_0}{b_0} \mathbf{w} \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.10), имеем для определителя результат $\mathcal{D} = 3a_0 w d_3$. По предположению $\mathcal{D} \neq 0$, поэтому $d_3 \neq 0$, однако в этом случае у генератора $\tau\lambda^{(d)}$ не найдётся зеркальной пары. Действительно, не ограничивая общности допустим, что $\tau\lambda^{(c)}$ и $\tau\lambda^{(d)}$ – зеркальная пара. Тогда, согласно (2.45) и (2.56), должно выполняться одно из условий $c_0 = d_0 = 0$ или $c_3 = d_3 = 0$, что исключено. Таким образом, этот вариант тоже не подходит.

Если среди параметров a_0, b_0, c_0 и d_0 два и более равны нулю, генераторы группы тоже оказываются линейно зависимыми. Действительно, если $a_0 b_0 \neq 0$, $c_0 = d_0 = 0$, то из уравнений (3.8) получим $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{u}' = \mathbf{v}' = \mathbf{w}' = 0$, поэтому $\mathcal{D} = 0$. В случае $a_0 \neq 0$, $b_0 = c_0 = d_0 = 0$ из уравнений (3.8) следует, что $\mathbf{w} = \mathbf{v}' = \mathbf{w}' = 0$, откуда получаем $\mathcal{D} = 0$. Наконец тот же результат $\mathcal{D} = 0$ непосредственно следует из (3.10), если $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$. Таким образом, исчерпав все варианты, мы приходим к выводу, что электромагнитное поле не может быть неабелевым. Остаётся только абелев вариант с 2-хпараметрической калибровочной группой.

Примечательно, что при доказательстве того факта, что электромагнитное поле не может быть неабелевым, во всех случаях кроме

$a_0 b_0 c_0 \neq 0, d_0 = 0$ условия (2.45) и (2.56) не использовались. На самом деле сравнительно просто можно доказать, что и в этом особом случае нет необходимости использовать требования, накладываемые на поле зеркальной инвариантностью. Мы не будем приводить здесь доказательство, т.к. данный вопрос не является принципиальным.

Наша задача – найти все возможные двумерные представления всех связных абелевых 2-хпараметрических групп, генераторы которых удовлетворяют условиям (2.33), (2.45), (2.55) и (2.56). Что касается связных абелевых 2-хпараметрических групп, то их имеется с точностью до изоморфизма всего три: $U(1) \times U(1)$, $U(1) \times \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Мультипотенциал электромагнитного поля имеет вид

$$B_\mu = \sum_{\kappa=\pm 1} \tau \lambda(\kappa) A_\mu(\kappa) \quad (3.13)$$

где $\tau \lambda(1)$ и $\tau \lambda(-1)$ – генераторы калибровочной группы, $\tau = \text{diag}(1, -1)$, $A_\mu(1)$ и $A_\mu(-1)$ – вещественные 4-потенциалы поля, составляющие зеркальную пару. Проблемы разбиения полей на зеркальные пары, о которой шла речь в конце предыдущего раздела, в данном случае нет, т.к. пара всего одна. Представим матрицы $\lambda(\pm 1)$ в виде, аналогичном (3.3):

$$\lambda(1) = a_\mu \sigma^\mu, \quad \lambda(-1) = b_\mu \sigma^\mu \quad (3.14)$$

Из соотношения (2.33), справедливого для полей 2-го типа, получим

$$a_0^2 + \mathbf{a}^2 = b_0^2 + \mathbf{b}^2 = \frac{d}{8}, \quad a_0 b_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.15)$$

Вычисление коммутатора генераторов группы даёт следующий результат:

$$[\tau \lambda(\kappa), \tau \lambda(\kappa')] = (\kappa - \kappa') \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3.16)$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = (a_0 b_1 - a_1 b_0, a_0 b_2 - a_2 b_0, -i(a_1 b_2 - a_2 b_1)) \quad (3.17)$$

Группа абелева, поэтому $\boldsymbol{\omega} = 0$, откуда имеем

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = a_0 b_2 - a_2 b_0 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \quad (3.18)$$

Условия (2.55) сводятся к равенству $|\lambda_{11}(\kappa)| = |\lambda_{22}(-\kappa)|$, откуда получим либо

$$a_0^2 = b_0^2, \quad a_3^2 = b_3^2 \quad (3.19)$$

либо

$$a_0^2 = b_3^2, \quad a_3^2 = b_0^2 \quad (3.20)$$

Условия (2.45) и (2.56) мы пока не будем включать, т.к. весьма любопытно и поучительно наблюдать, как именно они работают по ограничению возможных вариантов калибровочной симметрии.

Итак, элементы матриц $\lambda(\pm 1)$ определяются системой, состоящей из уравнений (3.15), (3.18) и одного из вариантов – (3.19) или (3.20). Решение этой системы не представляет большого труда. Результат для варианта с равенством (3.19):

$$\lambda(\kappa) = \frac{\sqrt{d}}{4} \mu(\kappa) \begin{pmatrix} 1 + \kappa \cos \xi & \kappa e^{-i\eta} \sin \xi \\ \kappa e^{i\eta} \sin \xi & -1 + \kappa \cos \xi \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

а для варианта (3.20):

$$\lambda(\kappa) = \frac{\sqrt{d}}{2} \mu(\kappa) \text{diag}(\cos(\xi + \frac{\pi}{4}(\kappa - 1)), \sin(\xi + \frac{\pi}{4}(\kappa - 1))) \quad (3.22)$$

В (3.21) и (3.22) ξ и η – произвольные вещественные параметры, а $\mu(\kappa) = \pm 1$.

Из условий (2.45) и (2.56) следуют равенства $\lambda_{11}(\kappa) = -\nu \lambda_{22}(\kappa)$, где ν – квазизарядовая чётность электромагнитного поля. В случае (3.21) отсюда имеем

$$1 - \nu = -\kappa(1 + \nu) \cos \xi \quad (3.23)$$

Полагая в (3.23) различные значения ν , получим при $\nu = 1$ равенство $\cos \xi = 0$, а при $\nu = -1$ – противоречивое равенство $2 = 0$. Вариант (3.22) для матриц $\lambda(\kappa)$ также приводит к противоречию: $\cos \xi = \pm \sin \xi = 0$. Таким образом, вариант (3.21) со значением $\nu = -1$ и вариант (3.22) отпадают, остаётся только вариант (3.21) со значением $\nu = 1$.

Итак, электромагнитное поле является квазизарядово чётным, а матрицы $\lambda(\kappa)$ определяются формулой (3.21), в которой нужно положить $\cos \xi = 0$. При этом $\sin \xi = \pm 1$, однако отрицательный знак $\sin \xi$ можно включить в фазовые множители, переопределив параметр η . Кроме того, множители $e^{\mp i\eta}$ можно включить соответственно в функции ψ_2 и $\bar{\psi}_2$, которые определены с точностью до фазового множителя. Иными словами, можно перейти к эквивалентному представлению калибровочной группы: $\tau \lambda(\kappa) \rightarrow X \tau \lambda(\kappa) X^{-1} = \tau X \lambda(\kappa) X^{-1}$, где $X = \text{diag}(1, e^{-i\eta})$. Наконец, определимся с коэффициентами $\mu(\kappa)$. Их можно выбрать произвольным образом, т.к. поля $A_\mu(\kappa)$ определены с точностью до знака. Однако целесообразно считать, что $A_\mu(1)$ и $A_\mu(-1)$ имеют одинаковый физический смысл, совпадающий с физическим смыслом традиционного поля A_μ . Члены лагранжиана, отвечающие взаимодействию полей $A_\mu(\kappa)$ с током, составленным из функций ψ_1 и $\bar{\psi}_1$, имеют вид $i e \lambda_{11}(\kappa) A_\mu(\kappa) \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_1$. Сравним их с традиционным лагранжианом взаимодействия $i e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$. Естественно считать ψ_1 и $\bar{\psi}_1$ аналогами традиционных функций ψ и $\bar{\psi}$, поэтому коэффициенты $\lambda_{11}(\kappa)$ следует считать положительными. Итак, целесообразно положить $\mu(\kappa) = 1$ для обоих значений κ . Учитывая всё сказанное в этом абзаце, получаем для матриц $\lambda(\kappa)$ окончательный результат:

$$\lambda(\kappa) = \frac{\sqrt{d}}{4} \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{d}}{4} (\sigma_3 + \kappa \sigma_1) \quad (3.24)$$

Из (3.24) получим выражение для генераторов группы:

$$\tau\lambda(\kappa) = \frac{\sqrt{d}}{4} (1 + i\kappa\sigma_2) \quad (3.25)$$

Итак, представление калибровочной группы нужно искать в виде $U = a + ib\sigma_2$. Требование квазиунитарности матрицы U приводит к следующим уравнениям для коэффициентов a и b :

$$|a|^2 - |b|^2 = 1, \quad \text{Re } ab^* = 0 \quad (3.26)$$

Из (3.26) имеем $a = e^{i\varphi} ch\theta$, $b = -ie^{i\varphi} sh\theta$, где φ и θ – произвольные вещественные параметры. Таким образом, искомый результат имеет вид:

$$U(\varphi, \theta) = e^{i\varphi} (ch\theta + \sigma_2 sh\theta) = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} ch\theta & -ish\theta \\ ish\theta & ch\theta \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Представление (3.27) есть не что иное, как двумерное представление группы $U(1) \times \mathbb{R}$. Это представление не является неприводимым – с помощью преобразования подобия $Y = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ его можно привести к диагональному виду:

$$YU(\varphi, \theta)Y^{-1} = e^{i\varphi} \text{diag}(e^\theta, e^{-\theta}) \quad (3.28)$$

Группа $U(1) \times \mathbb{R}$ имеет неприводимое двумерное представление

$$(e^{i\varphi}, x) \mapsto e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Представление (3.29) не является квазиунитарным, однако его можно сделать таковым с помощью преобразования подобия $Z = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$Ze^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z^{-1} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 + ix & ix \\ -ix & 1 - ix \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Мы получили бы представление (3.30), если бы положили в (3.21) $|\cos\xi| = 1/\sqrt{2}$ вместо $\cos\xi = 0$, однако это нарушило бы условие (2.45). Таким образом, условие (2.45), которое является следствием требования зеркальной инвариантности, накладывает жёсткие ограничения на выбор представления калибровочной группы: даже выбор между эквивалентными представлениями ограничен выбором фазовых множителей у функций ψ_1 и ψ_2 . Мы вернёмся к обсуждению этого вопроса в третьей части статьи.

Осуществим теперь калибровочное преобразование полей $A_\mu(\kappa)$: для этого нужно подставить преобразование (3.27) в формулу (2.25). В результате получим следующее уравнение:

$$\partial_\mu(\varphi - i\sigma_2\theta) = \frac{\sqrt{d}}{4}e \sum_{\kappa=\pm 1} (1 + i\kappa\sigma_2)(A'_\mu(\kappa) - A_\mu(\kappa)) \quad (3.31)$$

Из (3.31) следует, что

$$A'_\mu(\kappa) = A_\mu(\kappa) + \partial_\mu\Lambda(\kappa) \quad (3.32)$$

где $\Lambda(1)$ и $\Lambda(-1)$ – произвольные функции, никак не связанные друг с другом. Действительно, для того чтобы получить (3.32), достаточно выбрать локальные параметры φ и θ в преобразовании (3.27) следующим образом:

$$\varphi = \frac{\sqrt{d}}{4}e(\Lambda(1) + \Lambda(-1)), \quad \theta = \frac{\sqrt{d}}{4}e(-\Lambda(1) + \Lambda(-1)) \quad (3.33)$$

А это в свою очередь означает, что для обоих полей $A_\mu(1)$ и $A_\mu(-1)$ можно выбрать кулоновскую калибровку:

$$\partial_n A_n(\kappa) = 0 \quad (3.34)$$

Итак, лагранжиан электродинамики имеет вид

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\tau(\gamma^\mu\partial_\mu + m) + \sum_{\kappa=\pm 1} \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\kappa)F^{\mu\nu}(\kappa) + ej_\mu(\kappa)A^\mu(\kappa) \right) \quad (3.35)$$

где

$$F_{\mu\nu}(\kappa) = \partial_\mu A_\nu(\kappa) - \partial_\nu A_\mu(\kappa) \quad (3.36)$$

$$j_\mu(\kappa) = i\bar{\psi}\gamma_\mu\lambda(\kappa)\psi \quad (3.37)$$

а матрицы $\lambda(\kappa)$ определяются формулой (3.24). Из лагранжиана (3.35) получаются следующие уравнения движения:

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = ie \sum_{\kappa=\pm 1} A_\mu(\kappa)\gamma^\mu\tau\lambda(\kappa)\psi \quad (3.38)$$

$$\partial_\nu\partial^\nu A_\mu(\kappa) - \partial_\mu\partial_\nu A^\nu(\kappa) = -ej_\mu(\kappa) \quad (3.39)$$

На этом этапе возникает естественный вопрос: как от уравнения (3.39) перейти к классической электродинамике? А именно, как связаны классический 4-потенциал поля A_μ и 4-вектор тока j_μ с величинами $A_\mu(\kappa)$ и $j_\mu(\kappa)$? Для ответа на этот вопрос вычислим j_μ , исходя из лагранжиана (3.35):

$$j^\mu = -i \sum_{\kappa=\pm 1} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{\alpha,\mu}(\kappa)}\psi_\alpha(\kappa) = i \sum_{\kappa=\pm 1} \kappa\bar{\psi}(\kappa)\gamma^\mu\psi(\kappa) \equiv i\bar{\psi}(\kappa)\gamma^\mu\tau\psi \quad (3.40)$$

Из (3.24) следует равенство

$$\sum_{\kappa=\pm 1} \lambda(\kappa) = \frac{\sqrt{d}}{2} \tau \quad (3.41)$$

откуда, сравнивая выражения (3.37) для $j_\mu(\kappa)$ и (3.40) для j_μ , имеем

$$j_\mu = \frac{2}{\sqrt{d}} \sum_{\kappa=\pm 1} j_\mu(\kappa) \quad (3.42)$$

Суммируя уравнение (3.39) по κ , получим с учётом (3.42) классические уравнения Максвелла

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = -e j_\mu$$

где

$$A_\mu = \frac{2}{\sqrt{d}} \sum_{\kappa=\pm 1} A_\mu(\kappa) \quad (3.43)$$

Формулы (3.42) и (3.43) дают искомый ответ.

Для канонического квантования, которое будет обсуждаться во второй части статьи, необходимо перейти к каноническим гамильтоновым переменным и вычислить скобки Дирака для пар этих переменных. Удобнее всего осуществить эту подготовительную процедуру в калибровке (3.34). Вычисления скобок Дирака в рассматриваемом случае практически ничем не отличаются от аналогичных вычислений в традиционной электродинамике. Поэтому, не вдаваясь в подробности, перечислим лишь пошаговые результаты этих вычислений.

Обобщённые координаты:

$$A^0(\kappa), \quad A_n(\kappa) \quad (n = 1,2,3; \kappa = \pm 1) \quad (3.44)$$

$$\psi_{r\alpha}, \quad \psi_{r\alpha}^* \quad (\alpha = 1,2,3,4; r = 1,2) \quad (3.45)$$

Обобщённые импульсы:

$$\pi_0(\kappa) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0(\kappa)} = 0, \quad \pi_n(\kappa) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_n(\kappa)} = \dot{A}_n(\kappa) + \partial_n A^0(\kappa) \quad (3.46)$$

$$\pi_{r\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{r\alpha}} = i\psi_{s\alpha}^* \tau_{sr}, \quad \pi_{r\alpha}^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{r\alpha}^*} = 0 \quad (3.47)$$

Связи обозначим через χ_a , где a – мультииндекс, пробегающий значения $0\kappa, 1\kappa, 2\kappa, 3\kappa, 4r\alpha$ и $5r\alpha$.

Полный набор связей:

$$\begin{aligned} \chi_{0\kappa} &= \pi_0(\kappa), & \chi_{1\kappa} &= \partial_n A_n(\kappa), & \chi_{2\kappa} &= \partial_n \pi_n(\kappa) + e\psi_{r\alpha}^* \lambda_{rs}(\kappa) \psi_{s\alpha} \\ \chi_{3\kappa} &= \partial_n \pi_n(\kappa) - \Delta A^0(\kappa), & \chi_{4r\alpha} &= \pi_{r\alpha} - i\psi_{s\alpha}^* \tau_{sr}, & \chi_{5r\alpha} &= \pi_{r\alpha}^* \end{aligned}$$

Отметим, что при $a = 0\kappa, 1\kappa, 4r\alpha, 5r\alpha$ связи первичные, а при $a = 2\kappa, 3\kappa$ – вторичные.

Пары связей, скобки Пуассона которых отличны от нуля:

$$\begin{aligned}\{\chi_{0\kappa}(\mathbf{x}, x^0), \chi_{3\kappa'}(\mathbf{x}', x^0)\}_P &= -\{\chi_{1\kappa}(\mathbf{x}, x^0), \chi_{2\kappa'}(\mathbf{x}', x^0)\}_P = \\ &= -\{\chi_{1\kappa}(\mathbf{x}, x^0), \chi_{3\kappa'}(\mathbf{x}', x^0)\}_P = \delta_{\kappa\kappa'} \Delta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \{\chi_{2\kappa}(\mathbf{x}, x^0), \chi_{4r\alpha}(\mathbf{x}', x^0)\}_P &= e\psi_{s\alpha}^*(\mathbf{x}, x^0) \lambda_{sr}(\kappa) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \{\chi_{2\kappa}(\mathbf{x}, x^0), \chi_{5r\alpha}(\mathbf{x}', x^0)\}_P &= e\lambda_{rs}(\kappa) \psi_{s\alpha}(\mathbf{x}, x^0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \{\chi_{4r\alpha}(\mathbf{x}, x^0), \chi_{5r\beta}(\mathbf{x}', x^0)\}_P &= -i\tau_{rs} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\end{aligned}$$

Скобки Дирака величин F и G :

$$\begin{aligned}\{F, G\}_D &= \{F, G\}_P - \\ &- \sum_{a,b} \iint d^3x d^3x' \{F, \chi_a(\mathbf{x}, x^0)\}_P D_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \{\chi_b(\mathbf{x}', x^0), G\}_P\end{aligned}\quad (3.48)$$

где $D_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -D_{ba}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ – функции, определяемые уравнением

$$\sum_c \int d^3y D_{ac}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{\chi_c(\mathbf{y}, x^0), \chi_b(\mathbf{x}', x^0)\}_P = \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\quad (3.49)$$

Отличные от нуля функции $D_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$:

$$\begin{aligned}D_{0\kappa, 2\kappa'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -D_{0\kappa, 3\kappa'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = D_{1\kappa, 2\kappa'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{\delta_{\kappa\kappa'}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ D_{0\kappa, 4r\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= D_{1\kappa, 4r\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{ie}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\tau\lambda(\kappa))_{rs} \psi_{s\alpha}(\mathbf{x}', x^0) \\ D_{0\kappa, 5r\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= D_{1\kappa, 5r\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{ie}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \psi_{s\alpha}^*(\mathbf{x}', x^0) (\lambda(\kappa)\tau)_{sr} \\ D_{4r\alpha, 5s\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -i\tau_{rs} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\end{aligned}$$

Всего имеется 8 канонических переменных (если отвлечься от индексов, которые пробегают ряд значений – см. (3.44-3.47)). Из них можно составить 36 различных скобок Дирака, причём только 9 из них отличны от нуля. Нас интересуют прежде всего скобки Дирака для независимых переменных $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\alpha}^*, A_n(\kappa)$ и $\dot{A}_n(\kappa)$ – всего 10 различных скобок. Отличны от нуля лишь две из них:

$$\{\psi_{r\alpha}(\mathbf{x}, x^0), \psi_{s\beta}^*(\mathbf{x}', x^0)\}_D = -i\tau_{rs} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\quad (3.50)$$

$$\{A_n(\mathbf{x}, x^0; \kappa), \dot{A}_n(\mathbf{x}', x^0; \kappa')\}_D = \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{mn}^\perp(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\quad (3.51)$$

где

$$\delta_{mn}^{\perp} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d_{mn}(\mathbf{k}) \quad (3.52)$$

$$d_{mn}(\mathbf{k}) = \delta_{mn} - \frac{k_m k_n}{\mathbf{k}^2} \quad (3.53)$$

В завершение этого раздела приведём выражение для функции Гамильтона:

$$H = H_0 + V, \quad V = U + U_0 \quad (3.54)$$

$$H_0 = \int d^3x \mathcal{H}_0(x), \quad V = \int d^3x \mathcal{V}(x) = \int d^3x (\mathcal{U}(x) + \mathcal{U}_0(x)) \quad (3.55)$$

$$\mathcal{H}_0 = i\psi^{\dagger} \tau (-\alpha_n \partial_n + \gamma^0 m) \psi + \frac{1}{2} \sum_{\kappa=\pm 1} (\dot{A}_n(\kappa) \dot{A}_n(\kappa) + B_n(\kappa) B_n(\kappa)) \quad (3.56)$$

$$\mathcal{U} = -e \sum_{\kappa=\pm 1} j_n(\kappa) A_n(\kappa), \quad \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} e \sum_{\kappa=\pm 1} \rho(\kappa) A^0(\kappa) \quad (3.57)$$

$$B_n(\kappa) = \varepsilon_{nml} \partial_m A_l(\kappa) \quad (3.58)$$

$$\rho(\kappa) = \psi^{\dagger} \lambda(\kappa) \psi, \quad j_n(\kappa) = \psi^{\dagger} \alpha_n \lambda(\kappa) \psi \quad (3.59)$$

$$A^0(\mathbf{x}, x^0; \kappa) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}', x^0; \kappa) \quad (3.60)$$